Vorkurs Informatik

Tag 6

12.10.

Recall: Konvergenz von Folgen

$\lim_{n \to \infty} a_n = a$ heißt

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n \geq n_0 \; |a_n - a| < \varepsilon$

Nachweis Konvergenz durch

1. Definition
2. Konvergenzsätze

zu 1.:

Lemma 4.7: $q \in \mathbb{R}, \; -1 < q < 1$

$a_n = q^n$ Dann $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$

Vorüberlegung: wir wollen $(q > 0)$

$|q^n - 0| = q^n < \varepsilon \;|\; \log_2$

$\Leftrightarrow \log_2(q^n) < \log_2(\varepsilon)$

$\Leftrightarrow \quad n \cdot \log_2(q) < \log_2(\varepsilon) \quad \Big| : \log_2(q)$

$\Leftrightarrow \quad n > \dfrac{\log_2(\varepsilon)}{\log_2(q)}$

also $n_0 = \left\lceil \dfrac{\log_2(\varepsilon)}{\log_2(q)} \right\rceil$ ← aufrunden

<u>Bew</u> Sei $\varepsilon > 0$; $0 < q < 1$

Sei $n_0 = \left\lceil \dfrac{\log_2(\varepsilon)}{\log_2(q)} \right\rceil$

Dann $|a_n - a| = |q^n - 0|$

$= q^n \overset{!}{<} \varepsilon$

$\Leftrightarrow \log_2(q^n) < \log_2(\varepsilon)$

$\Leftrightarrow n \cdot \log_2(q) < \log_2(\varepsilon) \quad \Big| : \log_2(q)$

$\Leftrightarrow n > \dfrac{\log_2(\varepsilon)}{\log_2(q)}$

wahr, denn $n \geq n_0 \geq \dfrac{\log_2(\varepsilon)}{\log_2(q)}$ ✓

Falls $q = 0$: $q^n = 0$, $\lim_{n \to \infty} 0 = 0$ ✓

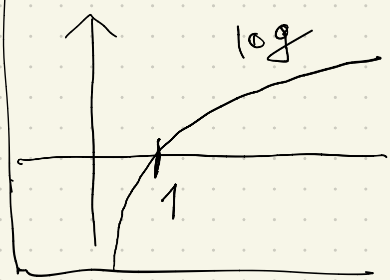
Abschweifung:

$2 < 4 \quad \Big| :(-2)$

$-1 > -2$

$2^{?} = q$

$\log_2\left(\frac{1}{2}\right) = -1$



Falls $-1 < q < 0$:

$$|q^n - 0| = |q^n| = |q|^n \overset{!}{<} \varepsilon$$

Wie oben, denn $0 < |q| < 1$ $\square$

Zu 2.: Konvergenzsätze, z. B.

<u>Satz 4.9</u> Sind $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. Dann

- $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b$
- $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$, falls $b \neq 0$, $b_n \neq 0$ für alle n

<u>Anwendung</u>: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n}$

$$\overset{\text{Satz}}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \cdot 0 = 0.$$

<u>Satz (Einschnürungssatz)</u> Ist $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$, $\forall n \in \mathbb{N}: a_n \leq b_n \leq c_n$, dann $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$

Bsp: $a_n = 0$; $b_n = \frac{1}{n^3}$, $c_n = \frac{1}{n}$

dann $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0 = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}$

Es ist $a_n \le b_n \le c_n$, denn

$$0 \le \frac{1}{n^3} \le \frac{1}{n} \quad \Big| \cdot n^3$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 \le 1 \le n^2 \quad \text{wahr.}$$

Damit $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} = 0$

Unendliche Reihen

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2} n(n+1)$$, bisher. Jetzt:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \underbrace{\underbrace{\underbrace{1 + \frac{1}{2}}_{3/2} + \frac{1}{4}}_{7/4} + \frac{1}{8}}_{15/8} + \dots = 2$$

Bsp $\sum_{k=1}^{\infty} k = 1+2+3+4+5+\dots = +\infty$

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k = 1-1+1-1+1-1+ \dots = \text{divergent}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots \frac{1}{6} = \text{divergent}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \dots = e = 2{,}71828\dots$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots = \frac{\pi^2}{6}$$

„Reihe $= a$" heißt was?

Trick: Folge der Partialsummen

$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k \right)_{n \in \mathbb{N}}$ ansehen.

z.B. bei $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k = 1-1+1-1+1-1 \dots$

$a_0 = 1$; $a_1 = 1-1 = 0$; $a_2 = 1-1+1 = 1$

$a_3 = 1-1+1-1 = 0$; usw.

Folge $1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots$ divergent

Bsp: $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 2$

Recall: $\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ ← endliche geometrische Reihe

Satz 4.11 Sei $q \in \mathbb{R}$, $-1 < q < 1$. Dann gilt $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$

Bew: $\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ wegen

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} q^k = \lim_{n\to\infty} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} =$$

$$\underset{(\text{Satz } 4.9)}{=} \frac{1-\lim_{n\to\infty} q^{n+1}}{1-q} = \frac{1}{1-q} \quad \square$$

$$\lim_{n\to\infty} q^{n+1} = \lim_{n\to\infty} q^n \cdot \lim_{n\to\infty} q = 0 \cdot q = 0$$

Damit $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{1-1/2} = \frac{1}{1/2}$

$= 2.$

Das hier: $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$

$\uparrow$ heißt „unterliegende Folge"

<u>Beobachtung</u>

Falls $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergent, dann

muss $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$.

Gilt auch: $\left(\lim_{k\to\infty} a_k = 0 \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ konvergent} \right)$?

Nein: Gegenbeispiel $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ ist divergent.

<u>Satz 4.12</u> $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ ist divergent. (Die heißt <u>harmonische Reihe</u>)

<u>Bew.:</u>

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \dots$$

$$\geq 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}}_{} + \underbrace{\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}}_{} + \underbrace{\frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \dots}_{}$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots$$

$$= \infty$$

$\square$

Fakten: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ divergent; aber

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ konvergent $\left(\frac{\pi^2}{6} \right)$

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{1{,}01}}$ konvergent

Fakt:
- Bei Folgen ist die Frage „konvergent?" gleich schwierig wie „Grenzwert?"
- Bei Reihen ist „konvergent?" oft viel einfacher zu beantworten als „Grenzwert?"

Drei wichtige Reihen:
- harmonische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$
- geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$
  (Grenzwert leicht!)
- Exponentialreihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e = 2{,}71\ldots$

allgemeiner: $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!} = e^a$ (für $a \in \mathbb{R}$)

(unten $a=1$: $1^k = 1$; s.o.)

$a = 0$: $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{0^k}{k!} = \frac{0^0}{0!} + \underbrace{\frac{0^1}{1!}}_{0} + \underbrace{\frac{0^2}{2!}}_{0} + \underbrace{\frac{0^3}{3!}}_{0} + \dots$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{0^k}{k!} = e^0 = 1$$

Was ist $0!$: $= 1$ (s.o.)

Also muss hier $0^0 = 1$ (also: hier definieren wir: $0^0 := 1$)

Sonst: $0^0 = 0^{1-1} = \frac{0^1}{0^1}$ nicht definiert, bzw kann alles sein.

(Nebenbei: $\frac{a}{0}$: NaN im Computer)

Bosslevel: Potenzreihen

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \quad (x \in \mathbb{R}) \text{ ist eine Funktion!}$$