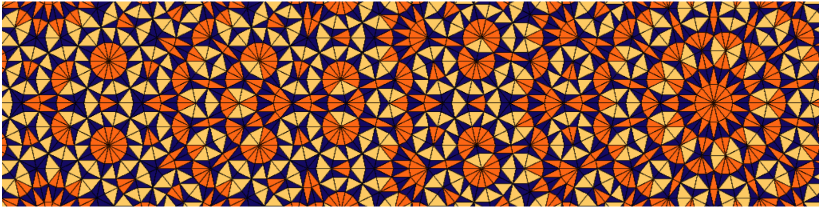
Panorama der Mathematik und Informatik

11: Geschichte VI: Der Funktionenbegriff

Dirk Frettlöh
Technische Fakultät / richtig einsteigen



Recall: Reihenfolge in Mathe I Analysis:

- Konvergenz von Folgen: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$
- Konvergenz von Reihen
- Stetige Funktionen: f stetig in $a \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$
- Differenzieren und Integrieren: Hauptsatz: $f(x) = \int f'(x)\,dx$

  bzw $f(b) - f(a) = \int\limits_a^b f'(x)\,dx$
- Potenzreihen

Geschichtliche Reihenfolge

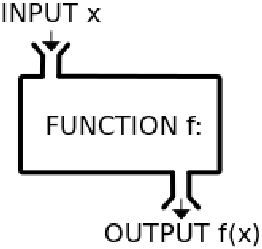
- Konvergenz von Folgen: $\lim_{n \to \infty} a_n$ .... Gauss? Cauchy?
- Konvergenz von Reihen: **Gauss** 1813
- Stetige Funktionen: **Cauchy** *Cours d'Analyse* 1821
- Differenzieren und Integrieren:

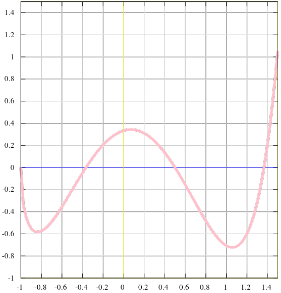
  Newton, Leibniz u.a. um 1680-1700

- Potenzreihen

...und was ist eigentlich eine Funktion?

Was ist eine Funktion?

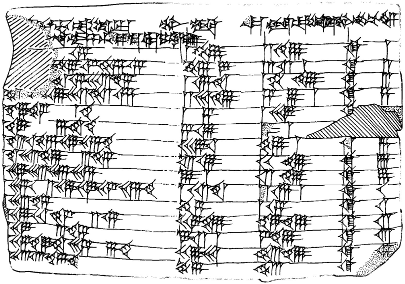




- Etwas, das "einem Funktionsgraph entspricht / ihn erzeugt"
- Eine Größe (y als "Funktion" von x)
- Eine "Maschine": Input x, Output y
  - von der reellen Achse auf die reelle Achse
  - ... von Mengen in Mengen
- ... wobei jedem x höchstens ein y zugeordnet wird
- ... oder mehrere y?

Ein langer Weg ...

- Antike: gebogene Kurven,
- geradlinig und krummlinig eingeschlossene Flächen,
- Winkel"funktionen" (Wertetabellen)
- aber: Kein Funktionsbegriff, kein Integralbegriff!

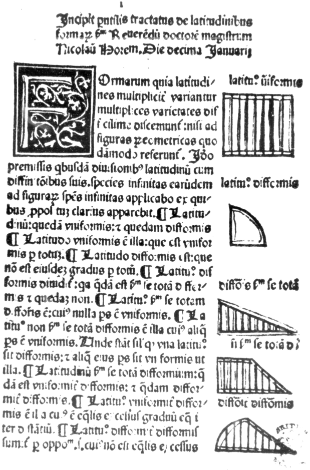


Links: Keilschrifttafel "Plimpton 322" (ca 1800 v.Chr.) Liste von pythagoräischen Tripeln $a, b, c \in \mathbb{N}$ mit $a^2 + b^2 = c^2$.

Bei Nicolaus von Oresme (1323-1382)

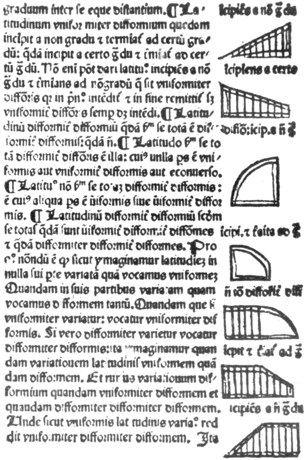
3mm]

Erste “Funktionsgraphen”:



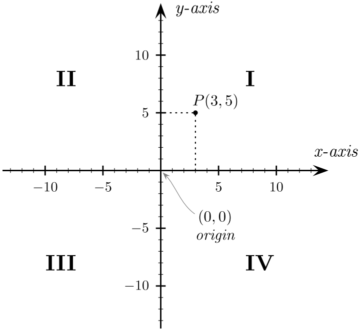
Incipit perutilis tractatus de latitudinibus formaꝝ ſm Reuerẽdũ doctorẽ magiſtrum Nicolaũ Horem. Die decima Januarij

Ormarum quia latitudines multiplicit variantur multiplices varietates difficilime discernunt nisi ad figuras geometricas quodamodo referunt. Ideo premissis quibusdam diuisionibus latitudinũ cum diffinitionibus suis. species infinitas earũdem ad figuraꝝ spẽs infinitas applicabo ex quibus ppositum clarius apparebit. Latitudinũ queda uniformis: et quedam difformis. Latitudo uniformis ẽ illa: que est unifor mis p totũ. Latitudo difformis est: que nõ est eiusdẽ gradus p totũ. Latitu difformis diuidit: qa qda est sm se totã difformis et quedaꝫ non. Latitu sm se totam difformis ẽ: cui nulla ps ẽ uniformis. Latitu non sm se totã difformis ẽ illa cui aliq ps ẽ uniformis. Unde ſtãt ſil q una latitu fit difformis: et aliq eius ps ſit uniformis ut illa. Latitudinũ sm se totã difformiũ: qda est uniformit difformis: et qdam difformit difformis. Latitu uniformit difformis ẽ illa cuius ẽ eqlis excessus graduũ eq inter distãtiũ. Latitu difformit difformis ẽ p oppõm. s. cui nõ est eqlis excessus



graduum inter se eque distantium. Latitudinum uniformiter difformium quedam incipit a non gradu et terminat ad certũ gradũ: qdã incipit a certo gdu et tmĩat ad certũ gdũ. Nõ enĩ põt dari latitu incipiẽs a nõ gdu et tmĩans ad nõ gradũ q ſit uniformiter difformis qr in pn intẽdit et in fine remittit ſꝫ uniformit diffõis semp dꝫ intẽdi. Latitudinũ difformit difformiũ qdã sm se totã ẽ difformit difformis: qdã nõ. Latitudo sm se totã difformit diffõis ẽ illa: cui nulla ps ẽ uniformis aut uniformit difformis aut econuerso. Latitu nõ sm se totaꝫ difformit difformis: ẽ cui aliqua ps ẽ uniformis siue uniformit difformis. Latitudinũ difformit difformiũ scdm se totaĩ qdã sunt uniformit difformit diffõmes et qdã difformiter difformit difformes. Pro eo nõdũ ẽ q sicut ymaginamur latitudiẽꝫ in nulla sui pte variatã quã vocamus uniformeꝫ. Quandam in suis partibus variatam quam vocamus difformem tantũ. Quandam que sẽ uniformiter variatur: vocatur uniformiter difformis. Si vero difformiter varietur vocatur difformiter difformis: ita ymaginamur quandam variationem latitudinis uniformem quandam difformem. Et rursus variationum difformium quandam uniformiter difformem et quandam difformiter difformiter difformem. Unde sicut uniformis latitudinis variatio redit uniformiter difformiter difformem. Ita

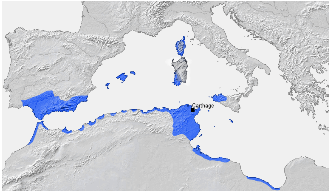
René Descartes (1596-1650): entwickelte (nahm vorweg) das **cartes**ische Koordinatensytem, also:



Auch:

- x, y, z als **Variable** (!).
- Ableiten durch Kreis (statt Tangente) an Graph.
- Sowie Schreibweise $a^2, x^4, \dots$

Problem der Dido

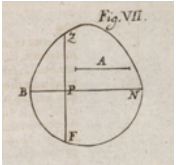


Karthago wird neunten oder achten Jahrhundert v. Chr. von phönizischen Siedlern aus Tyros gegründet. Der Sage nach von Königin Dido. Zerstört um 146 v.Chr. von den Römern.

Problem der Dido: Welche ebene Form der Fläche 1 hat den kleinsten Umfang? OK, Kreis. Klar(?) Beweis erst durch Jakob Steiner (1796-1863)

Die Brüder Bernoulli

1697: Das Isoperimetrische Problem (Problem der Dido)



Jakob (Jacques) Bernoulli (1654-1705)

Johann Bernoulli (1667-1748)

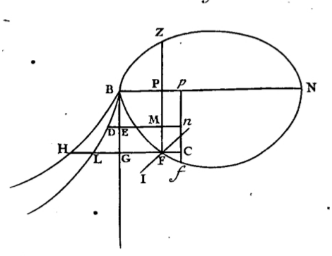
- Brüder "in Konkurrenz"
- (Noch) keine Funktion
- Statt dessen "Verhältnis" (Exponent) von PZ zu BF bzw. PF

Johann Bernoulli und die Funktion

Im Briefwechsel Leibniz – Johann Bernoulli zwischen 1694 und 1698: *functio* oder *fonction*, zunächst ohne Definition.
Johann Bernoulli über das Isoperimetrische Problem in den *Memoires de l'Académie des Sciences* (1706):

C'eſt là le Problême que feu M. Bernoulli propoſa en 1697. M. Bernoulli ſon frere qui étoit particulierement défié, non ſeulement le réſolut, mais le réſolut après l'avoir rendu encore plus general, & par conſequent plus difficile. Il changea les puiſſances des Appliquées en ce qu'il appelle *fonctions*. Les fonctions d'une Appliquée comprennent, outre toutes les puiſſances, ſoit parfaites, ſoit imparfaites, où l'on peut l'élever, toutes les multiplications ou diviſions que l'on en peut faire par des grandeurs conſtantes, ou par les Abciſſes élevées auſſi à telle puiſſance qu'on voudra ; de ſorte, par exemple , que le produit d'une Appliquée élevée au cube & d'une grandeur conſtante, diviſé par le quarré de l'Abſciſſe , eſt une fonction de l'Appliquée. Les puiſſances ne ſont qu'une eſpece dont fonction eſt le genre.

Fig. 1.re

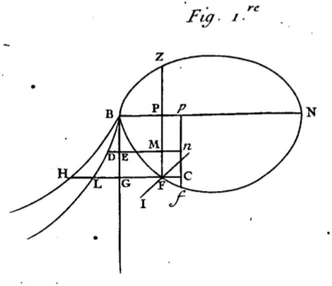


Johann Bernoulli und die Funktion

Im Briefwechsel Leibniz – Johann Bernoulli zwischen 1694 und 1698: *functio* oder *fonction*, zunächst ohne Definition.

Johann Bernoulli über das Isoperimetrische Problem in den *Memoires de l'Académie des Sciences* (1706):

Dies ist das Problem, das der verstorbene M. Bernoulli im Jahre 1697 vorgestellt hat. M. Bernoullis Bruder, an den es insbesondere adressiert war, hat es nicht nur gelöst, sondern gelöst, nachdem er es noch allgemeiner (und damit noch schwerer) formuliert hatte. Er veränderte Potenzen von Werten [Appliquées] zu etwas, was er *Funktionen* nannte. Die Funktionen von Werten umfassen, neben allen Potenzen (perfekten und nicht perfekten) alle Multiplikationen oder Divisionen mit irgendeiner Konstanten oder einer Abszisse in einer Potenz nach Wahl. So stellt beispielsweise das Produkt eines Wertes, der zum Kubus erhoben wurde, mit einer konstanten Größe, geteilt durch das Quadrat der Abszisse, eine Funktion des Wertes dar. Die Potenzen sind also nur ein Spezialfall der allgemeineren Funktionen.



Johann Bernoulli und die Funktion

1718: Zusammenfassung des Isoperimetrischen Problems durch Joh. Bernoulli. Darin folgende:

DEFINITION.

On appelle ici *Fonction* d'une grandeur variable, une quantité compoſée de quelque maniére que ce ſoit de cette grandeur variable & de conſtantes.

- Keine Unterscheidung zwischen Methode und Größe.
- Aber: Primär als Größe gedacht
- Im gleichen Aufsatz: ΦRc für Auswertung der Funktion Φ an der Stelle (Strecke) Rc.

Bisher: "Alles, was ich aus der Variable x bauen kann durch Potenz, mal Konstante, plus, geteilt, Wurzel..."

Leonard Eulers Definiton IA

Leonhard Euler (1707-1783): Schüler von Johann Bernoulli.

...einer der bedeutendsten Mathematiker. (ever!)

Geboren in Basel, wirkte in St Petersburg und Berlin.

Introductio in Analysin Infinitorum. Tomus Primus (1748):

4. *Functio quantitatis variabilis est expressio analytica quomodocunque composita ex illa quantitate variabili et numeris seu quantitatibus constantibus.*

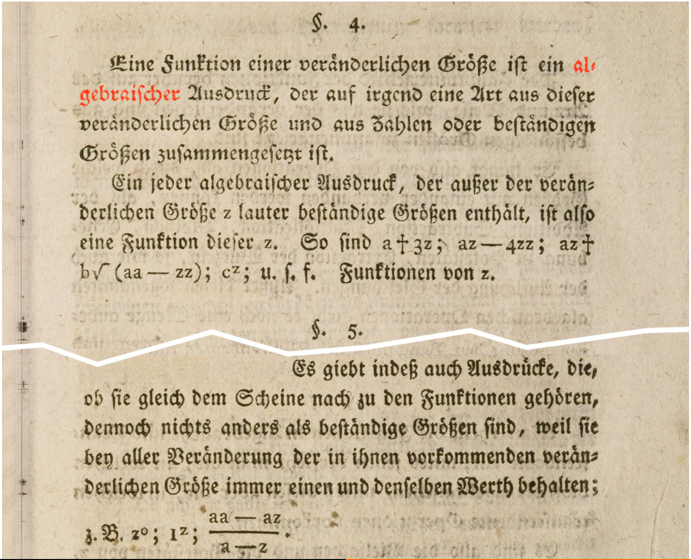
Omnis ergo expressio analytica, in qua praeter quantitatem variabilem z omnes quantitates illam expressionem componentes sunt constantes, erit functio ipsius z. Sic

$$a + 3z, \quad az - 4zz, \quad az + b\sqrt{(aa - zz)}, \quad c^z \quad \text{etc.}$$

sunt functiones ipsius z.

Leonard Eulers Definiton IA

Analysis des Unendlichen Band I (fehlerhafte Übersetzung):



§. 4.

Eine Funktion einer veränderlichen Größe ist ein algebraischer Ausdruck, der auf irgend eine Art aus dieser veränderlichen Größe und aus Zahlen oder beständigen Größen zusammengesetzt ist.

Ein jeder algebraischer Ausdruck, der außer der veränderlichen Größe z lauter beständige Größen enthält, ist also eine Funktion dieser z. So sind $a + 3z$; $az - 4zz$; $az + b\sqrt{(aa - zz)}$; c^z; u. s. f. Funktionen von z.

§. 5.

Es giebt indeß auch Ausdrücke, die, ob sie gleich dem Scheine nach zu den Funktionen gehören, dennoch nichts anders als beständige Größen sind, weil sie bey aller Veränderung der in ihnen vorkommenden veränderlichen Größe immer einen und denselben Werth behalten; z. B. z^0; 1^z; $\frac{aa - az}{a - z}$.

§. 6.

Der Hauptunterschied der Funktionen beruhet auf der Art und Weise, wie sie aus der veränderlichen und aus beständigen Größen zusammengesetzt sind.

Er hängt also von den Operationen ab, durch welche Größen mit einander verbunden werden können, als der Addition, Subtraction, Multiplication, Division, Erhebung zu Potestäten, Extraction der Wurzeln, so wie auch der Auflösung der Gleichungen. Außer diesen sogenannten algebraischen Operationen giebt es noch eine Menge anderer, welche den Beynamen der transcendenten führen, und wohin die Formation der Exponential- und der logarithmischen Größen und unzählige andere gehören, welche die Integral-Rechnung an die Hand giebt.

§. 7.

Man theilt die Funktionen in Algebraische und Transcendente ein; unter jenen versteht man die, in welchen bloß die algebraischen, unter diesen aber die, in welchen transcendente Operationen vorkommen.

Leonard Eulers Definiton IA

- Funktionen werden als algebraische Ausdrücke gedacht...
- ...die sich aber mit x verändern.
- Aber: Euler hat (in seinem Sinne) *stetige* Funktionen im Kopf, d.h. in einem geschlossenen Ausdruck formulierbare. Funktion

$$f(x) = \begin{cases} -x, & \text{falls } x \leq 0 \\ x, & \text{falls } x > 0 \end{cases}$$

ist für Euler (noch) keine Funktion.

Leonard Eulers Definiton IB

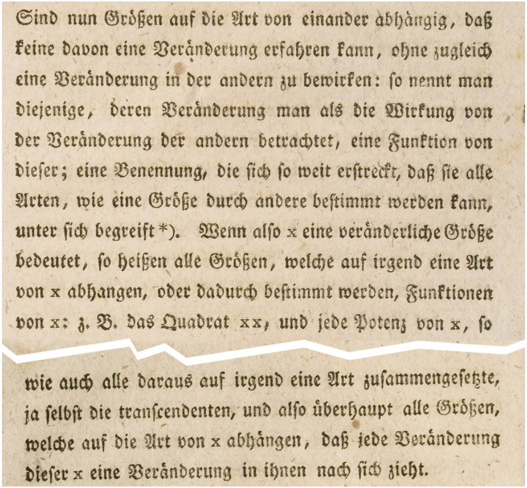
Aber: *Analysis des Unendlichen Band II* (1748):

> Es führt also jede Funktion von x auf irgend eine Linie, eine gerade entweder oder eine krumme, und umgekehrt läßt sich jede krumme Linie auf eine Funktion zurückführen.

- Ganz neue Sicht! Funktion als Graph
- Eulers Funktionen jetzt "stetig differenzierbar"
- Angeregt durch Differenzialgleichung (D'Alembert)

Leonard Eulers Definition II

Nochmals eine Wende: *Institutiones calculi differentialis* (1755):



Sind nun Größen auf die Art von einander abhängig, daß keine davon eine Veränderung erfahren kann, ohne zugleich eine Veränderung in der andern zu bewirken: ſo nennt man diejenige, deren Veränderung man als die Wirkung von der Veränderung der andern betrachtet, eine Funktion von dieſer; eine Benennung, die ſich ſo weit erſtreckt, daß ſie alle Arten, wie eine Größe durch andere beſtimmt werden kann, unter ſich begreift *). Wenn alſo x eine veränderliche Größe bedeutet, ſo heißen alle Größen, welche auf irgend eine Art von x abhangen, oder dadurch beſtimmt werden, Funktionen von x: z. B. das Quadrat xx, und jede Potenz von x, ſo

wie auch alle daraus auf irgend eine Art zuſammengeſetzte, ja ſelbſt die tranſcendenten, und alſo überhaupt alle Größen, welche auf die Art von x abhängen, daß jede Veränderung dieſer x eine Veränderung in ihnen nach ſich zieht.

- Algebraische Ausdrücke nicht nötig, um Funktion zu definieren

Andere Idee:

Bei Euler: Funktionen auch als Potenzreihen (vgl. Vorlesung 7)

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = 1 + x + x^2/2 + x^3/6 + x^4/24 + \cdots$$

Schon bei den Bernoullis: auch *trigonometrische Reihen*

$$A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos nx + B_n \sin nx).$$

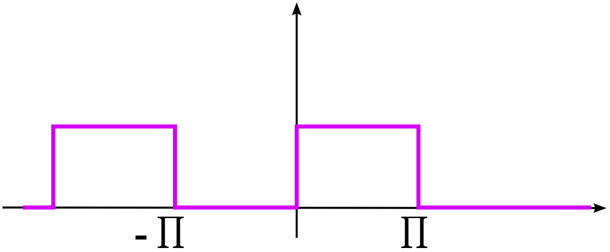
Könnte man also sagen: Funktion = Potenzreihe? Oder Funktion = trigonometrische Reihe?

Bsp:

$$f(t) = \frac{4}{\pi}\left(\sin t + \frac{1}{3}\sin 3t + \frac{1}{5}\sin 5t + \frac{1}{7}\sin 7t + \cdots\right) \qquad (1)$$

$$= \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin\left((2k-1)t\right)}{2k-1} \qquad (2)$$

Das ist die Rechtecksfunktion:

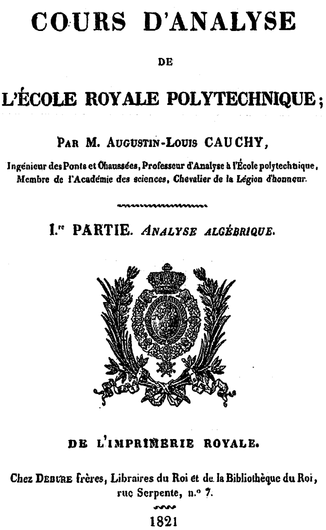


Problem: Klappt das auch wirklich, f so darzustellen? Also

- Konvergieren die Reihen?
- Wo genau?
- Was heißt hier Konvergenz?
- Welche f lassen sich darstellen? (stetige? diff-bare?)

Darum kümmerten sich nachfolgende Generationen. (Siehe auch Mathematische Methoden für Biowiss. III) Insbesondere:

Augustin Louis Cauchy (1789-1857)



COURS D'ANALYSE

DE

L'ÉCOLE ROYALE POLYTECHNIQUE;

PAR M. AUGUSTIN-LOUIS CAUCHY,

Ingénieur des Ponts et Chaussées, Professeur d'Analyse à l'École polytechnique, Membre de l'Académie des sciences, Chevalier de la Légion d'honneur.

I.re PARTIE. *ANALYSE ALGÉBRIQUE.*

DE L'IMPRIMERIE ROYALE.

Chez DEBURE frères, Libraires du Roi et de la Bibliothèque du Roi, rue Serpente, n.° 7.

1821

Augustin Louis Cauchy (1789-1857)

Allgemeine Betrachtungen über die Funktionen.

Wenn **veränderliche Zahlgrössen** in solcher Weise unter einander **zusammenhängen,** dass man aus dem gegebenen Werte von einer Veränderlichen die Werte aller übrigen herleiten kann, so denkt man sich gewöhnlich diese verschiedenen Zahlgrössen vermittelst jener einen ausgedrückt. Jene eine nimmt dann den Namen: **unabhängige Veränderliche** an, während die übrigen, die mittelst der unabhängigen Veränderlichen ausgedrückten Zahlgrössen, sogenannte **Funktionen** jener einen Veränderlichen sind.

Hier auch: **stetige** Funktionen als:
Ist a winzig (*infinitesimal*) so ist auch $f(x+a)-f(x)$ winzig.

Das heute gelehrte $\epsilon-\delta$-Kriterium:

$$\forall x \in D\, \forall \epsilon > 0\, \exists \delta > 0 : \forall y \in D : \ |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \epsilon$$

bei Bernard Bolzano (1781-1848).

En général, la fonction fx représente une suite de valeurs ou ordonnées dont chacune est arbitraire. L'abscisse x pouvant recevoir une infinité de valeurs, il y a un pareil nombre d'ordonnées fx. Toutes ont des valeurs numériques *actuelles*, ou positives, ou négatives, ou nulles. On ne suppose point que ces ordonnées soient assujetties à une loi commune; elles se succèdent d'une manière quelconque, et chacune d'elles est donnée comme le serait une seule quantité.

(1822) "Im Allgemeinen repräsentiert die Funktion fx eine Folge von Werten oder Ordinaten, von denen jeder beliebig ist. Die Abzisse x kann eine unendliche Zahl von Werten annehmen, [und] gibt es eine entsprechende Zahl von Ordinaten fx. Alle haben bestimmte Zahlenwerte, die positiv, negativ oder Null sind. Man nimmt keinesfalls an, dass diese Ordinaten einen

Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859)

§. 1.

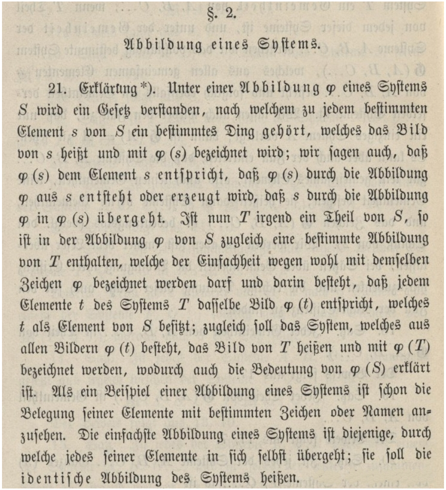
Man denke sich unter a und b zwei feste Werthe und unter x eine veränderliche Grösse, welche nach und nach alle zwischen a und b liegenden Werthe annehmen soll. Entspricht nun jedem x ein einziges, endliches y, und zwar so, dass, während x das Intervall von a bis b stetig durchläuft, $y = f(x)$ sich ebenfalls allmählich verändert, so heisst y eine stetige oder continuirliche*) Function von x für dieses Intervall. Es ist dabei gar nicht nöthig, dass y in diesem ganzen Intervalle nach demselben Gesetze von x abhängig sei, ja man braucht nicht einmal an eine durch mathematische Operationen ausdrückbare Abhängigkeit zu denken. Geometrisch dargestellt, d. h. x und y als Abscisse und Ordinate gedacht, erscheint eine stetige Function als eine zusammenhängende Curve, von der jeder zwischen a und b enthaltenen Abscisse nur ein Punkt entspricht. Diese Definition schreibt den einzelnen Theilen der Curve kein gemeinsames Gesetz vor; man kann sich dieselbe aus den verschiedenartigsten Theilen zusammengesetzt oder ganz gesetzlos gezeichnet denken. Es

*) Da im Folgenden nur von stetigen Functionen die Rede sein wird, so kann der Zusatz ohne Nachtheil wegbleiben.

Aus: *Über die Darstellung ganz willkürlicher Funktionen durch Sinus- und Cosinusreihen* (1837).

Richard Dedekind (1831-1916)

Was sind und was sollen die Zahlen (1893):



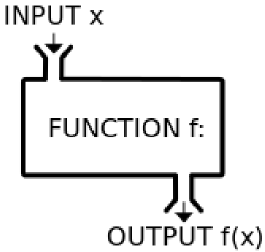
§. 2.

Abbildung eines Systems.

21. Erklärung*). Unter einer Abbildung φ eines Systems S wird ein Gesetz verstanden, nach welchem zu jedem bestimmten Element s von S ein bestimmtes Ding gehört, welches das Bild von s heißt und mit $\varphi(s)$ bezeichnet wird; wir sagen auch, daß $\varphi(s)$ dem Element s entspricht, daß $\varphi(s)$ durch die Abbildung φ aus s entsteht oder erzeugt wird, daß s durch die Abbildung φ in $\varphi(s)$ übergeht. Ist nun T irgend ein Theil von S, so ist in der Abbildung φ von S zugleich eine bestimmte Abbildung von T enthalten, welche der Einfachheit wegen wohl mit demselben Zeichen φ bezeichnet werden darf und darin besteht, daß jedem Elemente t des Systems T dasselbe Bild $\varphi(t)$ entspricht, welches t als Element von S besitzt; zugleich soll das System, welches aus allen Bildern $\varphi(t)$ besteht, das Bild von T heißen und mit $\varphi(T)$ bezeichnet werden, wodurch auch die Bedeutung von $\varphi(S)$ erklärt ist. Als ein Beispiel einer Abbildung eines Systems ist schon die Belegung seiner Elemente mit bestimmten Zeichen oder Namen anzusehen. Die einfachste Abbildung eines Systems ist diejenige, durch welche jedes seiner Elemente in sich selbst übergeht; sie soll die identische Abbildung des Systems heißen.

Dennoch dachte man lange bei “Funktion” etwa an stetige Funktion; und dass stetige Funktionen fast überall differenzierbar sind; und als trigonometrische Reihe oder Potenzreihe geschrieben werden können.

Heute:
relation between a set of inputs and a set of permissible outputs with the property that each input is related to exactly one output .



Warum so?

Böses Gegenbeispiel 1 von Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859):

$f(x) : \mathbb{R} \to [0, 1]$, definiert durch

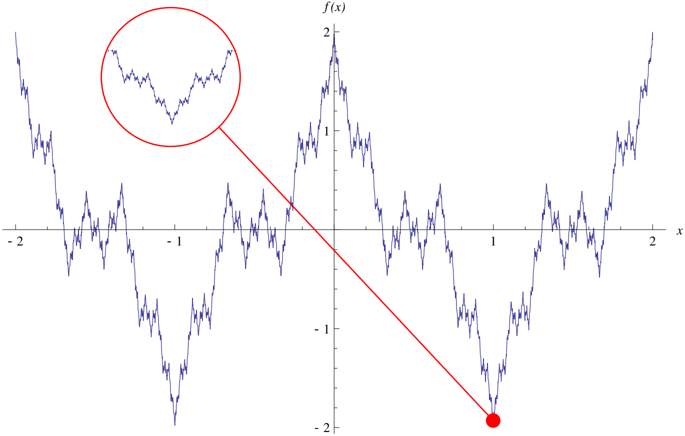
$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x \in \mathbb{Q} \\ 1, & \text{sonst.} \end{cases}$$

ist nicht als trigonometrische Reihe darstellbar (1829) (gut, und erst recht nicht stetig). Ist aber eine Funktion, die man "als algebraischen Ausdruck" hinschreiben kann:

$$f(x) = \lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} (\cos m!\pi x)^n$$

Weierstraß-Monster

Böses Gegenbeispiel 2: Karl Weierstraß (1815-1897, geb. in Ennigerloh): Eine Funktion, die überall stetig, aber nirgends differenzierbar ist: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x)$

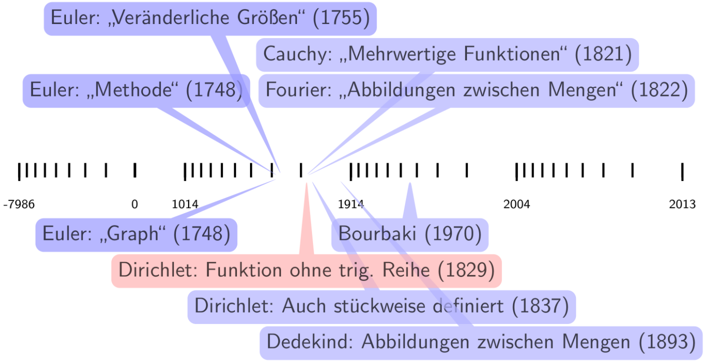


"Pathologische Sonderfälle"

"Jetzt erleben wir, wie eine ganze Masse grotesker Funktionen auftaucht, die sich alle Mühe zu geben scheinen, den anständigen Funktionen, die zu etwas nütze sind, so wenig wie möglich zu ähneln. [...] Wenn früher eine Funktion erfunden wurde, geschah dies im Hinblick auf einen praktischen Zweck; heute erfindet man sie absichtlich nur dazu, die Argumentation unserer Väter zu widerlegen, und zu etwas anderem werden sie nie taugen."

Jules Henri Poincaré (1854-1912), 1899

Übersicht Funktionen



(aus: A. Loos, G.M. Ziegler: *Panorama der Mathematik*, $\geq$ 2015)
Der “naive” Begriff (Funktion = stetig und differenzierbar, oder Funktion = algebraischer Ausdruck) wurde durch den modernen Begriff abgelöst.

Eine sehr kurze Geschichte der Mathematik

(aus: *Panorama der Mathematik*, A. Loos und G.M. Ziegler)

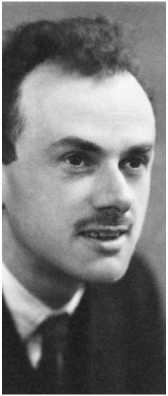
- Bis 500 v.Chr.: "Wissenschaft von den Zahlen", dominiert von praktischer Anwendung.
- 500-300 v.Chr.: Griechische Mathematik nimmt Zahlen als (Längen-)Maße wahr. Die Griechen finden einen geometrischen Blick auf die Dinge. Anwendungen sind nicht mehr der einzige Grund, um Mathematik zu studieren: Sie wird zu einer intellektuellen Beschäftigung, die religiöse und ästhetische Elemente in sich vereint.
- 17. Jahrhundert: Die Entwicklung der Differential- und Integralrechnung führte zu einem neuen, gewaltigen Schub in den Anwendungen, denn nun können erstmals nicht-statische Probleme angepackt werden. "Nach Newton und Leibniz wurde Mathematik zu einem Studium von Zahlen, Formen, Bewegung, Änderung und Raum."

Eine sehr kurze Geschichte der Mathematik

- 18./19. Jahrhundert: Die Mathematik beginnt sich in der Folge von der Physik abzulösen und zu einer eigenständigen Wissenschaft zu entwickeln, die die mathematischen Werkzeuge untersucht, die in der Zeit zuvor entwickelt wurden.
- 20. Jahrhundert: Es findet eine Wissenexplosion statt. Neue Gebiete (Kategorientheorie, Kombinatorik, Theoretische Informatik...) Manches ist *"abstract nonsense"* und wird vergessen; manches ist abstract nonsense und nützlich, manches ist von Vornherein nützlich ("Angewandte Mathematik": Optimierung, Biomathe,...).

Verallgemeinerungen I: Distributionen

- Oliver Heaviside: Ableitung der Sprungfunktion (1893)
- Paul A.M. Dirac: δ-Funktion (1920er Jahre)
- Sergei Sobolev (1908-1989) und Laurent Schwartz (1915-2002): *Theory of Distributions* (1950), Erweiterung des Differentialoperators auf Distributionen.



15. The δ function

$$\left.\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\,dx = 1 \\ \delta(x) = 0 \text{ for } x \neq 0.\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

The exact shape of the function inside this domain does not matter, provided there are no unnecessarily wild variations (for example provided the function is always of order ϵ^{-1}). Then in the limit $\epsilon \to 0$ this function will go over into $\delta(x)$.

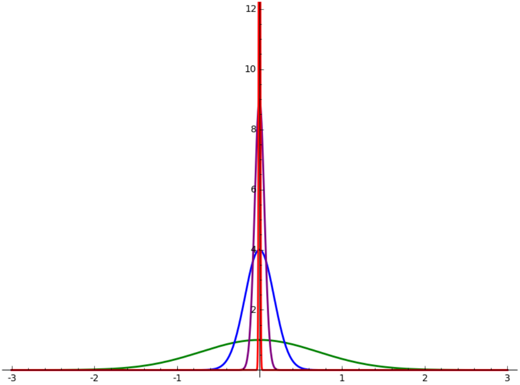
$\delta(x)$ is not a function of x according to the usual mathematical definition of a function, which requires a function to have a definite value for each point in its domain, but is something more general, which we may call an 'improper function' to show up its difference from **a** function defined by the usual definition. Thus $\delta(x)$ is not a quantity which can be generally used in mathematical analysis like an ordinary function, but its use must be confined to certain simple types of expression for which it is obvious that no inconsistency can arise.

Problem: wir brauchen (für Physik) die δ-Funktion mit

$$\delta : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \delta(x) = 0 \text{ für } x \neq 0, \quad \int_{\mathbb{R}} \delta(x) f(x) dx = f(0).$$

Daraus folgt $\int\limits_{\mathbb{R}} \delta(x) dx = 1$ (setze $f(x) = 1$).

Klappt mit üblichem Funktionen- bzw Integralbegriff nicht. Intuitiv: δ Grenzwert von immer schmaleren Funktionen f_n mit $\int\limits_{\mathbb{R}} f_n(x) dx = 1$.



Distributionen, aka verallgemeinerte Funktionen

Vorteil:

- Einheitliche Behandlung von *Maßen* und Funktionen
- Alle Funktionen sind differenzierbar
- Einfachere Behandlung von Fouriertransformation

Formale Definition:

- Sei $\mathcal{S}$ die Menge aller *rapidly decreasing functions*, oder *Testfunktionen*. D.h.
  - $\phi \in \mathcal{S}$ beliebig oft differenzierbar
  - $\phi \in O(x^{-n})$ für alle $n \in \mathbb{N}$
    ("f fällt schneller als jedes Polynom für $x \to \pm\infty$")

Bsp: $\phi(x) = e^{-x^2}$ ist Testfunktion, oder "Polynom mal e^{-x^2}".

Definition: Jede lineare Abbildung von $\mathcal{S}$ nach $\mathbb{R}$ heißt *Distribution*.

Praktisch: Schreibe $\langle g, \phi \rangle$ für "g angewandt auf ϕ". (g ist die Distribution, ϕ ist die Testfunktion)

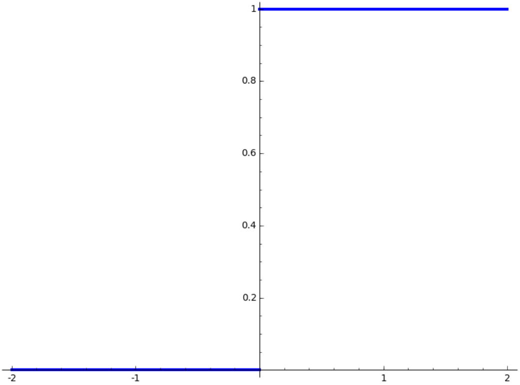
- Definiere δ durch $\langle \delta, \phi \rangle = \phi(0)$ (*ist* linear)
- Definiere δ_a durch $\langle \delta, \phi \rangle = \phi(a)$
- f "normale" Funktion (z.B. Polynom):
  $\langle f, \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x)\phi(x)dx$ (ist endlich, da ϕ rapidly decreasing!)
- μ Ihr Lieblings-(wahrscheinlichkeits-)maß:
  $\langle \mu, \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \phi(x)d\mu$.

Jetzt muss man alles aus Analysis hierfür erneut machen: Ableitung einer Distribution definieren, Ableitungsregeln, Integral,... alles von vorn!

Z.B. die Ableitung der *Heaviside-Funktion* $h(x)$, aka Sprungfunktion:

$$h(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \geq 0 \\ 0 & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

$h'(x) = ?$



$h'(x) = ?$

$\langle h', \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}} h'(x) \cdot \phi(x) dx$

$= \big(h(x)\phi(x)\big)\Big|_{x=-\infty}^{\infty} - \int_{\mathbb{R}} h(x)\phi'(x) dx$

$= 0 - 0 - (\int_0^\infty \phi'(x) dx)$

$= -(\phi(x)\Big|_{x=0}^{\infty}) = -(\phi(\infty) - \phi(0)) = -0 + \phi(0) = \phi(0)$

$= \langle \delta, \phi \rangle.$

Also $h' = \delta$. Magic.

Aus der Rechnung oben erhalten wir:

Lemma: $\langle f', \phi \rangle = -\langle f, \phi' \rangle$.

Ableitung der δ-Funktion: $\langle \delta', \phi \rangle = \phi'(0)$.

So leitet man nun Ableitungsregeln her, Ableitungen von Polynomen, Kettenregel, (Produktregel,hm)..... sowie Fouriertransformierte, Laplacetransformierte...

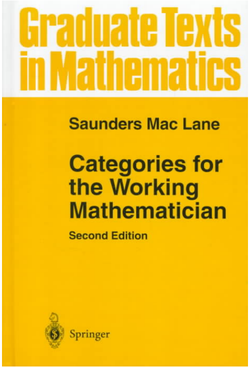
Es geht aber auch etwas verloren:

- Einfacher Zugang. Schulmathematik reicht nicht aus.
- Produkte von Distributionen sind nicht unbedingt wieder Distributionen.

Daher z.B. in "Mathematische Methoden der Biowissenschaften III" *keine* Distributionen, sondern herkömmliche Funktionen. Eine andere Verallgemeinerung:

Kategorientheorie

- Saunders MacLane, Samuel Eilenberg (1945)
- Kategorientheorie: Erweiterung der Algebra
- Kategorien
  - Klasse $\mathcal{C}$ von Objekten
  - Klasse von Pfeilen (Morphismen) (Elemente von Mengen zu jedem Paar von Elementen aus $\mathcal{C}$)
  - Abgeschlossene Verknüpfung von Pfeilen: $f \circ g$ ist Pfeil
  - Assoziative Verknüpfung von Pfeilen: $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$
  - Identitätspfeil: $\forall A \in \mathcal{C}: \; id_A(x) = x$ ist Pfeil
- Funktoren: strukturerhaltende Abbildungen zwischen Kategorien

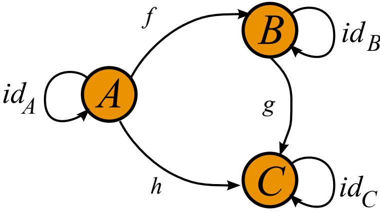


Kategorie:

- $\mathcal{C}$: Klasse von Objekten, hier: $\{A, B, C\}$.
- Klasse von Pfeilen: $\{id_A, id_B, id_C, f, g, h\}$.

Kann z.B. sein:

- A, B, C Vektorräume, f, g, h lineare Abbildungen
- A, B, C Gruppen, f, g, h Homomorphismen
- A, B, C Zahlen, Pfeil für $\leq$ (hier: $A \leq B \leq C$)
- A, B, C Haskell-Programme, id_A ist `id :: A->A`. Und `f :: A->B` usw.

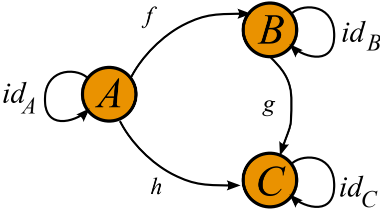


Kategorie:

- $\mathcal{C}$: Klasse von Objekten
- Klasse von Pfeilen

Kann z.B. sein:

- Kategorie **K-Vekt** alle Vektorräume über K mit lin. Abb.
- Kategorie **Grp**: alle Gruppen mit Homomorphismen.
- Kategorie **Z**: $(\mathbb{Z}, \leq)$.
- Kategorie **Hask**: alle Haskell-Typen mit allen Haskell-Programmen



Funktoren sind nun (strukturerhaltende) Abbildungen zwischen Kategorien. $F : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ ist Funktor, wenn:

- Objekte werden Objekte
- Pfeile werden Pfeile
- $F(id_A) = id_{F(A)}$ für alle $A \in \mathbf{X}$
- $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$ für alle Pfeile f, g

Damit lassen sich Ergebnisse aus dem einen "Reich" (z.B. Gruppen) in Ergebnisse aus einem anderen "Reich" (z.B. topologische Räume) übersetzen. Insbesondere hilfreich bei "was sind die richtigen Definitionen?"

$$f : M \to N, x \mapsto f(x)$$

Sowohl Distributionen als auch Pfeile und Funktoren sind also Verallgemeinerungen von "Funktion". Es gibt noch andere Verallgemeinerungen des Funktionenbegriffs, mehr oder weniger erfolgreich.