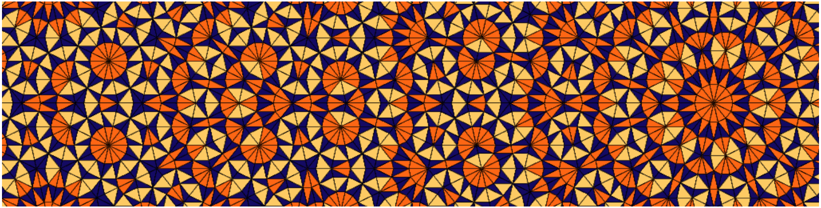
Panorama der Mathematik und Informatik

24: Mathematik im Film. Die Simpsons

Dirk Frettlöh
Technische Fakultät / Richtig Einsteigen



Es gibt viele schlimme Beispiele für Mathe und Informatik in den Medien. (Informatik ist schwieriger abzugrenzen.)

Auch etliche gute, siehe dazu z.B.:

- **Science Cinema** der TechFak (Ipke Wachsmuth, Julia Fröhlich) *Moon, Her, Ex Machina...*

Es gibt viele schlimme Beispiele für Mathe und Informatik in den Medien. (Informatik ist schwieriger abzugrenzen.)

Auch etliche gute, siehe dazu z.B.:

- **Science Cinema** der TechFak (Ipke Wachsmuth, Julia Fröhlich) *Moon, Her, Ex Machina...*
- Technik- und mathe-affine Buchautoren (Neal Stephenson, Greg Egan, Will Hertling, Robin Sloan, Daniel Suarez, Vernor Vinge, Andy Weir)
- Burkard Polster, Marty Ross: "Maths Goes to the Movies" (über etliche Filme mit Mathebezug, gute und schlechte)

Hier nur exemplarisch: TV-Serie *Die Simpsons*.

Die Simpsons

Simon Singh: *Homers letzter Satz*, Hanser (2013)

Gut lesbares und unterhaltsames Buch über Mathematik bei den Simpsons.

Die Simpsons: Satire auf die USA und die Gesellschaft. Start 1989 (D: 1991 im ZDF (!)).

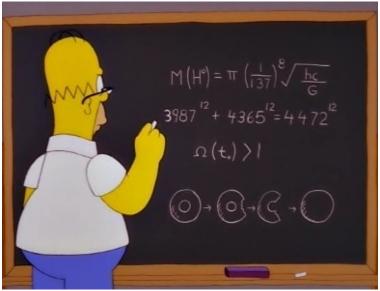
Am längsten laufende "scripted prime time television series" der USA.

Einfluss auf Alltagskulter, z.B. Neologismen: "D'oh", "cromulent" "embiggen", "yoink", "craptacular", "I, for one, welcome our new insect overlords"

Erfinder: Matt Groening.

Einige **Autoren**:

J. Stewart Burns	B.Sc. Mathematik, Harvard
	M.Sc. Mathematik, Berkeley
David S. Cohen	B.Sc. Physik, Harvard
	M.Sc. Informatik, Berkeley
Al Jean	B.Sc. Mathematik, Harvard
Ken Keeler	B.Sc. Angew. Mathematik, Harvard
	Ph.D. Angew. Mathematik, Harvard
Jeff Westbrook	B.Sc. Physik, Harvard
	Ph.D. Informatik, Princeton



M(H°) = π(1/137)^8 √(hc/G)
3987^12 + 4365^12 = 4472^12
Ω(t₀) > 1


TONIGHT'S ATTENDANCE:
A) 8,191
B) 8,128
C) 8,208
D) No way to tell
JUMBO - VISION

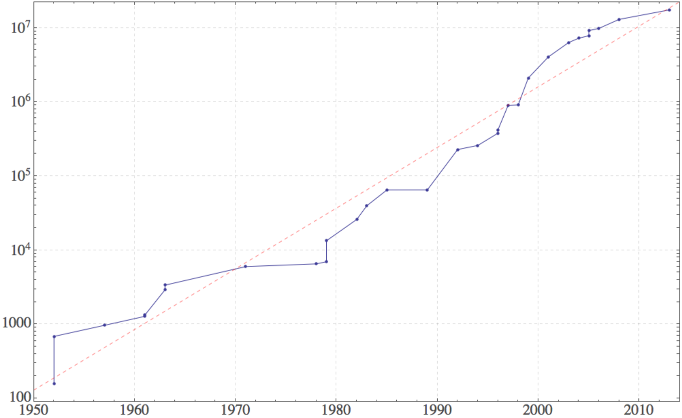
8191

8191:

8191

8191: $2^{13}-1$. Primzahl der Form 2^p-1 (wobei auch p Primzahl). So eine Zahl heißt *Mersenne-Primzahl* M_p.

Primzahljagd (nach der größten bekannten Primzahl) heute mit dem Computer. Man testet gerne 2^p-1, ob's Primzahl ist.



Die 11 größten bekannten Primzahlen (Stand Januar 2016) sind Mersenne-Primzahlen M_p.

Rekordhalter: $M_{74\,207\,281} = 2^{74\,207\,281} - 1$ mit 22 338 618 Dezimalstellen. (Great Internet Mersenne Prime Search (**GIMPS**))

Die 11 größten bekannten Primzahlen (Stand Januar 2016) sind Mersenne-Primzahlen M_p.

Rekordhalter: $M_{74\,207\,281} = 2^{74\,207\,281} - 1$ mit 22 338 618 Dezimalstellen. (Great Internet Mersenne Prime Search (**GIMPS**))

Alte Rekorde: (fast immer war die größte bekannte Primzahl eine Mersenne-Primzahl)

	Dezimalstellen	Jahr	
M_{127}	39	1876	Edouard Lucas
$180 \cdot (M_{127})^2 + 1$	79	1951	EDSAC computer
M_{2281}	687	1952	(Computer)
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
$M_{13466917}$	4 053 946	2001	GIMPS
$M_{20996011}$	6 320 430	2003	GIMPS
$M_{32582657}$	9 808 358	2006	GIMPS
$M_{43112609}$	12 978 189	2008	GIMPS
$M_{57885161}$	17 425 170	2013	GIMPS
$M_{74207281}$	22 338 618	2015	GIMPS

8128

8128

Perfekte Zahl: Summe ihrer Teiler.

Teiler von 6: 1,2,3, und $1 + 2 + 3 = 6$.

Teiler von 28: 1,2,4,7,14, und $1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 28$.

8128

Perfekte Zahl: Summe ihrer Teiler.

Teiler von 6: 1,2,3, und $1 + 2 + 3 = 6$.

Teiler von 28: 1,2,4,7,14, und $1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 28$.

Teiler von 8128: 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 127, 254, 508, 1016, 2032, 4064.

$$1+2+4+8+16+32+64+127+254+508+1016+2032+4064 = 8128$$

Zusammenhang perfekt $\leftrightarrow$ Mersenne-Primzahl.

Euklid: Ist $2^p - 1$ eine Mersenne-Primzahl, so ist $2^{p-1}(2^p - 1)$ perfekt.

Beispiel:

$$
\begin{aligned}
p = 2: &\quad 2^1(2^2 - 1) = 6 \\
p = 3: &\quad 2^2(2^3 - 1) = 28 \\
p = 5: &\quad 2^4(2^5 - 1) = 496 \\
p = 7: &\quad 2^6(2^7 - 1) = 8128
\end{aligned}
$$

Zusammenhang perfekt $\leftrightarrow$ Mersenne-Primzahl.

Euklid: Ist $2^p - 1$ eine Mersenne-Primzahl, so ist $2^{p-1}(2^p - 1)$ perfekt.

Beispiel:

$$\begin{aligned} p = 2: &\quad 2^1(2^2 - 1) = 6 \\ p = 3: &\quad 2^2(2^3 - 1) = 28 \\ p = 5: &\quad 2^4(2^5 - 1) = 496 \\ p = 7: &\quad 2^6(2^7 - 1) = 8128 \end{aligned}$$

Euler: alle **geraden** perfekten Zahlen sind von dieser Form.

Offene Probleme:

- Gibt es ungerade perfekte Zahlen?
- Gibt es unendlich viele perfekte Zahlen?

8208

8208

Narzisstische Zahl.

$$8208 = 8^4 + 2^4 + 0^4 + 8^4$$

Auch z.B.:

$$153 = 1^3 + 5^3 + 3^3$$
$$370 = 3^3 + 7^3 + 0^3$$
$$371 = 3^3 + 7^3 + 1^3$$
$$407 = 4^3 + 0^3 + 7^3$$

8208

Narzisstische Zahl.

$$8208 = 8^4 + 2^4 + 0^4 + 8^4$$

Auch z.B.:

$$153 = 1^3 + 5^3 + 3^3$$
$$370 = 3^3 + 7^3 + 0^3$$
$$371 = 3^3 + 7^3 + 1^3$$
$$407 = 4^3 + 0^3 + 7^3$$

$$\text{sowie} \quad 1 = 1^1, 2^1 = 2, 3^1 = 3, \ldots, 9^1 = 9.$$

Es ist bekannt, dass es nur endlich viele narzisstische Zahlen gibt: 88 Stück. Viele solcher und ähnlicher Konzepte in:
http://www2.stetson.edu/~efriedma/numbers.html
D. Wells: *Penguin Dictionary of Curious and Interesting Numbers*

Neben vielen kleinen weiteren Andeutungen...

- Fußball aus Sechsecken (s.o.)
- "π ist genau drei!" (ruft Prof. Frink, um einen Saal voller Wissenschaftler zum Schweigen zu bringen)

Neben vielen kleinen weiteren Andeutungen...

- Fußball aus Sechsecken (s.o.)
- "π ist genau drei!" (ruft Prof. Frink, um einen Saal voller Wissenschaftler zum Schweigen zu bringen)
- "Ihre Ansicht eines Donut-förmigen Universums ist durchaus interessant" (Stephen Hawking, Gastauftritt, gesprochen von ihm bzw seinem Sprachcomputer)

Neben vielen kleinen weiteren Andeutungen...

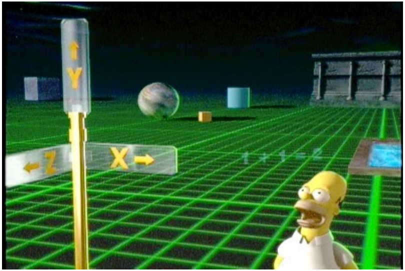
- Fußball aus Sechsecken (s.o.)
- "π ist genau drei!" (ruft Prof. Frink, um einen Saal voller Wissenschaftler zum Schweigen zu bringen)
- "Ihre Ansicht eines Donut-förmigen Universums ist durchaus interessant" (Stephen Hawking, Gastauftritt, gesprochen von ihm bzw seinem Sprachcomputer)
- "Ich kann π bis auf 40000 Stellen aufsagen. Die letzte Ziffer ist 1." (Apu in "Marge wird verhaftet")

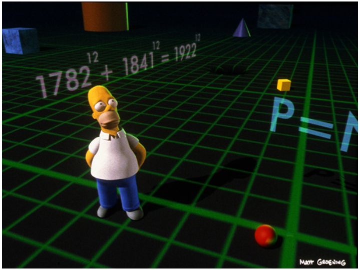
Neben vielen kleinen weiteren Andeutungen...

- Fußball aus Sechsecken (s.o.)
- "π ist genau drei!" (ruft Prof. Frink, um einen Saal voller Wissenschaftler zum Schweigen zu bringen)
- "Ihre Ansicht eines Donut-förmigen Universums ist durchaus interessant" (Stephen Hawking, Gastauftritt, gesprochen von ihm bzw seinem Sprachcomputer)
- "Ich kann π bis auf 40000 Stellen aufsagen. Die letzte Ziffer ist 1." (Apu in "Marge wird verhaftet")
- Acht Finger, aber Dezimalsystem (nur Gott hat 10 Finger!)


...auch ganze Episoden.

- "The Lisa Series" (2010): Baseball und Statistik
- "Gleichungen mit einem Unbekannten" (2006): Mädchen und Mathematik
- "Homer^3": Eine computeranimierte Halloween-Episode (s.u.)





Homer^3

Animationen gratis geliefert von PDI. Führte zu Kooperation mit (und letztlich Übernahme durch) DreamWorks:

Antz (1998), *Shrek* (2001), *Madagascar* (2005)...

Homer^3

Animationen gratis geliefert von PDI. Führte zu Kooperation mit (und letztlich Übernahme durch) DreamWorks:

Antz (1998), *Shrek* (2001), *Madagascar* (2005)...

Andeutungen aus Mathe, Informatik, Physik:

- P=NP
- Russells Teekanne, bzw. Utah Teapot
- $e^{\pi i} = -1$
- 46 72 69 6E 6B 20 72 75 6C 65 73 21

Homer^3

Animationen gratis geliefert von PDI. Führte zu Kooperation mit (und letztlich Übernahme durch) DreamWorks:

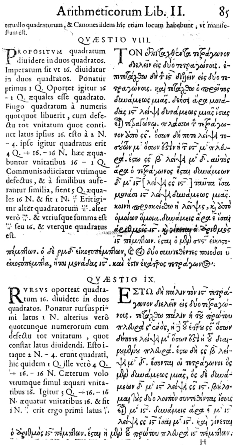
Antz (1998), *Shrek* (2001), *Madagascar* (2005)...

Andeutungen aus Mathe, Informatik, Physik:

- P=NP
- Russells Teekanne, bzw. Utah Teapot
- $e^{\pi i} = -1$
- 46 72 69 6E 6B 20 72 75 6C 65 73 21 (ASCII-Code)
- $1782^{12} + 1841^{12} = 1922^{12}$.

Fermats letzter Satz

Berühmte Aussage von Pierre Fermat (1637):



Arithmeticorum Lib. II. 85

teruallo quadratorum, & Canones iidem hîc etiam locum habebunt, vt manifestum est.

QVÆSTIO VIII.

PROPOSITVM quadratum diuidere in duos quadratos. Imperatum sit vt 16. diuidatur in duos quadratos. Ponatur primus 1 Q. Oportet igitur 16 − 1 Q. æquales esse quadrato. Fingo quadratum à numeris quotquot libuerit, cum defectu tot vnitatum quot continet latus ipsius 16. esto à 2 N. − 4. ipse igitur quadratus erit 4 Q. + 16. − 16 N. hæc æquabuntur vnitatibus 16 − 1 Q. Communis adiiciatur vtrimque defectus, & à similibus auferantur similia, fient 5 Q. æquales 16 N. & fit 1 N. [illegible] Erit igitur alter quadratorum [illegible]. alter verò [illegible]. & vtriusque summa est [illegible] seu 16. & vterque quadratus est.

QVÆSTIO IX.

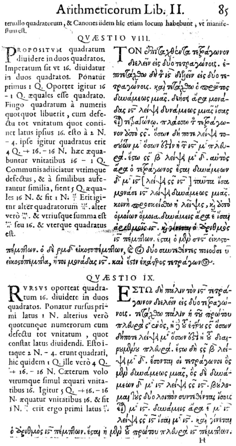
RVRSVS oporteat quadratum 16. diuidere in duos quadratos. Ponatur rursus primi latus 1 N. alterius verò quotcunque numerorum cum defectu tot vnitatum, quot constat latus diuidendi. Esto itaque 2 N. − 4. erunt quadrati, hic quidem 1 Q. ille verò 4 Q. + 16. − 16 N. Cæterum volo vtrumque simul æquari vnitatibus 16. Igitur 5 Q. + 16. − 16 N. æquatur vnitatibus 16. & fit 1 N. [illegible] erit ergo primi latus [illegible].

H

Cubum autem in duos cubos, aut quadratoquadratum in duos quadratoquadratos, et generaliter nullam in infinitum ultra quadratum potestatem in duos eiusdem nominis fas est dividere cuius rei demonstrationem mirabilem sane detexi. Hanc marginis exiguitas non caperet.

Fermats letzter Satz

Berühmte Aussage von Pierre Fermat (1637):



Cubum autem in duos cubos, aut quadratoquadratum in duos quadratoquadratos, et generaliter nullam in infinitum ultra quadratum potestatem in duos eiusdem nominis fas est dividere cuius rei demonstrationem mirabilem sane detexi. Hanc marginis exiguitas non caperet.

"Es gibt für $n \geq 3$ keine Lösung der Gleichung $a^n + b^n = c^n$ mit $a, b, c \in \mathbb{N}$. Ich habe einen wunderbaren Beweis dafür, aber der Rand hier ist zu klein, ihn zu fassen."

Es gab über die Jahre viele Versuche, den Beweis zu liefern.

- Für $n = 4$: Fermat. Damit muss man's nur noch für ungerade Primzahlen $n = p$ zeigen.
- $p = 3$: Euler (1770) und viele andere.
- $p = 5$: Legendre, Dirichlet, unabhängig voneinander ca 1825, und viele andere.
- $p = 7$: Lamé (1839), Lebesgue (1840), und viele andere.
- $n \leq 100$: Sophie Germain (um 1823).

Es gab über die Jahre viele Versuche, den Beweis zu liefern.

- Für $n = 4$: Fermat. Damit muss man's nur noch für ungerade Primzahlen $n = p$ zeigen.
- $p = 3$: Euler (1770) und viele andere.
- $p = 5$: Legendre, Dirichlet, unabhängig voneinander ca 1825, und viele andere.
- $p = 7$: Lamé (1839), Lebesgue (1840), und viele andere.
- $n \leq 100$: Sophie Germain (um 1823).
- $p \leq 125000$: Wagstaff (1978, Computer).
- $p \leq 4000000$: (1993, Computer)

Endgültig bewiesen durch **Andrew Wiles** (geb. 11.4.1953) um 1994.

Simon Singh: *Fermats letzter Satz* (1997) erzählt die Geschichte.

Zurück zu den Simpsons:

$$1782^{12} + 1841^{12} = 1922^{12} \quad \text{und} \quad 3987^{12} + 4365^{12} = 4472^{12}$$

sind Gegenbeispiele zu Fermats letztem Satz.

Zurück zu den Simpsons:

$$1782^{12} + 1841^{12} = 1922^{12} \quad \text{und} \quad 3987^{12} + 4365^{12} = 4472^{12}$$

sind Gegenbeispiele zu Fermats letztem Satz. Echt?

$$\sqrt[12]{1782^{12} + 1841^{12}} = 1921.9999999558672\ldots$$
$$\sqrt[12]{3987^{12} + 4365^{12}} = 4472.0000000070592\ldots$$

Die Zahlen sind so gewählt, dass ein Taschenrechner mit 8 oder 10 Stellen die Zahlen als gleich ansieht.

Zurück zu den Simpsons:

$$1782^{12} + 1841^{12} = 1922^{12} \quad \text{und} \quad 3987^{12} + 4365^{12} = 4472^{12}$$

sind Gegenbeispiele zu Fermats letztem Satz. Echt?

$$\sqrt[12]{1782^{12} + 1841^{12}} = 1921.9999999558672\ldots$$
$$\sqrt[12]{3987^{12} + 4365^{12}} = 4472.0000000070592\ldots$$

Die Zahlen sind so gewählt, dass ein Taschenrechner mit 8 oder 10 Stellen die Zahlen als gleich ansieht.

Bei der ersten allerdings: gerade + ungerade = gerade, Widerspruch.

Das Futurama-Theorem

Am deutlichsten zeigt sich der mathematische Hintergrund der Autoren aber in Futurama (1999-2013).

Ein Höhepunkt: Ein mathematischer Satz, der von Ken Keeler für Futurama gefunden und bewiesen wurde.

Ausgangslage: Die Körpertauschmaschine ("Im Körper des Freundes", 2010). Mit dieser Maschine können zwei Personen (bzw Roboter) ihren Körper tauschen. Aber wegen eines Defekts kann dasselbe (Körper-)Paar niemals wieder tauschen. Folgende *Körper* tauschen im Laufe der Folge ihre aktuellen Personen:

Das Futurama-Theorem

Am deutlichsten zeigt sich der mathematische Hintergrund der Autoren aber in Futurama (1999-2013).

Ein Höhepunkt: Ein mathematischer Satz, der von Ken Keeler für Futurama gefunden und bewiesen wurde.

Ausgangslage: Die Körpertauschmaschine ("Im Körper des Freundes", 2010). Mit dieser Maschine können zwei Personen (bzw Roboter) ihren Körper tauschen. Aber wegen eines Defekts kann dasselbe (Körper-)Paar niemals wieder tauschen. Folgende *Körper* tauschen im Laufe der Folge ihre aktuellen Personen:

Prof $\leftrightarrow$ Amy, Amy $\leftrightarrow$ Bender, Prof $\leftrightarrow$ Leela, Amy $\leftrightarrow$ Wash Bucket, Fry $\leftrightarrow$ Zoidberg, Leela $\leftrightarrow$ Hermes, Wash Bucket $\leftrightarrow$ Kaiser

Fragen:

- Kann jeder wieder in seinen ursprünglichen Körper zurück?
- Braucht man dazu Hilfskörper?
- Wieviele in diesem Beispiel?
- Wieviele im Allgemeinen?

Theorem (Keeler)

Zwei Hilfskörper reichen immer.

Der Beweis ist einfach, wenn man Permutationen kennt.

Fragen:

- Kann jeder wieder in seinen ursprünglichen Körper zurück?
- Braucht man dazu Hilfskörper?
- Wieviele in diesem Beispiel?
- Wieviele im Allgemeinen?

Theorem (Keeler)

Zwei Hilfskörper reichen immer.

Der Beweis ist einfach, wenn man Permutationen kennt.

Permutation: Vertauschung von n Objekten. Z.B.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 2 & 6 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Heißt: $\sigma(1) = 4, \sigma(2) = 2, \sigma(3) = 6, \sigma(4) = 5, \sigma(5) = 1, \sigma(6) = 3.$

Schreibweise: wie oben als Wertetabelle,oder in
Zykelschreibweise: $1 \to 4 \to 5 \to 1,\ 2 \to 2,\ 3 \to 6 \to 3.$ Kurz:

$$(1\,4\,5)(3\,6)$$

Einserzyklen (oben: (2)) weglassen.

Vorteile der Zykelschreibweise:

- Kürzer.
- Man sieht die Zykelstruktur. (Oben: ein 3er-Zyklus, ein 2er-Zyklus)
- Man kann damit rechnen

Beispiel: Erst $\rho = (1326)(45)$, dann $\sigma = (145)(36)$.

$$\sigma \circ \rho = (145)(36) \circ (1326)(45) =$$

Einserzyklen (oben: (2)) weglassen.

Vorteile der Zykelschreibweise:

- Kürzer.
- Man sieht die Zykelstruktur. (Oben: ein 3er-Zyklus, ein 2er-Zyklus)
- Man kann damit rechnen

Beispiel: Erst $\rho = (1326)(45)$, dann $\sigma = (145)(36)$.

$$\sigma \circ \rho = (145)(36) \circ (1326)(45) = (16$$

Einserzyklen (oben: (2)) weglassen.

Vorteile der Zykelschreibweise:

- Kürzer.
- Man sieht die Zykelstruktur. (Oben: ein 3er-Zyklus, ein 2er-Zyklus)
- Man kann damit rechnen

Beispiel: Erst $\rho = (1326)(45)$, dann $\sigma = (145)(36)$.

$$\sigma \circ \rho = (145)(36) \circ (1326)(45) = (164)$$

Einserzyklen (oben: (2)) weglassen.

Vorteile der Zykelschreibweise:

- Kürzer.
- Man sieht die Zykelstruktur. (Oben: ein 3er-Zyklus, ein 2er-Zyklus)
- Man kann damit rechnen

Beispiel: Erst $\rho = (1326)(45)$, dann $\sigma = (145)(36)$.

$$\sigma \circ \rho = (145)(36) \circ (1326)(45) = (164)(23)(5)$$

Einserzyklen (oben: (2)) weglassen.

Vorteile der Zykelschreibweise:

- Kürzer.
- Man sieht die Zykelstruktur. (Oben: ein 3er-Zyklus, ein 2er-Zyklus)
- Man kann damit rechnen

Beispiel: Erst $\rho = (1326)(45)$, dann $\sigma = (145)(36)$.

$$\sigma \circ \rho = (145)(36) \circ (1326)(45) = (164)(23)(5)$$

Mit der Zykelschreibweise sieht man auch sofort:

$$\sigma^6 = \sigma \circ \sigma \circ \sigma \circ \sigma \circ \sigma \circ \sigma = \mathrm{id},$$

wobei id$= (1)(2)\cdots$.

Beweisskizze (zu Keelers Theorem)
Schreibe den Endzustand als Permutation. Betrachte die einzelnen Zykel (im Bsp. oben: { Fry, Zoidberg }, { alle andern }). Für jeden einzelnen Zykel (geeignet nummeriert)

$$\pi_1 = (1\,2\,3 \cdots n), \pi_2 = (\cdots)$$

(D.h.: nummeriere die Personen so, dass Person 1 in Körper 2 ist, Person 2 in Körper 3 usw. bis Person n in Körper 1)

Beweisskizze (zu Keelers Theorem)
Schreibe den Endzustand als Permutation. Betrachte die einzelnen Zykel (im Bsp. oben: { Fry, Zoidberg }, { alle andern }). Für jeden einzelnen Zykel (geeignet nummeriert)

$$\pi_1 = (1\,2\,3 \cdots n), \pi_2 = (\cdots)$$

(D.h.: nummeriere die Personen so, dass Person 1 in Körper 2 ist, Person 2 in Körper 3 usw. bis Person n in Körper 1)

Führe die beiden neuen Körper x und y ein (und denke:)

$$\pi_1 = (1\,2\,\ldots\,n-1\,n)(x)(y)$$

$$\pi_1 = (1\,2\,\ldots,\, n-1\,n)(x)(y)$$

Setze $\sigma_1 = (x\ 1)(y\ 2)(y\ 3)\cdots(y\ n)(x\ 2)(y\ 1)$. D.h.: tausche y und 1, x und 2 usw. Von hinten nach vorn durchführen!

$$\pi_1 = (1\,2\,\ldots,\; n-1\;n)(x)(y)$$

Setze $\sigma_1 = (x\;1)(y\;2)(y\;3)\cdots(y\;n)(x\;2)(y\;1)$. D.h.: tausche y und 1, x und 2 usw. Von hinten nach vorn durchführen!

Hier werden jedesmal nur die neuen Körper x und y mit anderen getauscht, daher Bedingung erfüllt. Berechne

$$\pi_1\sigma_1 = (1\,2\,\ldots\,n{-}1\,n)\circ(x\,1)(y\,2)(y\,3)\cdots(y\,n{-}1)(y\,n)(x\,2)(y\,1) =$$

$$\pi_1 = (1\,2\,\ldots,\, n-1\,n)(x)(y)$$

Setze $\sigma_1 = (x\ 1)(y\ 2)(y\ 3)\cdots(y\ n)(x\ 2)(y\ 1)$. D.h.: tausche y und 1, x und 2 usw. Von hinten nach vorn durchführen!

Hier werden jedesmal nur die neuen Körper x und y mit anderen getauscht, daher Bedingung erfüllt. Berechne

$$\pi_1\sigma_1 = (1\,2\,\ldots\,n{-}1\,n)\circ(x\,1)(y\,2)(y\,3)\cdots(y\,n{-}1)(y\,n)(x\,2)(y\,1) =$$

$$(1)$$

$$\pi_1 = (1\,2\,\ldots,\,n-1\,n)(x)(y)$$

Setze $\sigma_1 = (x\ 1)(y\ 2)(y\ 3)\cdots(y\ n)(x\ 2)(y\ 1)$. D.h.: tausche y und 1, x und 2 usw. Von hinten nach vorn durchführen!

Hier werden jedesmal nur die neuen Körper x und y mit anderen getauscht, daher Bedingung erfüllt. Berechne

$\pi_1\sigma_1 = (1\,2\,\ldots\,n{-}1\,n)\circ(x\,1)(y\,2)(y\,3)\cdots(y\,n{-}1)(y\,n)(x\,2)(y\,1) =$

$$(1)(2)\cdots$$

$$\pi_1 = (1\,2\,\ldots,\,n-1\,n)(x)(y)$$

Setze $\sigma_1 = (x\ 1)(y\ 2)(y\ 3)\cdots(y\ n)(x\ 2)(y\ 1)$. D.h.: tausche y und 1, x und 2 usw. Von hinten nach vorn durchführen!

Hier werden jedesmal nur die neuen Körper x und y mit anderen getauscht, daher Bedingung erfüllt. Berechne

$$\pi_1\sigma_1 = (1\,2\,\ldots\,n{-}1\,n)\circ(x\,1)(y\,2)(y\,3)\cdots(y\,n{-}1)(y\,n)(x\,2)(y\,1) =$$

$$(1)(2)\cdots(n-1)(n)(x\ y)$$

Das ist das gewünschte Ergebnis für einen Zykel. Mach das für alle Zyklen π_i. Setze zusammen:

$$\pi_1\pi_2\cdots\pi_k\circ\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_k$$

$$\pi_1 = (1\,2\,\ldots,\, n-1\; n)(x)(y)$$

Setze $\sigma_1 = (x\ 1)(y\ 2)(y\ 3)\cdots(y\ n)(x\ 2)(y\ 1)$. D.h.: tausche y und 1, x und 2 usw. Von hinten nach vorn durchführen!

Hier werden jedesmal nur die neuen Körper x und y mit anderen getauscht, daher Bedingung erfüllt. Berechne

$$\pi_1\sigma_1 = (1\,2\,\ldots\; n{-}1\; n)\circ(x\,1)(y\,2)(y\,3)\cdots(y\; n{-}1)(y\; n)(x\,2)(y\,1) =$$

$$(1)(2)\cdots(n-1)(n)(x\ y)$$

Das ist das gewünschte Ergebnis für einen Zykel. Mach das für alle Zyklen π_i. Setze zusammen:

$$\pi_1\pi_2\cdots\pi_k \circ \sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_k = \ldots$$

$$= \pi_1\sigma_1\pi_2\sigma_2\cdots\pi_k\sigma_k = \begin{cases} \text{id} & \text{falls } k \text{ gerade} \\ \text{id} & \text{falls } k \text{ ungerade} \end{cases}$$

Am Ende evtl x und y tauschen, fertig.

In der Sendung stellen zwei Basketballer, Tate und Clyde, den Beweis vor und tauschen die Körper dem Beweis folgend wieder zurück (selbst als Hilfskörper x und y dienend).

Der Satz steht auf wikipedia, der Beweis wurde nicht wirklich publiziert. Allerdings:

Ron Evans, Lihua Huang, Tuan Nguyen: Keeler's theorem and products of distinct transpositions, *Amer. Math. Monthly* 121 (2014), 136-144

Die stellen einen Algorithmus für die effizienteste Lösung vor.

In der Sendung stellen zwei Basketballer, Tate und Clyde, den Beweis vor und tauschen die Körper dem Beweis folgend wieder zurück (selbst als Hilfskörper x und y dienend).

Der Satz steht auf wikipedia, der Beweis wurde nicht wirklich publiziert. Allerdings:

Ron Evans, Lihua Huang, Tuan Nguyen: Keeler's theorem and products of distinct transpositions, *Amer. Math. Monthly* 121 (2014), 136-144

Die stellen einen Algorithmus für die effizienteste Lösung vor.

Es gibt noch einen Dreh: Im konkreten Beispiel oben würde es ohne Hilfskörper klappen: Fry und Zoidberg könnten als diese dienen, und hätten nach dem Entwirren der anderen Körper selbst auch ihre eigenen Körper wieder.