5 Abbildungen (aka Funktionen)

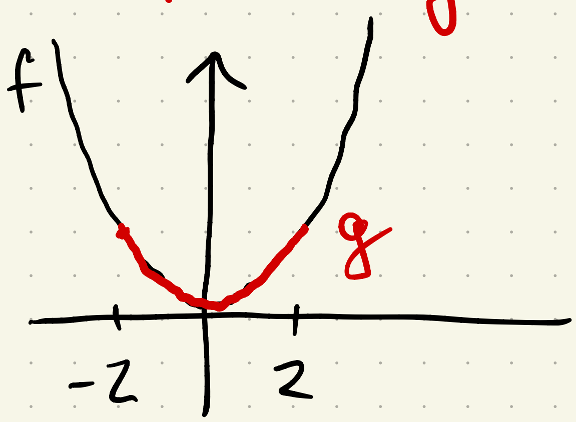
Eine Funktion ordnet jedem Element aus dem Definitionsbereich M genau ein Element aus dem Zielbereich N zu.

Schreibweise $f: M \to N,\ f(x) = \ldots$

Beispiel:
- $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2$

oder
- $g: [-2;2] \to \mathbb{R},\ g(x) = x^2$

f und g sind verschiedene Funktionen!



$\max\{f(x) \mid x \in \mathbb{R}\} = \infty$

$\max\{g(x) \mid x \in \mathbb{R}\} = 4$

- $h: \{1,2,3\} \to \{1,2,3\}$,

x	1	2	3
$h(x)$	2	2	3

Bild & Urbild

Bild von f: $\{f(x) \mid x \in M\}$

(falls $f: M \to N$, $f(x) = \dots$)

(„alle Werte, die drankommen")

Kurz: „$\mathrm{Bild}(f)$", „$f(M)$" ← (Menge!)

(keine Zahl!)

Allgemeiner: $f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$

„Bild von A unter f" ($A \subset M$)

Bsp: (s.o.) • $\mathrm{Bild}(f) = [0; \infty)$

- $\mathrm{Bild}(g) = [0;4]$
- $\mathrm{Bild}(h) = \{2;3\}$
- $f([0;3]) = [0;9]$
- $h(\{1,2\}) = \{2\}$

Das **Urbild** von A unter $f: M \to N$... ($A \subset N$)

$$f^{-1}(A) = \{x \in M \mid f(x) \in A\}$$

$$f^{-1}([1;4]) = [1;2] \cup [-2;-1]$$

$h^{-1}(\{2\}) = \{1,2\}$

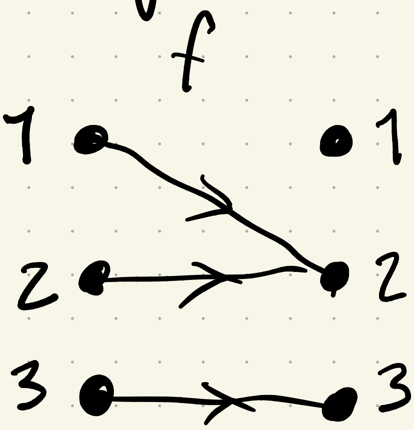
Erinnerung: Funktion:

$f: M \to N,\ f(x) =$

Definitionsmenge   Zielmenge

5.2 Injektiv, surjektiv, bijektiv

$f: \{1,2,3\} \longrightarrow \{1,2,3\},$



Def $f: M \to N$

heißt surjektiv, falls

$\forall y \in N\ \exists x \in M : f(x) = y$

(„alle kommen dran")

f heißt injektiv, falls

$\forall x, z \in M : f(x) = f(z) \Rightarrow x = z$

(„jeder kommt höchstens einmal dran")

f heißt bijektiv, falls f injektiv und surjektiv ist.

Bsp. $f: \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x}$

$\mathbb{R}_0^+ = [0;\infty)$

nicht surjektiv

(−2 kommt nicht dran)

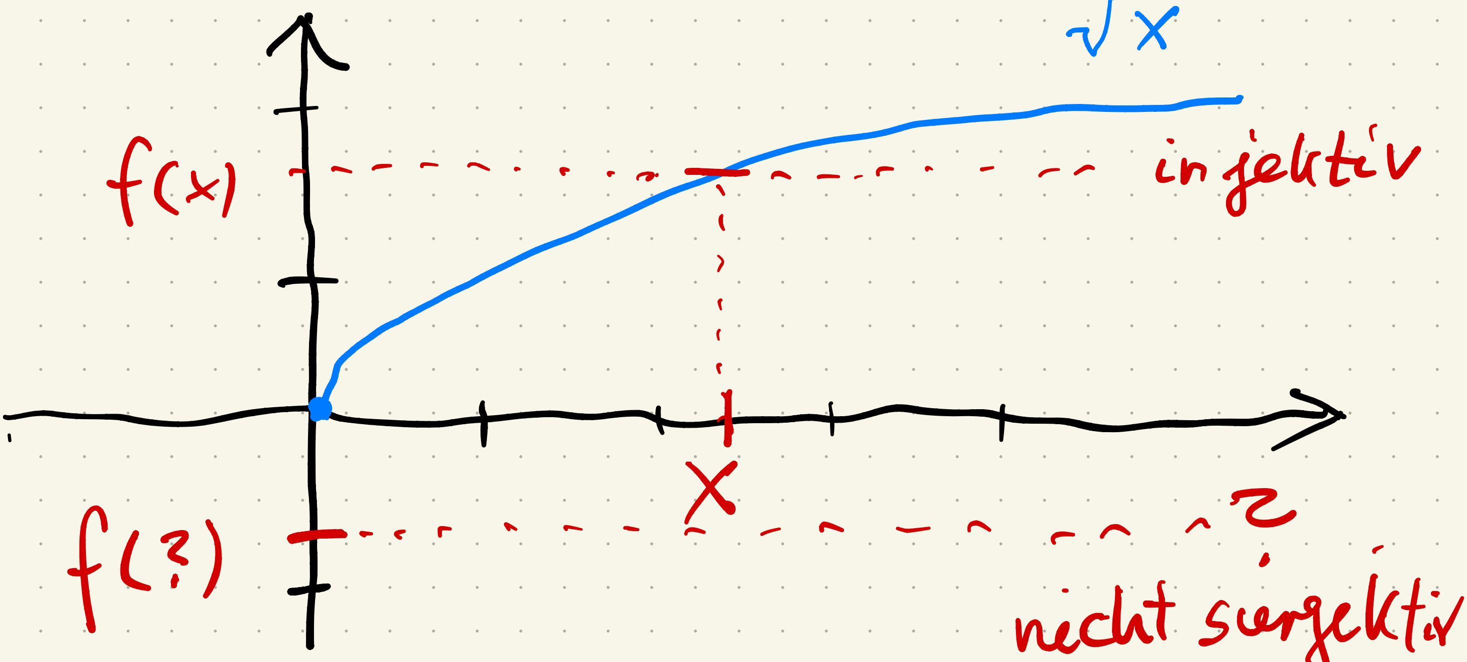
$f(x)=\sqrt{x} \neq -2$ für alle $x \in \mathbb{R}$

aber injektiv:

$$f(x)=f(z) \Rightarrow \sqrt{x}=\sqrt{z} \quad |(\;)^2$$

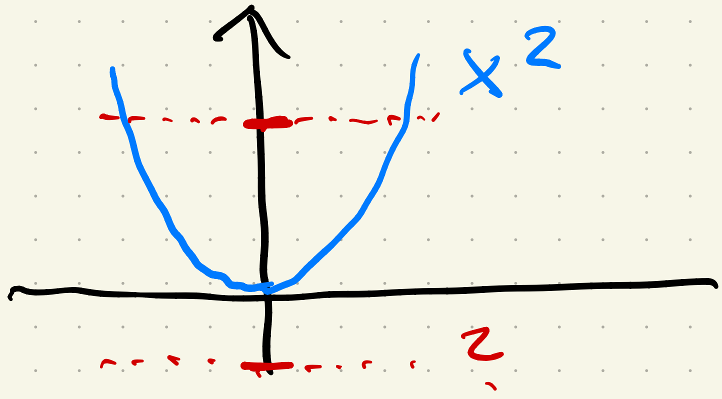
$$\Rightarrow x = z.$$

Alternativ kann man das am Graphen von f sehen:



$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$

- nicht injektiv: $f(-2)=4=f(2)$
- nicht surjektiv: $f(x)=-2$



Fakt Jede Funktion kann durch Verkleinern von Definitions- und Zielbereich bijektiv gemacht werden.

Bsp

$f: \mathbb{R}_0^- \to \mathbb{R}_0^+$, $f(x) = x^2$

$\mathbb{R}_0^- = (-\infty, 0]$

<u>ist</u> bijektiv.

- $f(x) = 4 \Rightarrow x = -2$
- $f(x) = 10 \Rightarrow x = -\sqrt{10}$

Def. Sei $f: M \to N$, $g: N \to P$.

- $\mathrm{id}_M : M \to M$; $\mathrm{id}_M(x) = x$ („Identität", „Identitätsfunktion")
- $g \circ f : M \to P$;

  $g \circ f(x) = g(f(x))$

  „Verkettung" <u>von g mit f.</u>

Bild:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & N \arrow[r, "g"] & P \end{tikzcd}$$

Bsp. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$
$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x+17$
$g \circ f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g \circ f(x) = x^3 + 17$.

5.3 Umkehrfunktionen

Def 5.3 $f: M \to N$ bijektiv.
Die Umkehrfunktion g von f ist die mit $g \circ f = id_M$ und $f \circ g = id_N$

beides nötig!

(vgl. Aufgabe 5.7)

Notation: Die Umkehrfunktion von f heißt f^{-1}.

Obacht: $f^{-1}(4)$ vs. $f^{-1}(\{1,2,3\})$

Umkehrfunktion, Zahl, Urbild, Menge

Beispiele:

- $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $f(x) = x+1$

  $f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f^{-1}(x) = x-1$

$$\underbrace{f^{-1}\circ f}_{\text{also } = id_{\mathbb{R}}}(x) = (x+1)-1 = x$$

- $f: \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$, $f(x) = 4x^2$

  $f^{-1}: \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$, $f^{-1}(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{4}$ „f^{-1}"

  $\sqrt{\dfrac{x}{4}}$ f^{-1}

$$\text{„}f^{-1}\text{"} \circ f(x) = \frac{\sqrt{4x^2}}{4} = \frac{2x}{4} \neq x;$$

also $f^{-1}\circ f(x) = \sqrt{\dfrac{4x^2}{4}} = x$ ✓

(und $f\circ f^{-1}(x) = 4\sqrt{\dfrac{x}{4}}^2 = 4\cdot\dfrac{x}{4} = x$)

Das zweite ist für $f: M \to M$ automatisch wahr.

- $f: \mathbb{R}_0^+ \to [0;1]$, $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

  $f^{-1}(x) = \sqrt{\dfrac{1}{x} - 1}$

  $f\circ f^{-1}(x) = \dfrac{1}{1 + \left(\sqrt{\frac{1}{x} - 1}\right)^2}$

$$= \frac{1}{1+\frac{1}{x}-1} = \frac{1}{1/x} = x.$$

- $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^3-x^2+1}$

  $f^{-1}(x) = ?$

Systematisch f^{-1} berechnen:

- Schreibe $f(x) = y$.
- Forme um, bis $x = \dots$ (und rechts kein x mehr)
- rechts steht dann $f^{-1}(y)$

- <u>Bsp</u>

$$\frac{1}{1+x^2} = y \quad \Big| \cdot (1+x^2) : y$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{y} = 1 + x^2 \quad \Big| -1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{y} - 1 = x^2 \quad \Big| \sqrt{\ }$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{1}{y}-1} = x, \text{ also } f^{-1}(y) = \sqrt{\frac{1}{y}-1}$$

- Manchmal zu schwierig

5.4 Prominente Funktionen

1. Polynome: x^2+1, $\frac{1}{2}x^3-2x+5$, ...

Allgemein: $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$

2. Gebrochen rationale Funktionen

$\frac{\text{Polynom}_1}{\text{Polynom}_2}$, z.B. $\frac{2x^2-1}{x^3+7x+1/2}$, ...

3. Wurzelfunktionen:

$\sqrt{x}$ $\sqrt[10]{x}$; ...

4. Exponentialfunktion

$f(x) = e^x$ (aka $\exp(x)$)

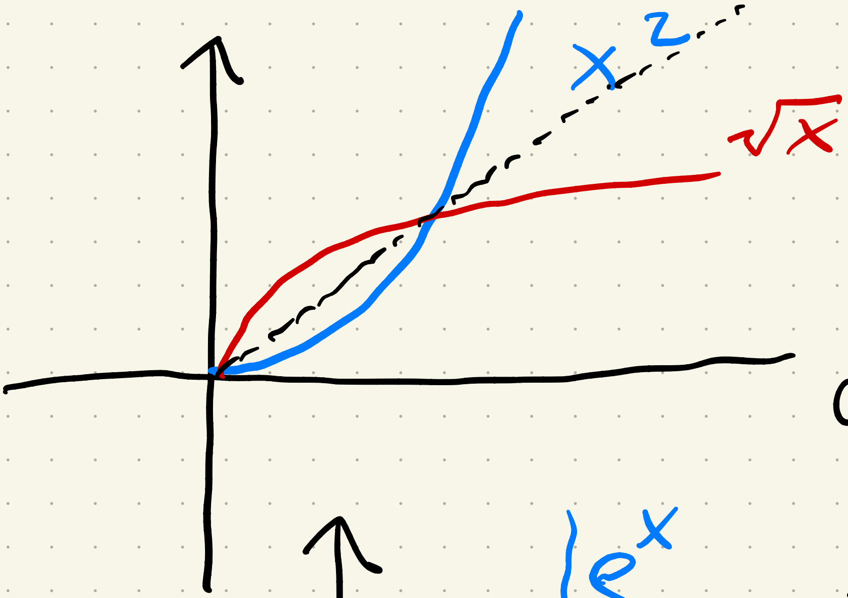
(Eigentlich: $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$, aber...)

Ok auch: $e = 2{,}7182818\ldots$

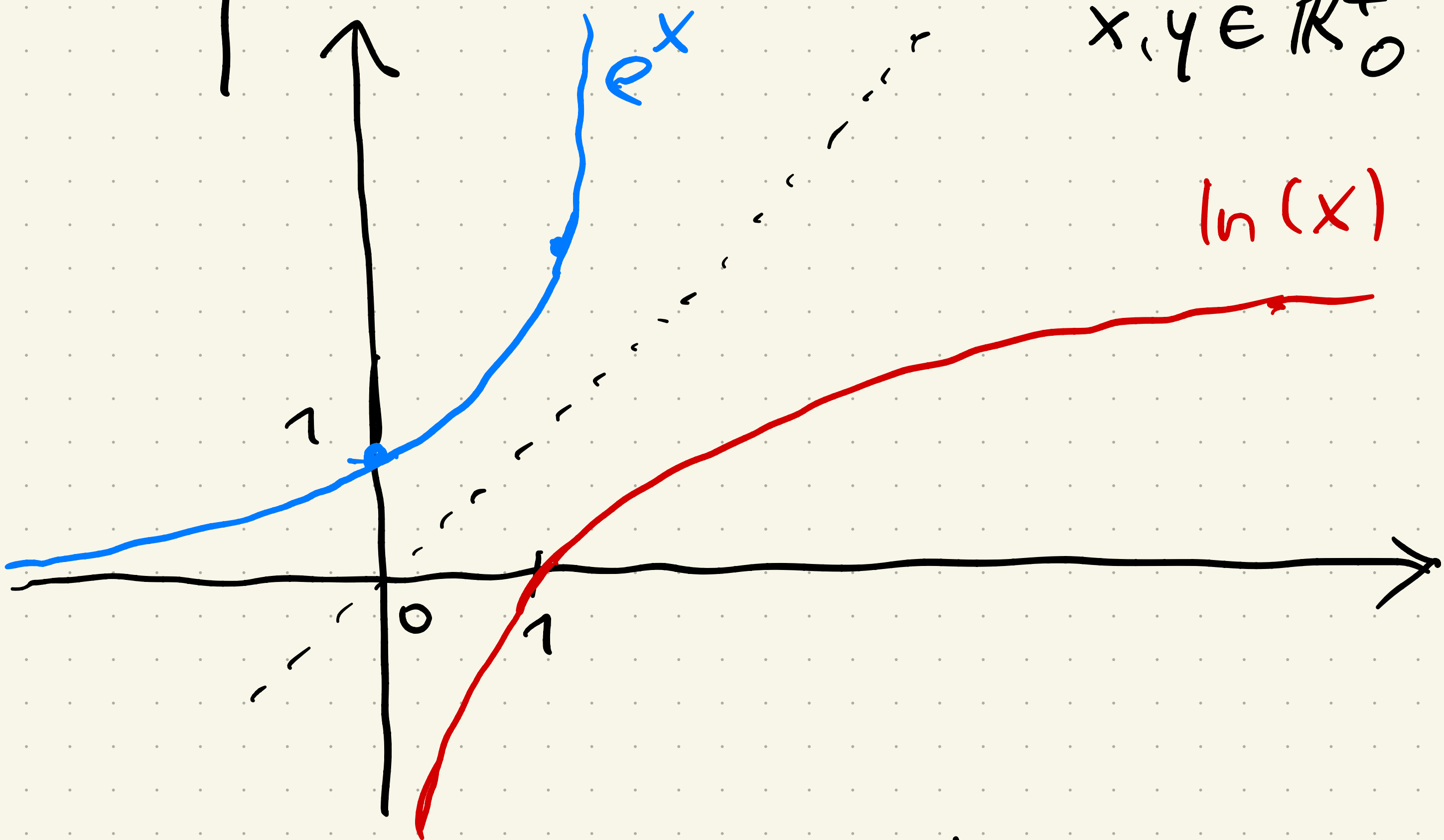
- Weitere Funktionen daraus basteln mittels
  - $g \circ f$
  - $g \cdot f$, $g+f$, $\frac{g}{f}$
  - f^{-1}

z.B. $\left(e^{\sqrt{\frac{x^2+1}{x^3-x+5}}}\right)^2 + 5\sqrt{x^2-x}$ ...

Und z.B. $(e^x)^{-1}$



• Graph von f^{-1} ist der von f gespiegelt an $\{(x,y) \mid x=y,\ x,y \in \mathbb{R}_0^+\}$



$(e^x)^{-1}$: $\ln : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$,

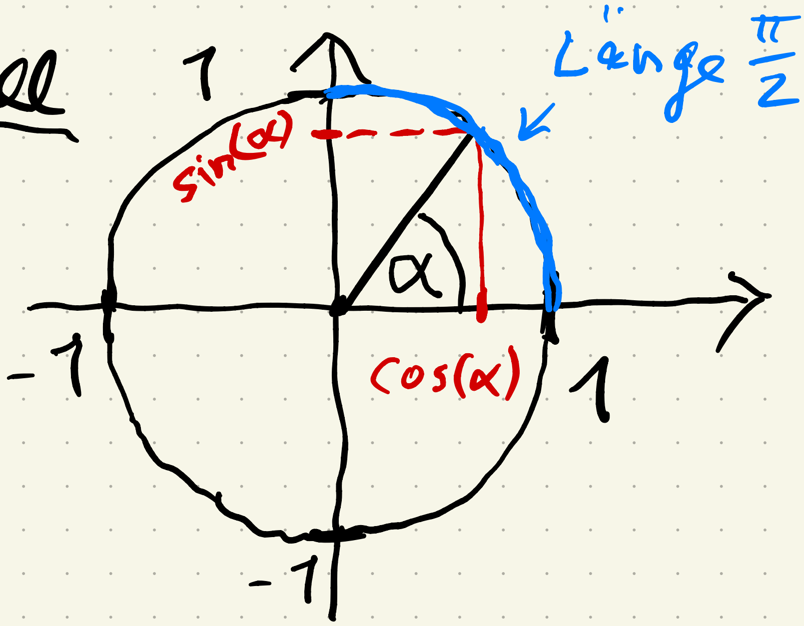
„logarithmus naturalis"

(„Polynome": auch „rationale Funktionen")

Trigonometrische Funktionen

Offiziell:
- $\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{2k+1}}{(2k+1)!} x^n$
- $\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \ldots$

Idee



Also:

$\cos(0) = 1$

$\sin(0) = 0$

Besonderheit: Statt $90°, 180°, \ldots$

„Bogenmaß" hier $\pi/2, \pi, \ldots$

Einige Winkel:

Grad	0	45	60	90	180	360
Bogenmaß	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	2π

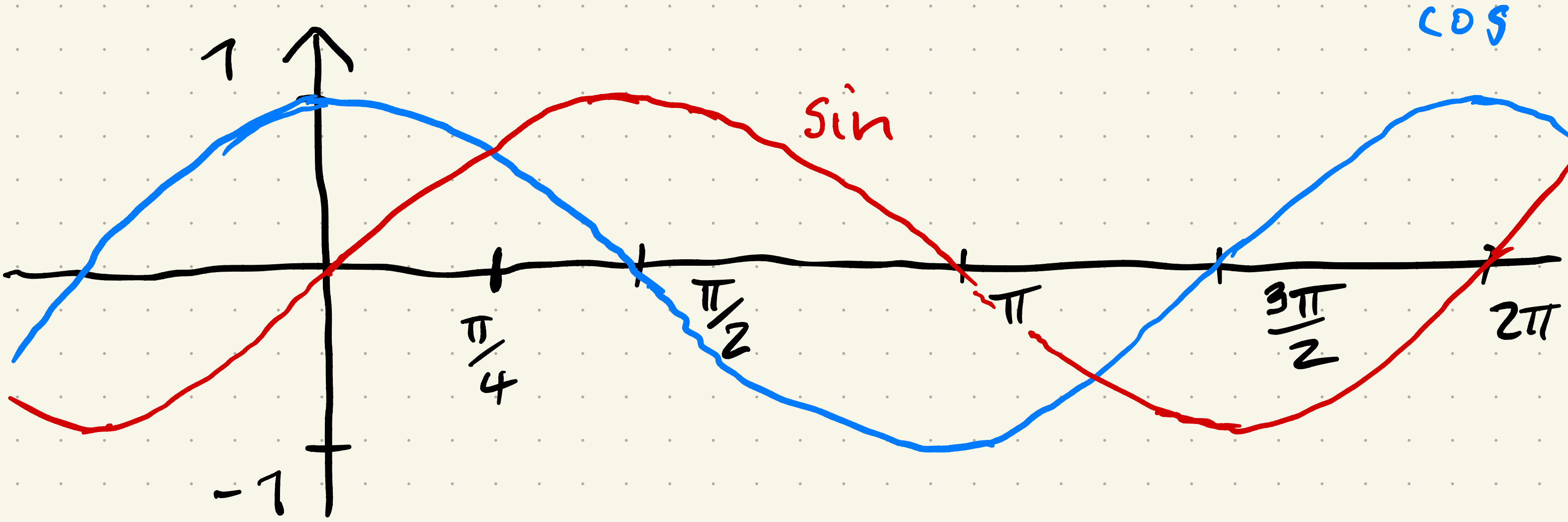
Umrechnung: $\text{Grad} \underset{:\pi \ \cdot 180}{\overset{\cdot \pi \ :180}{\rightleftarrows}} \text{Bogenmaß}$

- Auch Winkel $> 2\pi$ möglich, und < 0.

Also gibt's $\sin(x), \cos(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Also $\sin: \mathbb{R} \longrightarrow [-1;1]$

$\cos: \mathbb{R} \longrightarrow [-1;1]$



<u>Eigenschaften</u>:
- $\sin(x+2\pi) = \sin(x)$
- $\cos(x-\frac{\pi}{2}) = \sin(x)$

Weitere trigonometrische Funktionen

z. B.
- $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$
- $\sec(x) = \dfrac{1}{\sin(x)}$ usw. usw.

<u>$\sin^{-1}$</u>: ? $\quad \sin: [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \longrightarrow [-1;1]$

Dafür gibt's $\sin^{-1}$. Heißt auch arcsin („arcus sinus"), asin, ...

Nullstellen von Polynomen

- von x^2+4x+3:

  p-q-Formel: $-\frac{4}{2} \pm \sqrt{2^2-3} = -2 \pm 1 = \begin{cases} -1 \\ -3 \end{cases}$

- von $4x^2-16x+12 \stackrel{!}{=} 0 \quad |:4$

  $\Leftrightarrow \quad x^2-4x+3=0$

  p-q-Formel: $x = \begin{cases} 1 \\ 3 \end{cases}$

- von x^3-4x^2+2x+4 ①

  (keine einfache Formel, siehe wikipedia: Kardanische Formeln)

<u>Satz 5.4</u> (Wurzelsatz von Vieta)

Ist $\pm x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$

mit $a_i \in \mathbb{Z}$, dann:

Falls $x \in \mathbb{Z}$, dann ist $\pm x$ Teiler von a_0.

Also in ①: Probiere $4; 2; 1,$
$-4; -2; -1.$

x^3-4x^2+2x+4:

Probiere $\underline{x=1}$: $1-4+2+4=3\neq 0$

$\underline{x=2}$: $8-16+4+4=0.$ ✓

Dann: <u>Polynomdivision</u>.

„Polynom : (x − Nullstelle)“ :

Klappt, und liefert kleineres Polynom.

$$
\begin{array}{l}
(x^3-4x^2+2x+4):(x-2)=x^2-2x-2\\
\underline{-(x^3-2x^2)}\\
\quad -2x^2\\
\underline{\quad -(-2x^2+4x)}\\
\qquad\quad -2x\\
\underline{\qquad\quad -(-2x+4)}\\
\qquad\qquad\quad 0.
\end{array}
$$

Also $(x^3-4x^2+2x+4)=(x-2)(x^2-2x-2)$

Also Nullstellen: 2,

$1+\sqrt{3}$, $1-\sqrt{3}$ mit p-q-Formel.