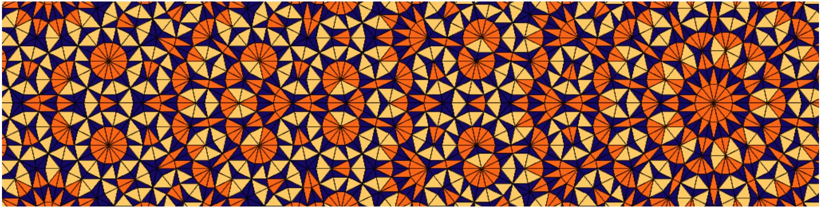
Panorama der Mathematik und Informatik

8: Don Knuth III / Ramseytheorie

Dirk Frettlöh
Technische Fakultät



Eine Arbeit von Don Knuth wurde letzte Stunde im Detail vorgestellt und eingeordnet:

Donald E. Knuth: The Toilet Paper Problem, *The American Mathematical Monthly* 91 (1984) 465-470

Knuth zählt das Toilet Paper Paper zu "Analyse von Algorithmen".

Er hat auch ein paar Bezeichnungen propagiert:

- "Big-Oh" Notation: $O(n \log n)$, $o(n), \ldots$
- $\lfloor x \rfloor$, $\lceil x \rceil$
- $[x^n]f(z)$: Koeffizient von x^n in der Potenzreihe von f
- Arrow Notation für hohe Zahlen.

Ein sehr lesenswertes Mathebuch:

R. Graham, D. Knuth, O. Patashnik: Concrete Mathematics

Arrow Notation

Multiplikation: wiederholte Addition:

$$a \times b \quad = \quad \underbrace{a + a + \cdots + a}_{b \text{ Kopien von } a}$$

Z.B.

$$4 \times 3 \quad = \quad \underbrace{4 + 4 + 4}_{3 \text{ Kopien von } 4} \quad = \quad 12$$

Arrow Notation

Multiplikation: wiederholte Addition:

$$a \times b \quad = \quad \underbrace{a + a + \cdots + a}_{b \text{ Kopien von } a}$$

Z.B.

$$4 \times 3 \quad = \quad \underbrace{4 + 4 + 4}_{3 \text{ Kopien von } 4} \quad = \quad 12$$

Potenzen: wiederholte Multiplikation:

$$a \uparrow b = a^b = \quad \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{b \text{ Kopien von } a}$$

Z.B.

$$4 \uparrow 3 = 4^3 = \quad \underbrace{4 \times 4 \times 4}_{3 \text{ Kopien von } 4} \quad = \quad 64$$

Nächster Schritt:

$$a \uparrow\uparrow b = \underbrace{a^{a^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{a}}}}}}_{b \text{ Kopien von } a} = \underbrace{a \uparrow (a \uparrow (\ldots \uparrow a))}_{b \text{ Kopien von } a}$$

Z.B.

$$4 \uparrow\uparrow 3 = \underbrace{4^{4^{4}}}_{3 \text{ Kopien von } 4} = \underbrace{4 \uparrow (4 \uparrow 4)}_{3 \text{ Kopien von } 4} = 4^{256} \approx 10^{154}$$

Wächst sehr schnell, besonders in b. Bsp:

$$3 \uparrow\uparrow 2 = 3^3 = 27$$

Wächst sehr schnell, besonders in b. Bsp:

$$3 \uparrow\uparrow 2 = 3^3 = 27$$

$$3 \uparrow\uparrow 3 = 3^{3^3} = 3^{27} = 7\,625\,597\,484\,987$$

Wächst sehr schnell, besonders in b. Bsp:

$$3 \uparrow\uparrow 2 = 3^3 = 27$$

$$3 \uparrow\uparrow 3 = 3^{3^3} = 3^{27} = 7\,625\,597\,484\,987$$

$$3 \uparrow\uparrow 4 = 3^{3^{3^3}} = 3^{3^{27}} = 3^{7625597484987} \approx 1.2580143 \times 10^{3638334640024}$$

Wächst sehr schnell, besonders in b. Bsp:

$$3 \uparrow\uparrow 2 = 3^3 = 27$$

$$3 \uparrow\uparrow 3 = 3^{3^3} = 3^{27} = 7\,625\,597\,484\,987$$

$$3 \uparrow\uparrow 4 = 3^{3^{3^3}} = 3^{3^{27}} = 3^{7625597484987} \approx 1.2580143 \times 10^{3638334640024}$$

$$3 \uparrow\uparrow 5 = 3^{3^{3^{3^3}}} = 3^{3^{3^{27}}} = 3^{3^{7625597484987}}$$

Wächst sehr schnell, besonders in b. Bsp:

$$3 \uparrow\uparrow 2 = 3^3 = 27$$

$$3 \uparrow\uparrow 3 = 3^{3^3} = 3^{27} = 7\,625\,597\,484\,987$$

$$3 \uparrow\uparrow 4 = 3^{3^{3^3}} = 3^{3^{27}} = 3^{7625597484987} \approx 1.2580143 \times 10^{3638334640024}$$

$$3 \uparrow\uparrow 5 = 3^{3^{3^{3^3}}} = 3^{3^{3^{27}}} = 3^{3^{7625597484987}}$$

Knuth erweiterte dies zu

$$a \uparrow\uparrow\uparrow b = \underbrace{a \uparrow\uparrow (a \uparrow\uparrow (\ldots \uparrow\uparrow a))}_{b \text{ Kopien von } a}$$

und zu

$$a \uparrow\uparrow\uparrow\uparrow b = \underbrace{a \uparrow\uparrow\uparrow (a \uparrow\uparrow\uparrow (\ldots \uparrow\uparrow\uparrow a))}_{b \text{ Kopien von } a}$$

Prinzip: ein n-Pfeil-Operator steht für b Kopien des $(n-1)$-Pfeil-Operators:

$$a \underbrace{\uparrow\uparrow\ldots\uparrow}_{n} b = \underbrace{a \underbrace{\uparrow\ldots\uparrow}_{n-1} (a \underbrace{\uparrow\ldots\uparrow}_{n-1} (\ldots \underbrace{\uparrow\ldots\uparrow}_{n-1} a))}_{b \text{ Kopien von } a}$$

Prinzip: ein n-Pfeil-Operator steht für b Kopien des $(n-1)$-Pfeil-Operators:

$$a \underbrace{\uparrow\uparrow\ldots\uparrow}_{n} b = \underbrace{a \underbrace{\uparrow\ldots\uparrow}_{n-1} (a \underbrace{\uparrow\ldots\uparrow}_{n-1} (\ldots \underbrace{\uparrow\ldots\uparrow}_{n-1} a))}_{b \text{ Kopien von } a}$$

Bsp.:

$$3 \uparrow\uparrow\uparrow 2 = 3 \uparrow\uparrow 3 = 3^{3^3} = 3^{27} = 7\,625\,597\,484\,987$$

Prinzip: ein n-Pfeil-Operator steht für b Kopien des $(n-1)$-Pfeil-Operators:

$$a \underbrace{\uparrow\uparrow\ldots\uparrow}_{n} b = \underbrace{a \underbrace{\uparrow\ldots\uparrow}_{n-1} (a \underbrace{\uparrow\ldots\uparrow}_{n-1} (\ldots \underbrace{\uparrow\ldots\uparrow}_{n-1} a))}_{b \text{ Kopien von } a}$$

Bsp.:

$$3 \uparrow\uparrow\uparrow 2 = 3 \uparrow\uparrow 3 = 3^{3^3} = 3^{27} = 7\,625\,597\,484\,987$$

$$3 \uparrow\uparrow\uparrow 3 = 3 \uparrow\uparrow (3 \uparrow\uparrow 3) = 3 \uparrow\uparrow (3 \uparrow 3 \uparrow 3) = \underbrace{3 \uparrow 3 \uparrow \ldots \uparrow 3}_{3 \uparrow 3 \uparrow 3 \text{ Kopien von } 3}$$

$$= \underbrace{3 \uparrow 3 \uparrow \ldots \uparrow 3}_{7\,625\,597\,484\,987 \text{ Kopien von } 3} = \underbrace{3^{3^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{3}}}}}}}_{7\,625\,597\,484\,987}$$

Notation: $a \uparrow^n b$ steht für "a n Pfeile b".

Als Informatiker kennt man evtl die *Ackermann*-Funktion, oft durch eine Rekursion gegeben:

$$A(m,n) = \begin{cases} n+1 & \text{if } m = 0 \\ A(m-1,1) & \text{if } m > 0 \text{ and } n = 0 \\ A(m-1, A(m, n-1)) & \text{if } m > 0 \text{ and } n > 0. \end{cases}$$

Notation: $a \uparrow^n b$ steht für "a n Pfeile b".

Als Informatiker kennt man evtl die *Ackermann*-Funktion, oft durch eine Rekursion gegeben:

$$A(m,n) = \begin{cases} n+1 & \text{if } m = 0 \\ A(m-1,1) & \text{if } m > 0 \text{ and } n = 0 \\ A(m-1, A(m,n-1)) & \text{if } m > 0 \text{ and } n > 0. \end{cases}$$

Wächst extrem schnell, besonders in m. Einige Werte:

$$A(0,n) = n+1, \quad A(2,n) = 2n+3, \quad A(3,n) = 2^{n+3} - 3$$

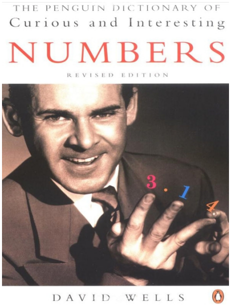
$$A(4,n) = \underbrace{2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}}_{n+3} - 3$$

Mit der Arrow-Notation: $A(m,n) = 2 \uparrow^{m-2} (n+3) - 3$.

Letzter Eintrag in "Dictionary of Curious and Interesting Numbers":

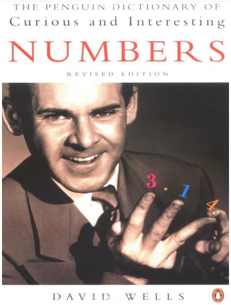
"Graham's number".

"...the largest number ever used in a serious mathematical proof." (M. Gardner 1977)



$$2 \uparrow^{(2\uparrow^{(2\uparrow^{(2\uparrow^{(2\uparrow^{(2\uparrow^{12}3)}3)}3)}3)}3)}3)} 3$$

Letzter Eintrag in "Dictionary of Curious and Interesting Numbers":



"Graham's number".

"...the largest number ever used in a serious mathematical proof." (M. Gardner 1977)

$$2 \uparrow^{(2\uparrow^{(2\uparrow^{(2\uparrow^{(2\uparrow^{(2\uparrow^{(2\uparrow^{12} 3)} 3)} 3)} 3)} 3)} 3)} 3$$

Dies ist die Zahl, die wirklich im Beweis vorkommt. Im "Dictionary" steht da eine andere Zahl. (Siehe wikipedia: Graham's number)

Ron Graham fand, diese Zahl sei einfacher zu erklären:

$$G = \left.\begin{matrix} 3\underbrace{\uparrow\uparrow\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\uparrow}3 \\ 3\underbrace{\uparrow\uparrow\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\uparrow}3 \\ \underbrace{\qquad\qquad\vdots\qquad\qquad} \\ 3\underbrace{\uparrow\uparrow\cdots\cdots\uparrow}3 \\ 3\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow 3 \end{matrix}\right\} \text{64 layers}$$

bzw.

$$G = g_{64},\ \text{where } g_1 = 3\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow 3,\ g_n = 3\uparrow^{g_{n-1}} 3.$$

Diese Zahl hier ist etwas (?) größer.

(Auch interessant: Eintrag 51 im Dictionary)

Ramsey-Theorie

Graham's number taucht in *Ramseytheorie* auf. Ein Zweig der Kombinatorik. Typische Frage:

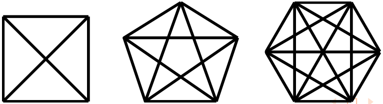
"Wie viele Elemente müssen innerhalb einer Struktur vorhanden sein, um eine bestimmte Eigenschaft zu garantieren?"
Exakte Antwort oft sehr schwierig, daher obere (und untere) Schranken.

Ramsey-Theorie

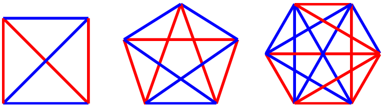
Graham's number taucht in *Ramseytheorie* auf. Ein Zweig der Kombinatorik. Typische Frage:

"Wie viele Elemente müssen innerhalb einer Struktur vorhanden sein, um eine bestimmte Eigenschaft zu garantieren?"
Exakte Antwort oft sehr schwierig, daher obere (und untere) Schranken.

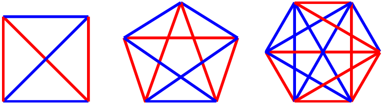
Simples Bsp: Vollständiger Graph mit a Ecken, Kanten entweder blau oder rot. Ab welchem a findet sich **garantiert** ein einfarbiges Dreieck? (dessen Ecken Knoten des Graphen sind) Bzw als **Party-Problem**: Wieviel Leute müssen auf einer Party sein, so dass sich garantiert entweder 3 Leute gegenseitig kennen, oder 3 Leute sich gegenseitig nicht kennen.



Man kann zeigen: Ab $n = 6$ kommt garantiert ein einfarbiges Dreieck vor.



Man kann zeigen: Ab $n = 6$ kommt garantiert ein einfarbiges Dreieck vor.



Was ist mit "4" statt "3"? Wieviel Punkte brauche ich, damit garantiert ein einfarbiger ⊠ vorkommt? Was ist mit "5" oder "6"?

n	1	2	3	4	5	6	7
$a(n)$	1	2	6	18	$43 - 49$	$102 - 165$	?

Anderes Beispiel:

Happy Ending Problem: Welche Zahl $a(n)$ an Punkten in der Ebene $\mathbb{R}^2$ (keine drei auf einer Geraden) brauchen wir, damit wir garantiert darunter die Ecken eines konvexen n-Ecks finden?

Anderes Beispiel:

Happy Ending Problem: Welche Zahl $a(n)$ an Punkten in der Ebene $\mathbb{R}^2$ (keine drei auf einer Geraden) brauchen wir, damit wir garantiert darunter die Ecken eines konvexen n-Ecks finden?

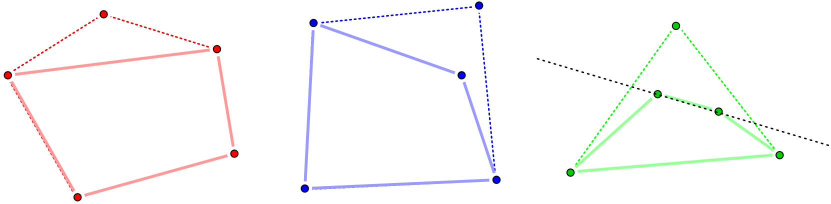
Für $n = 3$: $a(3) = 3$ (Drei Punkte wie oben bilden immer ein Dreieck).

Anderes Beispiel:

Happy Ending Problem: Welche Zahl $a(n)$ an Punkten in der Ebene $\mathbb{R}^2$ (keine drei auf einer Geraden) brauchen wir, damit wir garantiert darunter die Ecken eines konvexen n-Ecks finden?

Für $n = 3$: $a(3) = 3$ (Drei Punkte wie oben bilden immer ein Dreieck).

Für $n = 4$: $a(4) = 5$. Denn:

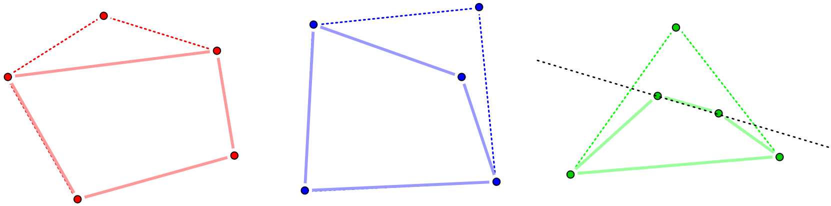


Anderes Beispiel:

Happy Ending Problem: Welche Zahl $a(n)$ an Punkten in der Ebene $\mathbb{R}^2$ (keine drei auf einer Geraden) brauchen wir, damit wir garantiert darunter die Ecken eines konvexen n-Ecks finden?

Für $n = 3$: $a(3) = 3$ (Drei Punkte wie oben bilden immer ein Dreieck).

Für $n = 4$: $a(4) = 5$. Denn:



$a(5) = 9$, $a(6) = 17$. Rest unbekannt (aber immer endlich)

Anderes Beispiel:

Wieviele Zahlen $W(2,3)$ brauchen wir, damit in jeder Einfärbung der Zahlen $1, 2, 3, \ldots, W(2,3)$ mit **zwei** Farben garantiert **drei** Zahlen $k, k+\ell, k+2\ell$ von gleicher Farbe sind?

$W(2,3) > 8$, denn: **1 2 3 4 5 6 7 8**

In der Tat ist $W(2,3) = 9$.

Anderes Beispiel:

Wieviele Zahlen $W(2,3)$ brauchen wir, damit in jeder Einfärbung der Zahlen $1, 2, 3, \ldots, W(2,3)$ mit **zwei** Farben garantiert **drei** Zahlen $k, k+\ell, k+2\ell$ von gleicher Farbe sind?

$W(2,3) > 8$, denn: **1 2 3 4 5 6 7 8**

In der Tat ist $W(2,3) = 9$.

Wieviele Zahlen $W(3,3)$ brauchen wir, damit in jeder Einfärbung der Zahlen $1, 2, 3, \ldots, W(3,3)$ mit **drei** Farben garantiert **drei** Zahlen $k, k+\ell, k+2\ell$ von gleicher Farbe sind?

$W(3,3) > 26$, denn:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26

In der Tat ist $W(3,3) = 27$.

Analog: Wieviel Zahlen $W(r,n)$ garantieren, dass in jeder Einfärbung der Zahlen $1, 2, 3, \ldots, W(r,n)$ mit r Farben garantiert n Zahlen $k, k+\ell, k+2\ell, \ldots, k+(n-1)\ell$ von gleicher Farbe sind?

Satz von van der Waerden Für alle r, n gilt: $W(r,n) < \infty$.

Beste bekannte Schranke (T. Gowers 2001) $W(r,n) \leq 2^{2^{r^{2^{2^{n+9}}}}}$.

Wer zeigen kann, dass $W(2,n) < 2^{n^2}$, bekommt 1000 US-$ von R. Graham (Koautor von Knuth, s.o.) (echte Dollar).

Analog: Wieviel Zahlen $W(r, n)$ garantieren, dass in jeder Einfärbung der Zahlen $1, 2, 3, \ldots, W(r, n)$ mit r Farben garantiert n Zahlen $k, k + \ell, k + 2\ell, \ldots, k + (n - 1)\ell$ von gleicher Farbe sind?

Satz von van der Waerden Für alle r, n gilt: $W(r, n) < \infty$.

Beste bekannte Schranke (T. Gowers 2001) $W(r, n) \leq 2^{2^{r^{2^{2^{n+9}}}}}$.

Wer zeigen kann, dass $W(2, n) < 2^{n^2}$, bekommt 1000 US-$ von R. Graham (Koautor von Knuth, s.o.) (echte Dollar).

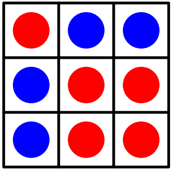
Bekannte van der Waerden-Zahlen:

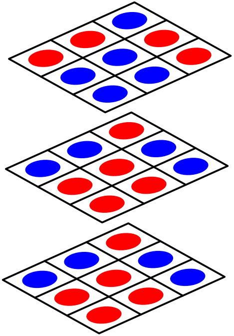
- Trivial: $W(1, n) = n$ (eine Farbe: **1 2 3 4 5 6**)
- Trivial: $W(r, 2) = r + 1$ (r Farben: **1 2 3 4 5 6**)
- $W(2, 3) = 9$, $W(3, 3) = 27$, $W(4, 3) = 76$
- $W(2, 4) = 35$, $W(3, 4) = 293$
- $W(2, 5) = 76$

Anderes Beispiel:

Hales-Jewett Theorem Für jedes n und r gibt es eine Zahl $H(r, n)$, so dass, wenn die Zellen eines $H(r, n)$-dimensionalen $n \times n \times n \times \cdots \times n$-Hyperwürfels mit r Farben gefärbt werden, eine einfarbige Reihe vorkommt.

Idee: Tic-Tac-Toe (Drei-in-einer-Reihe), also $n = 3$.
Hier: Diagonale zählen nicht.





In Dim 2 und 3 kann immer ein Unentschieden erreicht werden.

In Dim 4 nicht mehr:
Immer eine Reihe (waagerecht, senkrecht, ...) einfarbig.
(Genauer sind im Theorem manche Diagonalen erlaubt, 11 22 33 ja, 13, 22, 31 nicht.)

Aus dem Hales-Jewett-Theorem folgt van der Waerdens Theorem.

In Dim 2 und 3 kann immer ein Unentschieden erreicht werden.

In Dim 4 nicht mehr:
Immer eine Reihe (waagerecht, senkrecht, ...) einfarbig.
(Genauer sind im Theorem manche Diagonalen erlaubt, 11 22 33 ja, 13, 22, 31 nicht.)

Aus dem Hales-Jewett-Theorem folgt van der Waerdens Theorem.

Es ist überhaupt nur eine nichttriviale Hales-Jewett-Zahl bekannt:

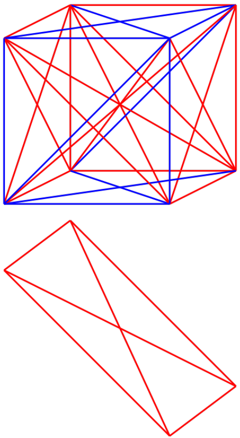
$H(2,3) = 4$. S.o. 4-dimensionales Tic-Tac-Toe auf $3 \times 3 \times 3 \times 3$-Feld mit 2 Spielern hat immer einen Sieger.

Hindman, Tressler" "The first nontrivial Hales-Jewett number is four", *Ars Combinatoria (2014) 385-390.*

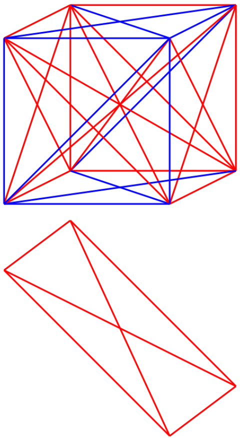
Der Satz, in dem Grahams Zahl vorkommt:

Frage:

Connect each pair of geometric vertices of an n-dimensional hypercube to obtain a complete graph on 2^n vertices. Colour each of the edges of this graph either red or blue. What is the smallest value of n for which every such colouring contains at least one single-coloured complete subgraph on four coplanar vertices?



Der Satz, in dem Grahams Zahl vorkommt:



Frage:

Connect each pair of geometric vertices of an n-dimensional hypercube to obtain a complete graph on 2^n vertices. Colour each of the edges of this graph either red or blue. What is the smallest value of n for which every such colouring contains at least one single-coloured complete subgraph on four coplanar vertices?

Graham 1971: Das gesuchte n liegt zwischen 6 und Grahams Zahl

Lavrov, Lee, Mackay 2013; Exoo 2003; Barkley 2008: Zahl liegt zwischen 13 und $2 \uparrow\uparrow 2 \uparrow\uparrow 2 \uparrow\uparrow 9$.