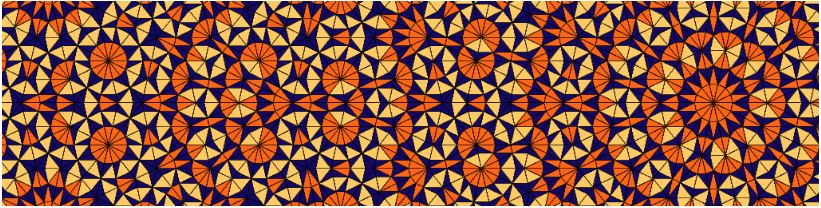
Panorama der Mathematik und Informatik

6: Don Knuth I

Dirk Frettlöh
Technische Fakultät / richtig einsteigen



Don Knuth

Donald Ervin “Don” Knuth (geb. 10.1.1938, Milwaukee, USA)

- 1956 Aufnahme des Physikstudiums am CalTech
- Bachelor und Master in Mathe 1960
- PhD (engl. für “Dr”) in Mathe 1963
- Schrieb während des Studiums einen verbesserten Assembler und Compiler für den IBM 650...
- ...und ein Programm zur Verbesserung der Basketballmannschaft

Über 100 Fachartikel zu Informatik und Mathe, etliche zu anderen Themen (Sprache, Schriftsatz, Religion), viele Bücher.
Hirsch-index 28.

Themen insbesondere Analyse von Algorithmen, exakte Beweise für die Laufzeit von Algorithmen.

Knuth begann 1963 *The Art of Computer Programming*.

"It was a totally new field, [...] with no real identity. And the standard of available publications was not that high. A lot of the papers coming out were quite simply wrong. [...] So one of my motivations was to put straight a story that had been very badly told."

Zuerst geplant war ein Buch, später eine sechs-, dann eine siebenbändige Reihe.

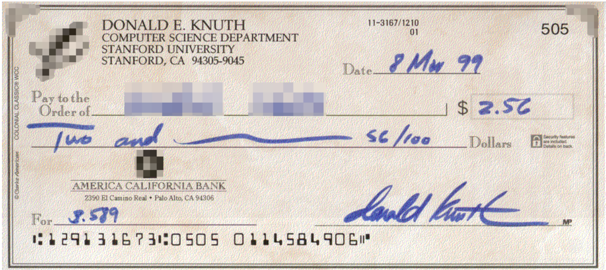
Band 1 erschien 1968, Band 2 1969, Band 3 1973.

Teil A von Band 4 erschien 2011.
Teil B teilweise als Download erhältlich.

Teil 5 ist für 2020 geplant.

Beispiele für Knuths schrägen Humor:

- In Band 1, Index:
  - “Circular definition: see definition, circular”
  - “Definition, circular: see circular definition”
- Wer einen Fehler in TAOCP findet, bekommt 2,56 US\$ (16^2 Cent = ein hexadezimaler Dollar, "100" in hexadez.)
- Früher als echten Scheck, heute als Scheck der “Bank von San Serriffe”
- “Beware of bugs in the above code; I have only proved it correct, not tried it.”



Knuth's Homepage: `http://cs.stanford.edu/~uno`

TeX schrieb er, weil er mit dem Schriftsatz ("Fotosatz", neue Drucktechnik) der Neuauflage von Band 2 von TAOCP unzufrieden war (1976).

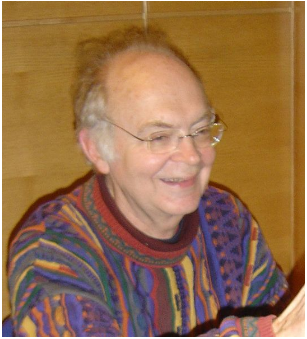
"The first goal was quality: we wanted to produce documents that were not just nice, but actually the best. [...] The second major goal was archival: to create systems that would be independent of changes in printing technology as much as possible. [...] I wanted to design something that would be still usable in 100 years."

Knuth lernte sehr viel über Schriftsatz und -typen.
1986 war TEX (nach 9 Jahren) fertig.
Seitdem hat sich es als Standard für viele wiss. Texte durchgesetzt.

Heute benutzt man LATEX(Lamport-TEX), eine benutzerfreundlichere Version (i. Wes. Makros: documentclass, section, bibliography...).

Dazu entwickelte Knuth eine eigene *Schriftfamilie*, “Computer Modern”.

Don Knuths Arbeiten



- Rechnerarchitektur: RISC-Befehlssatz MIX, MMIX
- Programmiersprache: WEB, CWEB
- Computerschriftsatz: $\TeX$, METAFONT, Computer modern
- Programmierung: *The Art of Computer Programming*
- Analyse von Algorithmen: Avg.-Case und Worst-Case Laufzeit
- Diskrete Mathematik: Kombinatorik, Graphentheorie, Zahlentheorie, Algebra

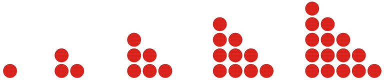
Eine Arbeit von Don Knuth soll jetzt im Detail vorgestellt und eingeordnet werden. Dazu müssen wir etwas ausholen...

Kombinatorik: Dinge zählen.

Bsp.: In wie viele Teile kann eine Pizza mit n geraden Schnitten höchstens geteilt werden?

Schnitte	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Teile	2	4	7	11	16	22	29	37	46	56	67	79	92	106

Man kann zeigen: n Schnitte, $\frac{n(n+1)}{2} + 1$ Teile $= \binom{n+1}{2} + 1$ Teile.

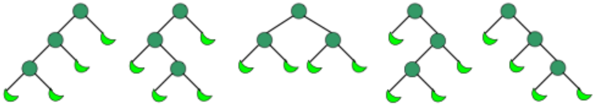
Die $\binom{n+1}{2}$ heißen **Dreieckszahlen**: 

Bsp.: Anzahl der Möglichkeiten, ein Produkt mit $n+1$ Faktoren (sinnvoll !) zu klammern:

$$2 \cdot (3 \cdot ((4 \cdot 5) \cdot 6)), \quad 2 \cdot (3 \cdot (4 \cdot (5 \cdot 6)), \quad (2 \cdot 3) \cdot ((4 \cdot 5) \cdot 6)), \ldots$$

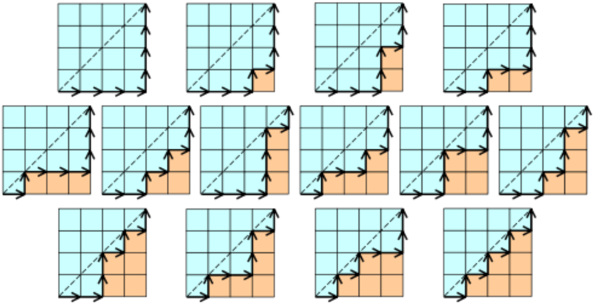
n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Mögl.	1	2	5	14	42	132	429	1430	4862	16796

Bsp.: Anzahl der binären Wurzelbäume mit $n+1$ Blättern
(kein Knoten hat nur einen Nachfolger, rechts $\neq$ links)



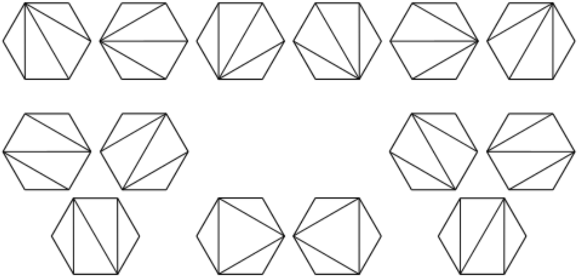
n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Mögl.	1	2	5	14	42	132	429	1430	4862	16796

Bsp.: Anzahl der monotonen Wege in einem $n \times n$-Quadrat von unten links nach oben rechts, die nie die Diagonale überschreiten.



n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Mögl.	1	2	5	14	42	132	429	1430	4862	16796

Bsp.: Anzahl der Möglichkeiten, ein $n+2$-Eck mit geraden Schnitten (nur von Ecke zu Ecke) in Dreiecke zu zerteilen.



n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Mögl.	1	2	5	14	42	132	429	1430	4862	16796

Die Zahlen aus den letzten vier Beispielen heißen **Catalan-Zahlen**.

Exercise 6.19 in

Richard P. Stanley: *Enumerative combinatorics* Band 2, Cambridge University Press 1999

listet 66 Zählprobleme auf, die als Lösung die Catalanzahlen haben.

(Im Netz: Fortsetzung, 141 weitere Zählprobleme, deren Lösung die Catalanzahlen sind)

Online Encyclopedia of Integer Sequences

`oeis.org`

Zeigen:

- Fibonaccizahlen
- Catalanzahlen
- Kolakoski
- 1,2,3,4,5,6,7,8,9
- 1,1,4,7,19,40,97,217,508

April 2015: ungefähr 250 000 Einträge

Bei solchen **kombinatorischen** Problemen sucht man:

- Rekursionsgleichung (gut)
- Erzeugende Funktion (besser)
- Geschlossene Formel (am besten)

Catalanzahlen: Rekursion:

$$c_n = c_0 c_{n-1} + c_1 c_{n-2} + \cdots + c_{n-1} c_0, \quad c_0 = 1,\ c_1 = 1.$$

Erzeugende Funktion:

$$C(x) = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - 4x}}$$

Geschlossene Formel:[1]

$$c_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n+1)!\, n!} = \prod_{k=2}^{n} \frac{n+k}{k}$$

[1] etwas, wo nur n eingesetzt werden muss