Vorkurs Informatik

Tag 4

Vollständige Induktion

Prinzip eine Aussage $A(n)$ beweisen:

- Induktionsanfang (IA)
  $A(0)$ zeigen (bzw $A(1)$ bzw.)
- Induktionsschritt: Zeige:
(IS) wenn $A(n)$ wahr, dann auch $A(n+1)$.

Induktionsvoraussetzung (IV) ist „$A(n)$ ist wahr"

Bsp:

$$1+2+4+8+16 = 31 = 2^5-1$$

$$1+2+4+8 = 15 = 2^4-1$$

$$1+2+4 = 2^3-1$$

$$1+2 = 2^2-1$$

$$\to 1 = 2^1-1$$

$$2^0+2^1+2^2+2^3+2^4 = 2^5-1$$

Satz $\sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 1$

Bew.

IA: $n=0$: $\sum_{k=0}^{0} 2^k = 2^0 = 1 = 2^{0+1} - 1$

IS: $\sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 1$ ist wahr.

IV

z.Z. (zu zeigen)

$$\sum_{k=0}^{n+1} 2^k = 2^{n+2} - 1$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n} 2^k + 2^{n+1} = 2 \cdot 2^{n+1} - 1$$

$$\overset{IV}{\Leftrightarrow} 2^{n+1} - 1 + 2^{n+1} = 2^{n+1} + 2^{n+1} - 1 \quad \square$$

Man kann so auch z. B. zeigen: $n^2 < 2^n$:

$n = 0$ ✓

$n = 1$ ✓

$\cancel{n=2}$ $\cancel{n=3}$

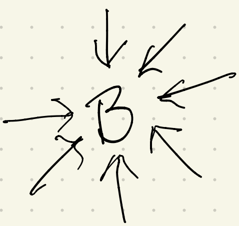
$n=5$	$25 < 32$
$n=6$	$36 < 64$
$n=7$	$49 < 128$
$n=8$	$64 < 256$
$\vdots$	$\vdots$

Wahr ist: $n^2 < 2^n$ für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{2,3,4\}$

(zeigen mit Vollst. Induktion; IA: $n=5$)

---

3 Formale Logik



$B \rightarrow M$ also $B = M$

3.1 Aussagenlogik

Elemente:
- $A, B, C, D, \ldots$: (atomare) Aussagen
- $\wedge, \vee, \neg$: und, oder, nicht

<u>Aussage:</u> A : Die Erde ist eine Scheibe

B: $\overbrace{\text{Bier ist gesund}}^{=C}$ und $\underbrace{\text{Bier ist lecker}}_{=:D}$

B ist von der Form: $C \land D$ $\circledast$

<u>Fragen hier</u> $\neg(\neg C \lor \neg D) \overset{?}{=} C \land D$

<u>Festlegung</u>: • Abstrakt sind atomare Aussagen etwas, das entweder wahr oder falsch sein kann.

•

A	B	$A \land B$	$A \lor B$	$\neg A$
W	W	W	W	F
W	F	F	W	F
F	W	F	W	W
F	F	F	F	W

Zu ⊛:

C	D	$C \wedge D$	$\neg C \vee \neg D$	$\neg(\neg C \vee \neg D)$
W	W	W	F	W
W	F	F	W	F
F	W	F	W	F
F	F	F	W	F

<u>Fragen</u>:
- Sind zwei Aussagen gleichbedeutend? (s.o.)
- Ist eine Aussage
  - erfüllbar? (also mind. ein W)
  - Tautologie; d.h. für alle Mögl. W

<u>Bsp</u> Tautologie: $A \vee \neg A$

A	$A \vee \neg A$
W	W
F	W

„Ich nehme Bifteki oder Hirtenkäse"

entweder oder; bzw XOR ($\oplus$; $\sim$)

Außerdem: $\Rightarrow$ und $\Leftrightarrow$

A	B	A XOR B	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$	
W	W	F	W	W	W
W	F	W	F	F	F
F	W	W	W	F	W
F	F	F	W	W	W

XOR: exklusives oder

$\Rightarrow$: „daraus folgt" (Implikation)

$\Leftrightarrow$: „genau dann, wenn" (Äquivalenz)

<u>Fakt</u>
- $A \Rightarrow B = \neg A \vee B$
- $A \text{ XOR } B = \neg(A \Leftrightarrow B)$
- $A \Leftrightarrow B = (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$

Das liefert eine weitere Beweismethode

<u>Lemma 3.1</u> (Kontraposition)

$$A \Rightarrow B \;=\; (\neg B) \Rightarrow (\neg A)$$

Manchmal nützlich. z.B.

<u>Lemma 3.2</u> Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$n^2 \text{ gerade} \Rightarrow n \text{ gerade}$$

<u>Bew.</u> Wir nutzen Lemma 3.1:

z.z. n ungerade $\Rightarrow n^2$ ungerade

n ungerade, also $n = 2 \cdot k + 1$ $(k \in \mathbb{N})$

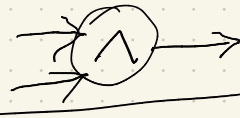
$$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$$
$$= \underbrace{4(k^2+k)}_{\text{gerade}} + 1 \qquad \square$$

... liefert noch ein Beweisprinzip:

<u>Beweis durch Widerspruch</u>

Beweise A so: Nimm $\neg A$, forme das um mit Äquivalenzen, bis da steht $0 = 1$ (oder was anderes falsches)

In Informatik taucht Aussagenlogik häufig auf, z.B. bei Schaltkreisen:

Transistor: Bauteil 

Formale Logik $\neq$ reale Wahrheit

- Es ist leicht, paradoxe Aussagen zu treffen. z.B.

  Der nächste Satz ist gelogen.
  Der vorige Satz ist wahr.

- „Hanging paradox"
  - Hinrichtung Mo oder Di oder Mi oder Do oder Fr um 12
  - unvorhersehbar

3.2 Quantoren (Prädikatenlogik)

(first order logic)

Weitere Bausteine:

$\forall$ für alle

$\exists$ es existiert

$n, x, \ldots$ Variablen,

Damit $\forall n \in \mathbb{N} : \sum_{k=1}^{n} 2k-1 = n^2$