1.6 Rechentricks

Terme umformen ist ein wichtiges Werkzeug in Mathe

Uni-

Dazu brauchen wir

- Potenzregeln, Logarithmen, ...,
- binomische Formeln

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$[\ (a-b)(a+b) = a^2 - b^2\ ]$$

- p-q-Formel: Lös. von $x^2+px+q=0$ sind $x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$
- Bruchrechnen

Oft ist Gleichheit zu zeigen.

2 Methoden:

- linke Seite umformen, bis die rechte Seite dasteht
- Gleichung hinschreiben, legal umformen, bis $1=1$ dasteht

Bsp. Zeigen, dass für $a \neq b$, $a, b \in \mathbb{R}$:

$$\frac{\frac{1}{a+b}\left(a^2-b^2\right)}{a-b} + a\,\frac{a-b}{ab-a^2} = 0$$

Methode 1:

linke Seite $= \dfrac{a^2-b^2}{(a+b)(a-b)} + \dfrac{a\cdot(a-b)}{a(b-a)} =$

$$= 1 + \frac{a-b}{-(-b+a)} = 1 + \frac{a-b}{-(a-b)} = 1 + \frac{1}{-1} = 0$$

Methode 2

$$\frac{\frac{1}{a+b}\left(a^2-b^2\right)}{a-b} + a\,\frac{a-b}{ab-a^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\frac{1}{\cancel{a+b}}\cancel{(a-b)}\cancel{(a+b)}}{\cancel{a-b}} + \cancel{a}\,\frac{a-b}{\cancel{a}(b-a)} = 0$$

$$\Leftrightarrow 1 + \frac{a-b}{-(-b+a)} = 0$$

$$\Leftrightarrow 1 - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 0 = 0$$

1.7 Wurzel

$\sqrt{4} = 2$; $\sqrt[3]{27} = 3$

Sowas wie $\sqrt{a+b}$ ist sperrig
$(\neq \sqrt{a} + \sqrt{b})$

Wichtiges Prinzip:
Wurzeln als Potenzen auffassen.

(Einschub: Später werden Potenzen anders erklärt als hier. Denn: a^b erklären für $a, b \in \mathbb{R}$.

- $\pi^3 = \pi \cdot \pi \cdot \pi$
- $3^\pi = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot \ldots$? Aber:)

$2^{1/2}$ muss $\sqrt{2}$, denn

$$2^{1/2} \cdot 2^{1/2} = 2^{1/2 + 1/2} = 2^1 = 2$$

$27^{1/3} = \sqrt[3]{27} = 3$, denn

$$27^{1/3} \cdot 27^{1/3} \cdot 27^{1/3} = 27^1 = 27$$

$$\boxed{\text{Allgemein: } \sqrt[n]{a} = a^{1/n}}$$

<u>Bsp:</u> Zeige: $\sqrt{\sqrt{2}+\sqrt{2}} = \sqrt{\sqrt{8}}$

$$\sqrt{\sqrt{2}+\sqrt{2}} = \sqrt{2 \cdot \sqrt{2}} = \left(2 \cdot 2^{1/2}\right)^{1/2}$$

$$= \left(2^{3/2}\right)^{1/2} = 2^{3/4}$$

$$= \left(2^3\right)^{1/4} = \left(\left(2^3\right)^{1/2}\right)^{1/2} = \sqrt{\sqrt{8}} \quad \checkmark$$

Besonders lästig: Im Nenner eines Bruchs $\sqrt{a} + \sqrt{b}$.

<u>TRICK:</u> mit $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ erweitern

(denn $(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b}) = a - b$)

<u>Bsp</u>

$$\frac{\sqrt{12} - \sqrt{20}}{\sqrt{3} + \sqrt{5}} = \frac{(\sqrt{12} - \sqrt{20})(\sqrt{3} - \sqrt{5})}{(\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{3}-\sqrt{5})}$$

$$= \frac{\sqrt{36} - \sqrt{60} - \sqrt{60} + \sqrt{100}}{3-5}$$

$$= \frac{1}{-2} \cdot \left(6 - 2\sqrt{60} + 10\right) = \underline{\underline{-8 + \sqrt{60}}}$$

1.8 Logarithmen

- Potenzen: 2 hoch 4 ist ?
- Logarithmen: 2 hoch ? ist 16

$$\log_2(16) = 4$$

Allg.: $\boxed{\log_a(b) = x \iff a^x = b}$

Bsp.: $\log_{10}(1000) = 3$

$\log_5(25) = 2 \quad \log_5(125) = 3$

$\log_{10}(60) =$ [irgendwas Krummes zwischen 1 und 2]

- Meistens: $\log_2$, $\log_{10}$, $\log_e = \ln$

mit $e = 2{,}71828\ldots$

Fakt: $\log_{10}(a) \approx$ Anzahl der Ziffern ($a \in \mathbb{N}$)

Wichtige Regeln:

$$a^{\log_a(b)} = \log_a(a^b) = b$$

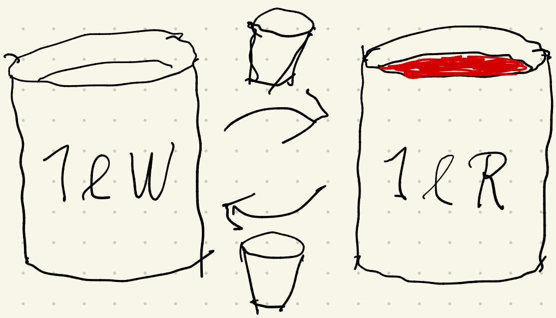
vgl.

$$(a^b)^c = a^{b \cdot c}$$

1. $\log_a(b \cdot c) = \log_a(b) + \log_a(c)$
2. $\log_a(b^c) = c \cdot \log_a(b)$
3. $\log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a(b) - \log_a(c)$
4. $\log_b(x) = \dfrac{\log_a(x)}{\log_a(b)}$

---

2 Kunst: Beweisen



mehr W in R: ||||

mehr R in W: –

gleich : –

w_1 : Menge W im W-eimer

w_2 : Menge W im R-eimer

r_1 : Menge R im R-eimer

r_2 : Menge R im W-eimer

$\circledast$ $w_1 + w_2 = 1$ $\qquad$ $w_1 + r_2 = 1$ $\oplus$

$r_1 + r_2 = 1$ $\qquad$ $r_1 + w_2 = 1$

$w_1 = 1 - w_2$ einsetzen in $\oplus$:

$$1 - w_2 + r_2 = 1 \quad \big| -1 \quad \big| +w_2$$

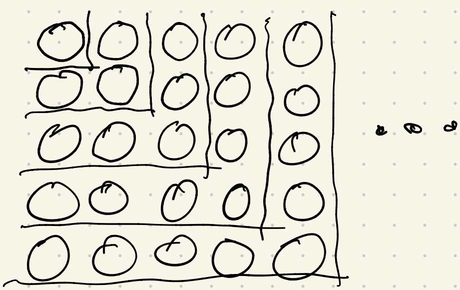
$$\Leftrightarrow \quad r_2 = w_2$$

Das war ein Beweis.

Ein anderer Beweis:

Satz $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 2k-1 = n^2$ für $n \in \mathbb{N}$

Beweis:
(oder?)



Per vollständiger Induktion:

Prinzip:

Induktionsanfang:

$n=1$: $\quad \sum_{k=1}^{1} 2k-1 = 1 = 1^2 \quad ✓$

$n \rightsquigarrow n+1$ Sei $\sum_{k=1}^{n} 2k-1 = n^2$ wahr. $\circledast$

Zeigen für $n+1$:

$$\sum_{k=1}^{n+1} 2k-1 = (n+1)^2$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\sum_{k=1}^{n} 2k-1}_{} + 2(n+1)-1 = n^2+2n+1$$

$$\overset{\circledast}{\Leftrightarrow} \quad n^2 + 2n+2-1 = n^2+2n+1$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 = 1.$$