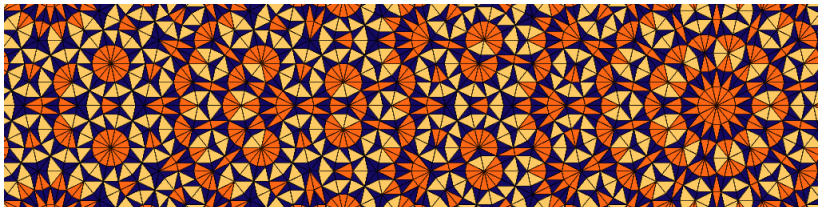


# Panorama der Mathematik und Informatik

## 3: Geschichte: Islamische Welt, Mittelalter

Dirk Frettlöh  
Technische Fakultät

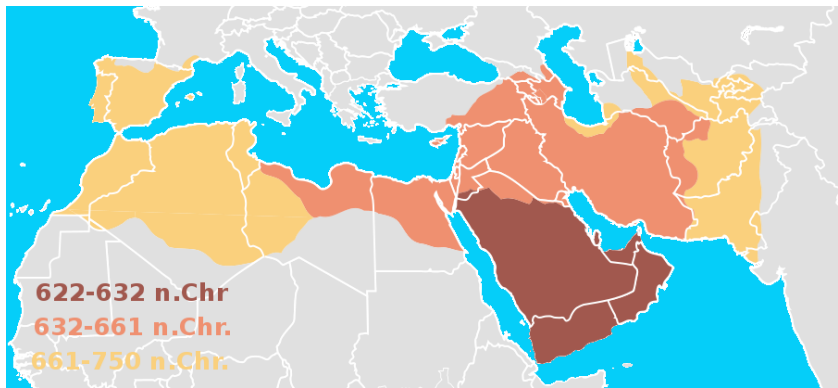


Nach den alten Griechen kam das finstere Mittelalter...



... nicht ganz. Die Erben waren Rom (keine mathematischen Fortschritte, aber Anwendung etwa in der Architektur), Ost-Rom = Byzanz, und die islamische Welt.

Dank der Byzantiner und der islamischen Gelehrten sind etwa die Werke von Euklid (komplett im griech. Originaltext) oder die des Apollonius erhalten (acht Bände über Kegelschnitte, Band 1-4 sind im griech. Originaltext erhalten, Band 5-7 nur auf arabisch, Band 8 verschollen).



Nach der Expansion die Stabilisierung. Wirtschaftliche Blüte, Städte, Handel...

Um 750 wird Bagdad Hauptstadt. Kalifen (al-Mansur, Harun ar-Rashid, al-Ma'mun) fördern Wissenschaft: "*Haus der Weisheit*"

Sammeln und Übersetzen der antiken Werke ins Arabische. Neben griechischen auch aus Persien, Ägypten, Indien (!).

Darauf folgt eine Phase eigener Errungenschaften.

- ▶ **Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi** (ca 780-850)  
(Al-Choresmi, "Algorithmus"): quadratische Gleichungen; indische Zahlen
- ▶ **Abū al-Wafā' Būzjānī** (ca 940-998) **Abu Nasr Mansur** (ca 960-1036) Sphärische Geometrie
- ▶ **Abū Bakr ibn Muhammad ibn al Husayn al-Karajī** (ca 953-1029) vollständige Induktion
- ▶ **Omar Khayyám** (ca 1040-1123): Buch "...al-gabr..." = Algebra; kubische Gleichungen wie  $x^3 + ax = b$  lösen (mittels Schnittpunkten von Kegelschnitten)
- ▶ viel mehr zu Astronomie, Optik, Medizin



## Quadratische Gleichungen bei al-Choresmi:

Tabelle mit 6 "Normalformen":

$$(1) ax^2 = bx, \quad (2) ax^2 = c, \quad (3) bx = c,$$

$$(4) ax^2 + bx = c, \quad (5) ax^2 + c = bx, \quad (6) bx + c = ax^2.$$

(warum so? keine negativen Zahlen/Lösungen werden betrachtet!  
Hier:  $a, b, c > 0$ )

**Beispiel:** Löse  $2x^2 + 100 - 20x = 58$ . "Auffüllen:"

$$2x^2 + 100 - 20x + 20x = 58 + 20x, \quad 2x^2 + 100 - 58 = 58 - 58 + 20x,$$

"gegenüberstellen":

$$2x^2 + 42 = 20x, \quad x^2 + 21 = 10x$$

Also Typ (5). Dann:

$$x^2 + 21 = 10x$$

*"Halbiere die Wurzel; das ergibt fünf; multipliziere dies mit sich selbst, und du erhältst fünfundzwanzig; ziehe davon die einundzwanzig ab, die dem Quadrat hinzugefügt sind; es verbleiben vier; ziehe hieraus die Wurzel — das ergibt zwei, und ziehe dies von der Hälfte der Wurzel ab, d.h. von fünf, es verbleiben drei; dies ist die Wurzel des Quadrats, das du suchst, und das Quadrat ist neun."*

Also auf mathematisch:  $\frac{10}{2} - \sqrt{\left(\frac{10}{2}\right)^2 - 21} = 3$  ( $p - q$ -Formel!)

Historisch weit wichtiger: Al-Choresmi schreibt ein Werk über **indische Zahlen**. Und wie man damit addiert, subtrahiert, multipliziert...

Das sind die Zahlen, die wir heute benutzen; und die Algorithmen, nach denen wir heute (ohne Strom) rechnen.

*"Wir sprechen deutsch, wir schreiben römisch und wir rechnen indisch." (K. Menninger)*



Schon früh Zeichen für 1, 2, 3,  $\dots$ , 9 (statt I, II, III, IIII, ... X, XX, ...)

- ▶ Name für Buddha:  $10^{421}$
- ▶ "3339 Götter" im Hinduismus
- ▶ Weltalter: 311 000 000 000 000 000 000 Jahre.

Für die Notation wichtig: Positionen entsprechen Zehnerpotenzen.

2357: 2 mal 1000 + 3 mal 100 + 5 mal 10 + 7.

3034: 3 mal 1000 + 0 mal 100 + 3 mal 10 + 4.

Die Inder erfanden die Null. Positionssystem nach 600 n.Chr. bereits weit verbreitet.

Rechnen mit 0 und negativen Zahlen bei **Brahmagupta** (598-668).  
Erste "erhaltene" Null: Gwalior-Inschrift ca. 870.

Die Araber übernahmen die "indischen" Zahlen. Arab. *sifr* = "Null". Daraus wurde in Europa *cifra* für "Null" und/oder "Ziffer". Später *zero* (engl., franz., ital.) für "Null". Auch "Cypher" (engl.) oder "Chiffre" (franz.) für Geheimschrift.

(Mehr Details in Wußing: "6000 Jahre..." Kap.2)

Europäisch	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
Arabisch-Indisch	٠	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	
Östliches Arabisch-Indisch (Persisch und Urdu)	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	
Devanagari (Hindi)	०	१	२	३	४	५	६	७	८	९	
Tamil		௦	௧	௨	௩	௪	௫	௬	௭	௮	௯

49

६.७-११

५

अ.६-१२

२०६१ भागशर वद ५ शुक्रवार

भारतीय ता. १० पौष शके १९२६

DEC.2004

ذِي الْقَعْدَةِ

31

١٨

FRIDAY

جمعة

३१-१२-२००४ भी.ता. २० जिलकाद

६.ता. १८ जिलकाद १४२५ हि.

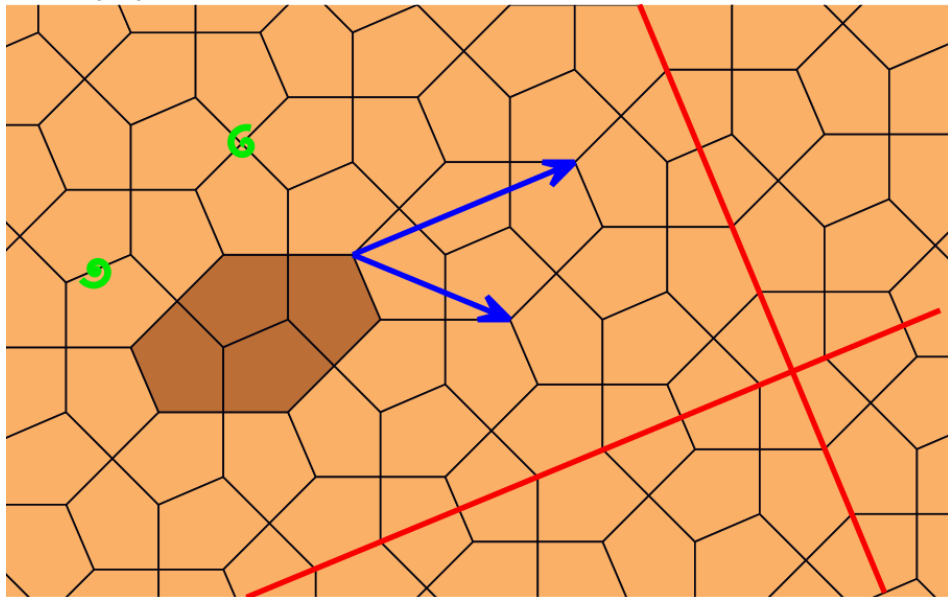
Neben den Errungenschaften in **Geometrie** (Kegelschnitte, sphärische Trigonometrie, Kreisberechnung, ... s. Wußing Kap 5 S. 262) und **Algebra** (Lösen kubischer Gleichungen...) und dem Überliefern der **indischen Zahlen** ist ein weiteres eindrucksvolles Erbe der frühislamischen Welt ihre Ornamentik. Ist das Mathematik oder Kunst? Oder beides?

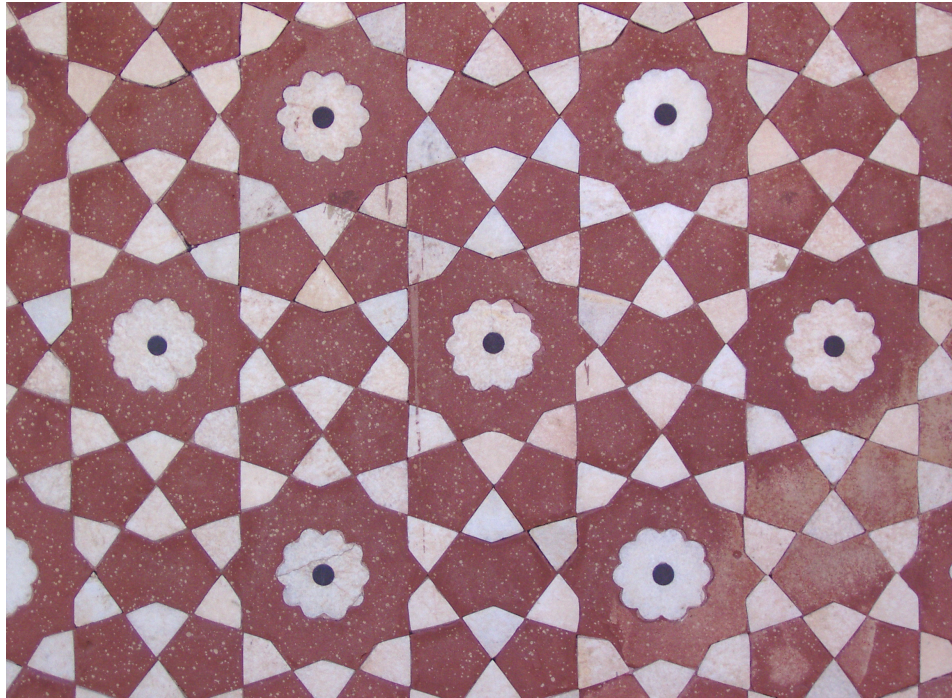






frame



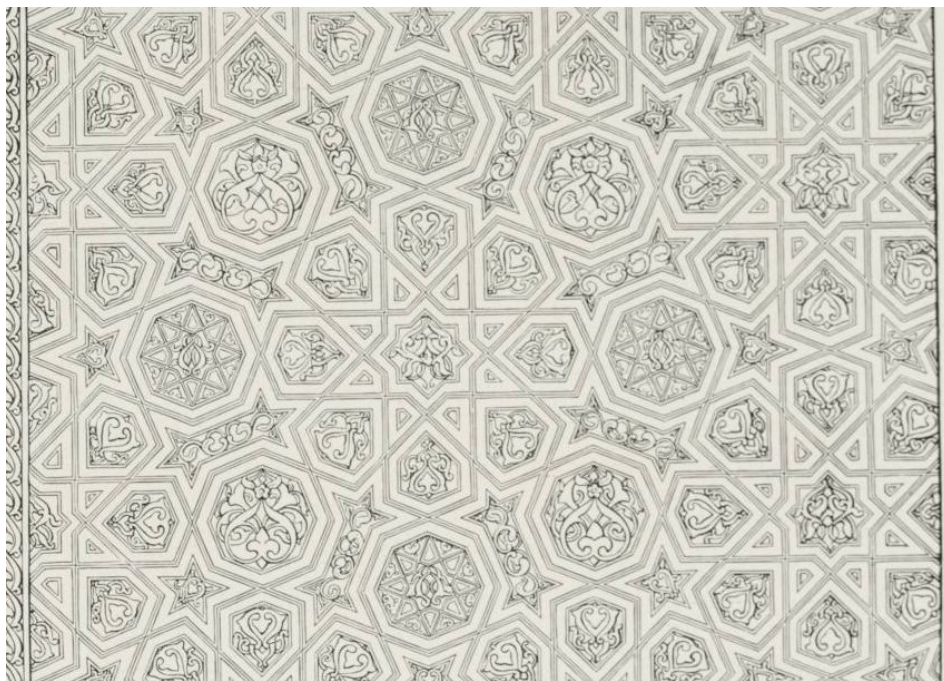








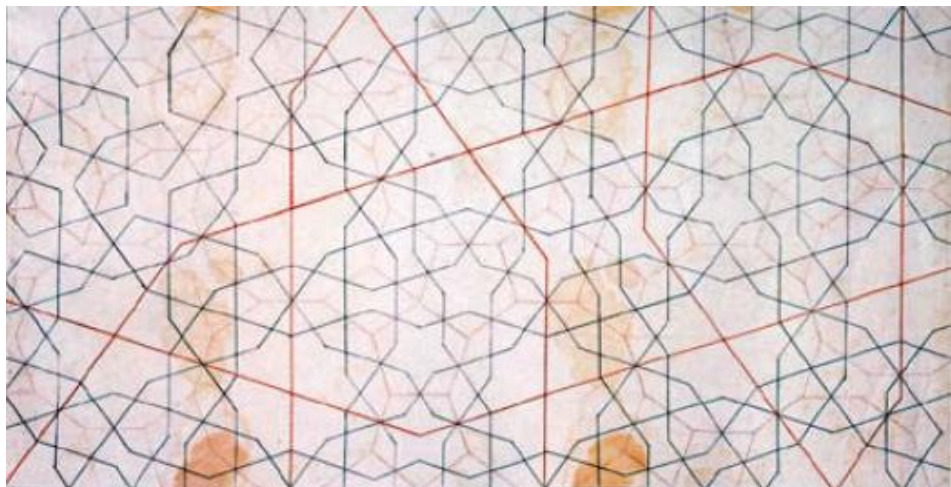












Inzwischen, in Europa, im finsternen Mittelalter...



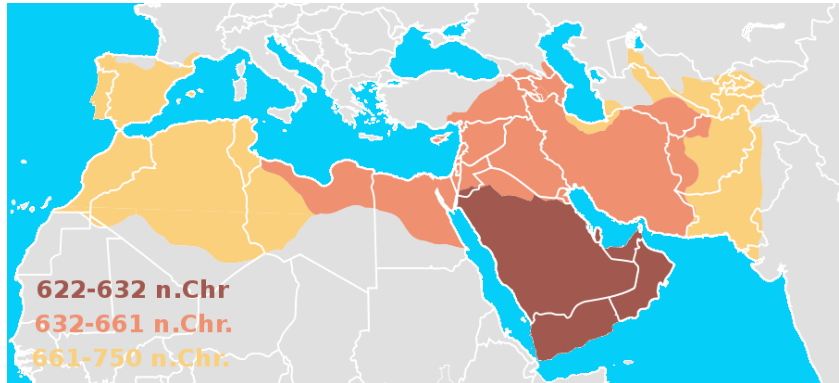
### Europa im Mittelalter (ca. 500-1500):

- ▶ bis etwa 900 n.Chr.: nicht viel.
- ▶ ab etwa 1000 n.Chr.: Gotik, Städte, Universitäten
- ▶ aber auch: Mongolen, Pest, Kriege

Im Wesentlichen Bewahrung des Wissens der Antike, wenig Neues in der Wissenschaft.

Nur wenig des antiken mathematischen Wissens ist erhalten.  
Ab etwa 1000 (sehr grob) gibt es indische Zahlen. Euklid wird aus dem Arabischen übersetzt.

Neue Entwicklungen gehen gegen Mitte/Ende des Mittelalters oft von Italien aus (reiche Städte, Handel mit Asien...)





Vor allem aber: indische Zahlen und wie man damit rechnet.

Auch: die Null, sowie negative Zahlen!

## **Fibonacci's Geldbörsenproblem**

*"Ich werde zeigen, dass dieses Problem unlösbar ist, wenn nicht zugelassen wird, dass der erste Partner Schulden hat."*

Vier Leute, Nr. 1, 2, 3 und 4, finden eine Geldbörse. Sie teilen den Inhalt fair (jeder gleichviel) unter sich auf. Anschließend hat Nr 1 doppelt so viel Geld wie Nr 2 und 3 vorher zusammen, Nr 2 hat hinterher dreimal so viel Geld wie Nr 3 und 4 zusammen vorher hatten, Nr 3 hat hinterher viermal so viel Geld wie Nr 4 und 1 zusammen vorher hatten, und Nr 4 hat hinterher fünfmal so viel Geld wie Nr 1 und 2 zusammen vorher hatten.

# Universitäten in Europa bis zum Anfang des 16. Jahrhunderts

- Universität gegründet
- vor 1200
  - 1201–1300
  - 1301–1350
  - 1351–1400
  - 1401–1450
  - 1451–Anfang des 16. Jh.

- ⊕ Universität zeitweilig  
 → Ortswechsel  
 (1254) Jahr der Gründung bzw. des Erlärschens
- 0 100 200 500 km

- MO = Modena (13.–14. Jh)  
 PC = Piacenza (1248–1402)  
 PR = Parma (14.–15. Jh/1512)  
 PV = Pavia (1361)  
 RE = Reggio (13.–14. Jh)



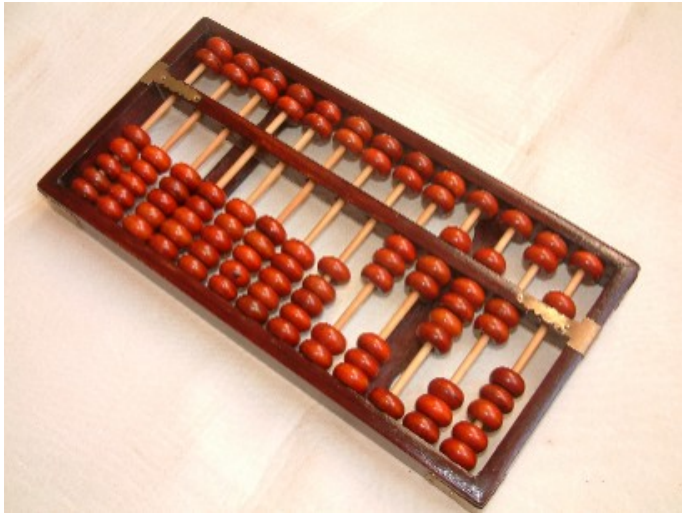
Fast niemand konnte damals auch nur elementare Rechnungen ausführen.

Daher wurde Rechenmeister (ital.: *Maestro d'abbaco*, später im Englischen: *computer*) ein wichtiger Beruf.

- ▶ Geldgeschäfte
- ▶ Umrechnung von Währungen und Maßeinheiten
- ▶ Zinsrechnung
- ▶ Buchführung usw.

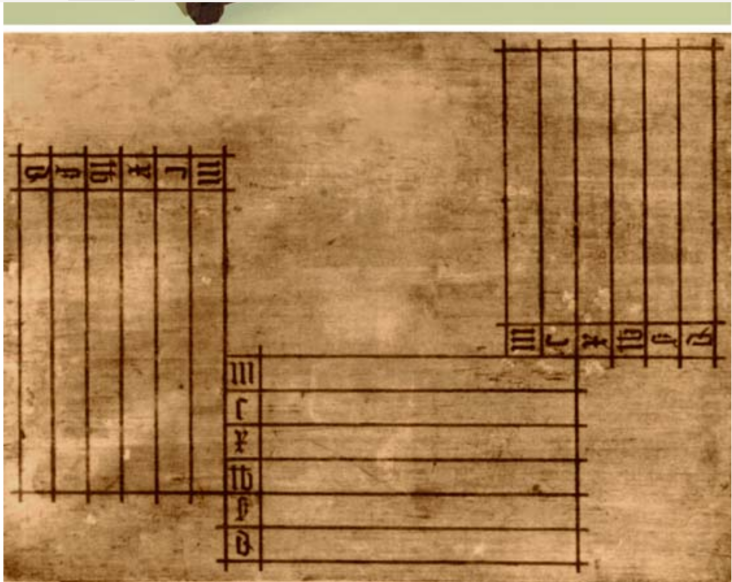
Diesen Beruf konnte man lernen. Es gab Rechenschulen und Rechenbücher. Gelehrt wurde zunächst Rechnen mit römischen Zahlen und mit dem Abakus.

Nur langsam setzte sich das heutige Rechnen mit indischen Zahlen von Italien aus gegen Abakus und Rechenbrett durch.











Frühes Beispiel: **Leonardo von Pisa** (“Fibonacci”) und sein *Liber Abbaci*.

Späteres Beispiel: **Adam Ries** (“Adam Riese”, 1492–1559)



Abb. 7.6.2 Adam Ries (BRD 1992)

Bekannt weniger wegen neuer mathematischer Resultate, eher wegen der weiten Verbreitung seines deutschsprachigen (!) Rechenbuchs.

Rechnung auff der linihen  
gemacht durch Adam Riesen vonn Staffel/  
feyn/ in massen man es pflegt zu lern in allen  
rechenschulen grundlich begriffen anno 1518.  
vleysiglich vberlesen/ vnd zum andern mall  
in trugk vorfertiget.



Druck zu Wessfordt zum  
Schwarzen Horn.  
1525

# Rechnung auff der Lini

en vnd Federn / Auff allerley Hand  
tierung / Gemacht durch  
Adam Rysen.

¶ Zum andern mal corrigiert  
vnd gemehret.

# Der ware Proceß vnd

Kürzist weg / Vñ vier vnd Wechsellütten zu mach  
en auß dem Quadrat / Durch die Arithmeti vñ  
Geometri. Von Erhardo Helm / Mathe  
matico zu franckfurt / beschriben.



Zu Franckfurt, Bei Christian Begenolp.

Abb. 7.6.4 Titelblatt des zweiten Rechenbuches *Rechnung auff der Linien vnd*

## Rechenbüchlin

### Proba.

Durch die erste Prob/ medir die vnder zahl/  
kompt die ober wider/ so ist es recht. Aber mit 9.  
wirff oben hinweg / als offt du magst/ was blei-  
bet/ duplir. Namb auch 9. hinweg/ ob du magst/  
Wirdt dann von der vndern zahl auch so viel/  
so hastu ihm recht gethan.

## Medirn

Ehret wie du ein zahl halb machen solt. Thu  
ihm also: Schreib dieselbige für dich/ mach  
ein linien darunder/heb an zu hinderst/ das ist  
an der eussersten Figur gegen der lincken handt.  
Ist dieselbig Figur gerad / so setz den halben theil  
vnden. Ist sie vngerad / als 9. so sprich / halb 8.  
macht 4. die setz das vberig/ als 1. medir mit  
der nechsten Figur gegen der rechten Handt/  
wirdt für zehen gerechnet/ Kompt aber 1. in der  
mitte zu mediren / so schreib ein 0. gleich darun-  
der/ vnd medir alsdann mit der nechsten/ Als  
folgende Exempel außweisen.

$$\begin{array}{r} 8642 \quad 78976 \quad 68174 \\ \hline 4321 \quad 39488 \quad 34087 \end{array}$$

### Proba.

Durch die erste Prob duplir die ander zahl/  
so kompt die ober wider. Aber mit der andern/  
als

## Adam Risen.

12

als 9. nimb die Prob von der vndern / duplir  
die / wirff 9. hinweg so offt du magst. Kompt  
dann von der obern auch so viel als vberbleibet/  
so hastu ihm recht gethan.

## Multiplicirn

Ehret viel machen / Must auch forn anhe-  
ben/ vnd vor allen dingen das Ein mal ein/  
aufwendig lehrnē / wie vorhin angezeigt/ Dder  
machs nach folgenden zwoen Regeln.

### Die Erst.

Addir zusamen die zwo Figuren/ die kleinste  
schreib/ Als dann multiplicir mit einander wie  
viel von jeder bis auff zehen gebracht/ vnd schrei-  
be dasselbig für die gefagte Figur. Kompt aber  
auß dem multipliciren ein zahl mit zwoen Fi-  
guren/ so addir die ander Figur zur gefagten/ als  
hie in folgenden Exempeln.

8. 2	7. 3	6. 4	6. 4
8. 1	8. 2	8. 2	7. 3
7 2	5 6	4 8	4 2

### Die Ander.

Setz für die kleiner ein 0. Als 7. mal 8. also:  
70. Vnd nimb darvon was da kompt auß der  
kleinern gemultiplicirt mit den vberigen / so  
die grösser von 10. genommen wirdt/ als hie.

W iij rium:

Dann, etwa ab dem 15. Jhdt:

- ▶ Gesellschaftliche Umbrüche:
  - ▶ Reformation, Bauernaufstände
  - ▶ Erstarben des Bürgertums (Hanse)
- ▶ Buchdruck (u.a. Verbreitung der Werke von Apollonius, Archimedes, Euklid...)
- ▶ Rückbesinnung auf die Antike
- ▶ Neuer Bedarf an Mathematik: Seefahrt, Geschütze, Wirtschaft, Kunst

