Vorkurs Informatik

Tag 5

9.10.2020

3.2 Quantorenlogik

(aka Prädikatenlogik aka first order logic)

Wie Aussagenlogik, nur mit

- Variablen $n, x, \dots$
- $\forall$ „für alle"
- $\exists$ „es gibt"

Quantoren

- Prädikate: $P(n)$; $P(n,m)$,

<u>Bsp</u> $\forall n \in \mathbb{N} : n+1 \in \mathbb{N}$ (wahr)

$\forall n \in \mathbb{N} : n-1 \in \mathbb{N}$ (falsch)

$\exists n \in \mathbb{N} : n^3 = 343$ (wahr)

$(n=7)$

Nur ein toter weißer Weißer ist ein guter weißer

$W := \{\text{alle Weißen}\}$

$\forall w \in W : w \text{ gut} \Rightarrow w \text{ tot}$

Bsp: Auf jedes Töpfchen passt ein Deckelchen

$T := \{\text{alle Töpfe}\}$

$D := \{\text{alle Deckel}\}$

$P(d,t) := d \text{ passt auf } t$

$$\forall t \in T \; \exists d \in D : P(d,t)$$

Und nicht:

$$\exists d \in D \; \forall t \in T : P(d,t)$$

„Universaldeckel"

$$\exists t \in T \; \forall d \in T : P(d,t)$$

„Universaltopf"

$$\exists d \in D \; \exists t \in T : P(d,t)$$

„nur ein Pärchen"

$$\exists t \in T \; \exists d \in D : P(d,t)$$

<u>Fazit:</u> Reihenfolge verschiedener Quantoren ist wichtig! ($\forall \ldots \exists \ldots$)

Reihenfolge gleicher Quantoren ist egal. ($\forall \ldots \forall \ldots$)

C : {alle Chinesen}

M : {aller Menschen}

$\forall c \in C : c \in M$ alle Chinesen sind Menschen

$\neg(\forall c \in C : c \in M)$ Nicht alle Chinesen sind Menschen

$\circledast$

<u>Formal:</u> $\neg\forall \ldots$ wird zu $\exists \ldots \neg$

$\neg\exists$ wird zu $\forall \ldots \neg$

$\circledast$: $\exists c \in C : \neg(c \in M)$

$\exists c \in C : c \notin M$ „es gibt mind. einen Chinesen, der kein Mensch ist."

Negation einer wahren Aussage ist falsch. u.U.

$$\neg(\forall w \in W : w \text{ gut} \Rightarrow w \text{ tot})$$

$$\equiv \exists w \in W \; \neg(w \text{ gut} \Rightarrow w \text{ tot})$$

$$\equiv \exists w \in W \; \neg(\neg w \text{ gut} \vee w \text{ tot})$$

$$\equiv \exists w \in W \; \neg\neg w \text{ got} \wedge \neg w \text{ tot}$$

(de Morgan)

$$\equiv \exists w \in W \; w \text{ gut} \wedge w \text{ nicht tot}$$

$$\neg(\forall t \in T \; \exists d \in D : P(d,t))$$

$$\equiv \exists t \in T \; \neg \exists d \in D : P(d,t)$$

$$\equiv \exists t \in T \; \forall d \in D : \neg P(d,t)$$

„Es gibt einen Topf, so dass alle Deckel nicht auf ihn passen."

4 Folgen & Reihen

Dazu:

<u>Def 4.1</u>: $x \in \mathbb{R}$; dann

$$|x| := \begin{cases} x & \text{falls } x \geq 0 \\ -x & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

<u>Bsp</u>: $|2| = 2$; $|14| = 14$;

$|-3| = -(-3) = 3$

<u>Lemma 4.1</u> (Dreiecksungleichung)

$\forall x, y \in \mathbb{R}: \ |x+y| \leq |x| + |y|$

<u>Bew</u> z.z $|x+y| \leq |x| + |y| \quad \Big| \cdot^2$

$$\Leftrightarrow \ |x+y|^2 \leq (|x|+|y|)^2$$

$$\Leftrightarrow \ (x+y)^2 \leq |x|^2 + 2|x|\cdot|y| + |y|^2$$

$$\Leftrightarrow \ x^2 + 2xy + y^2 \leq x^2 + 2|x||y| + y^2 \quad \Big| -x^2, -y^2$$

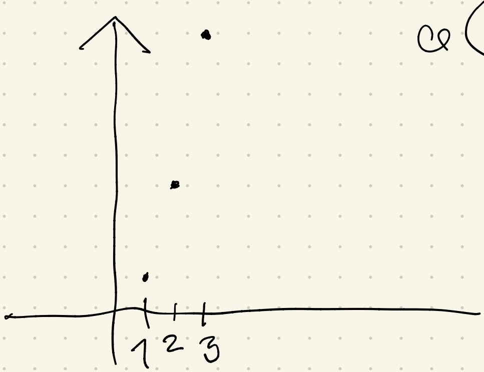
$$\Leftrightarrow \ 2xy \leq 2|x||y| \quad |:2$$

$$\Leftrightarrow \ x \cdot y \leq |x|\cdot|y| \quad \text{wahr} \quad \square$$

Def 4.2 Eine Folge ist eine Abbildung $a: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

Also gibt's z.B. $a: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$,

$$a(n) = n^2$$



$a(1) = 1$
$a(2) = 4$
$a(3) = 9$
$a(4) = 16$

ⓐ $1, 4, 9, 16, \ldots, n^2, \ldots \longrightarrow \infty$ N

ⓑ $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \ldots, \frac{1}{n} \ldots \longrightarrow 0$ K

ⓒ $1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, 1, \frac{1}{2}, \ldots$ N

ⓓ $-1, 1, -1, 1, -1, \ldots (-1)^n \ldots$ N

• Kein Grenzw

ⓔ $-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \ldots \frac{(-1)^n}{n}, \ldots \longrightarrow 0$ K

ⓕ $2, 2, 2, 2, 2, \ldots 2 \longrightarrow 2$ K

Grenzwerte?

N: nicht konvergent
K: konvergent

Def 4.3 Eine Folge $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$, kurz $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, heißt <u>Konvergent</u> mit <u>Grenzwert</u> $a \in \mathbb{R}$, falls

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n_0 : |a_n - a| < \varepsilon$$

epsilon

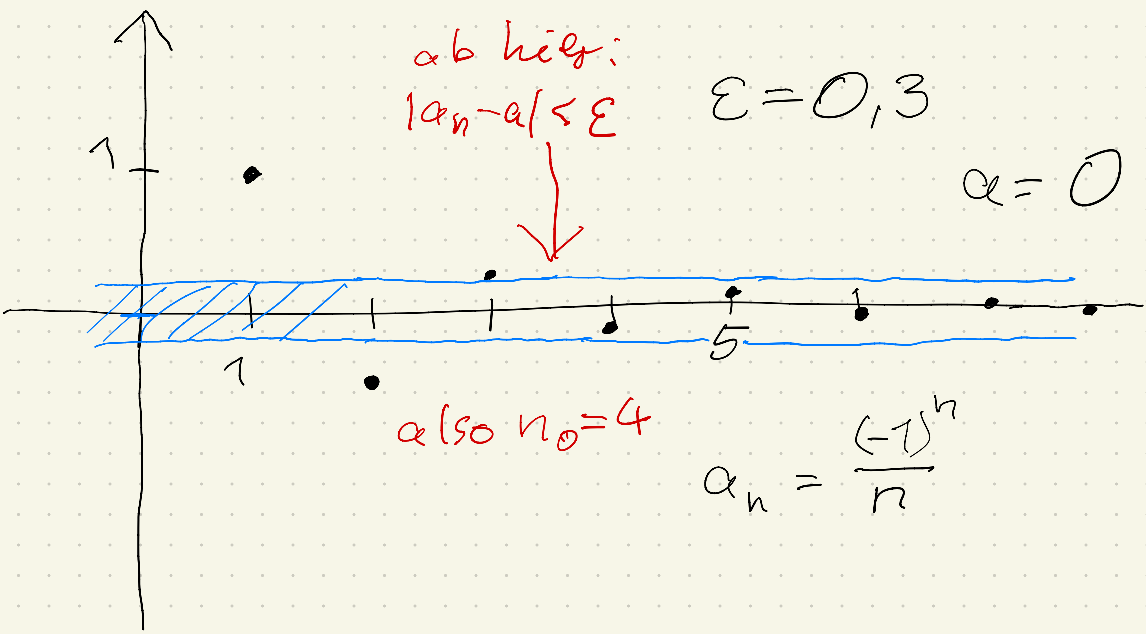
---

a_n : die Folgenglieder

a : der Grenzwert

ε : kleine Zahl; kleine Abweichung

n_0 : ab hier darf die Abweichung von a_n zu a kleiner als ε



Später: Teilfolgen betrachten;

Satz $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt

$\Rightarrow (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ enthält konvergente Teilfolge.

„Mehrere Grenzwerte" (Bsp d, e)

heißen Häufungspunkte

Def: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hat Grenzwert a, kurz:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a$$

Lemma 4.4 $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

Vorüberlegung: $|a_n - a| < \varepsilon$

hier: $\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon$

$$\frac{1}{n} < \varepsilon \iff \frac{1}{\varepsilon} < n$$

Also $n_0 := \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil$ ← aufrunden

Beweis Sei $\varepsilon > 0$ Wähle $n_0 := \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil$

Sei $n \geq n_0$

Dann $|a_n - a| = \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} \overset{?}{<} \varepsilon$

z.z. $\frac{1}{n} < \varepsilon \quad | \cdot n \quad | : \varepsilon$

$\Leftrightarrow \frac{1}{\varepsilon} < n$ wahr, wenn

$$\frac{1}{\varepsilon} \leq \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil = \underline{\underline{n_0 \leq n}}$$

$\square$