Vorkurs Informatik

Tag 7

Nachtrag zu Kap. 3, Cartoon:

$P(x,y)$: x liebt y

b : „baby"

m : „me"

$\forall x : P(x,b)$ I

$\forall x : P(b,x) \Rightarrow x = m$ II

in I $x=b$ einsetzen: $P(b,b)$ wahr

in II $x=b$ " : $P(b,b) \Rightarrow \underline{\underline{b=m}}$

---

5 Abbildungen, aka Funktionen

Abbildung: eindeutige Zuordnung eines Elements in Y zu jedem $x \in X$. ← Menge

$f : X \longrightarrow Y$ ← Zielbereich

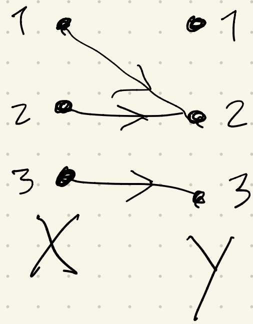
Output

Definitionsbereich

Input

Bsp.: $f:\{1,2,3\} \longrightarrow \{1,2,3\}$

$f(1)=2,\ f(2)=2,\ f(3)=3$



oder $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$g(x) = x^2$

Wichtig: Abb. ist erklärt durch Def.-bereich, Ziel-bereich <u>und</u> die Abb.-vorschrift

Bei f kommen nur 2 & 3 als Werte dran, bei g nur $\mathbb{R}_0^+$. Das hat einen Namen:

$$\text{Bild}(f) = \{y \in Y \mid \exists x \in X : f(x) = y\}$$

Allgemeiner: Ist $A \subseteq X$

„Bild von A unter f": $f(A)$

$$f(A) = \{y \in Y \mid \exists x \in X : f(x) = y\}$$

Bsp. f wie oben

$$\mathrm{Bild}(f) = \{2,3\}$$

und $f(\{1,2\}) = \{2\}$ $\quad (A = \{1,2\})$

g wie oben: $\mathrm{Bild}(g) = \mathbb{R}_0^+ = g(\mathbb{R})$

$$g([1,2]) = [1,4]$$

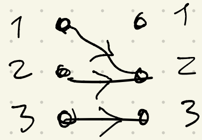
Allg.: $\mathrm{Bild}(f) = f(X)$

Und umgekehrt:

Urbild von $B \subseteq Y$ unter f:

$$f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}$$

Bsp f wie oben:



$$f^{-1}(\{2\}) = \{1,2\}$$

$$f^{-1}(\{1,2\}) = \{1,2\}$$

$$f^{-1}(\{1\}) = \emptyset \quad \leftarrow \text{leere Menge}$$

g wie oben; $\quad g^{-1}([1,4]) = [1,2] \cup [-2,-1]$

$(g(x) = x^2)$

„g^{-1}" heißt hier <u>nicht</u> $\frac{1}{g}$ (vgl. Potenzgesetze)

auch nicht Umkehrfunktion (vgl. 5.3)

Den Unterschied sieht man: $g^{-1}(A)$, also hier: Urbild

Menge!

<u>5.2 Injektiv, surjektiv, bijektiv</u>

<u>Def 5.1</u> $f: X \to Y$ heißt

- <u>injektiv</u> $\forall x, y \in X: f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$

  „jeder Funktionswert kommt höchstens einmal dran"

- <u>surjektiv</u> $\forall y \in Y \; \exists x \in X: f(x) = y$

  „alle Funktionswerte kommen dran"

- <u>bijektiv</u>: wenn f injektiv & surjektiv ist.

Bsp: $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = x^2$

nicht injektiv $(g(-1) = 1 = g(1))$

nicht surjektiv $(g(x) \neq -1)$

nicht bijektiv

Man kann g aber surjektiv „machen"

Bilde $\tilde{g}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+ \leftarrow$ Bild(g)

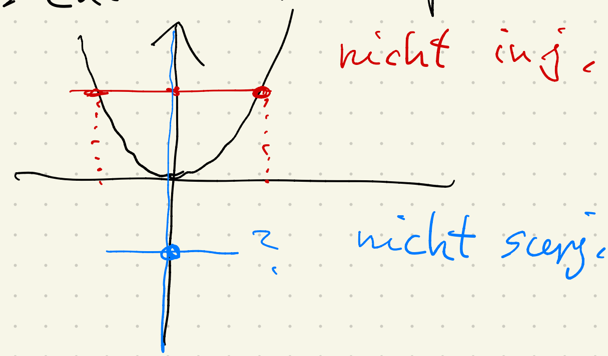
... und auch injektiv:

$$\hat{g}: \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{R}_0^+,\quad g(x) = x^2$$

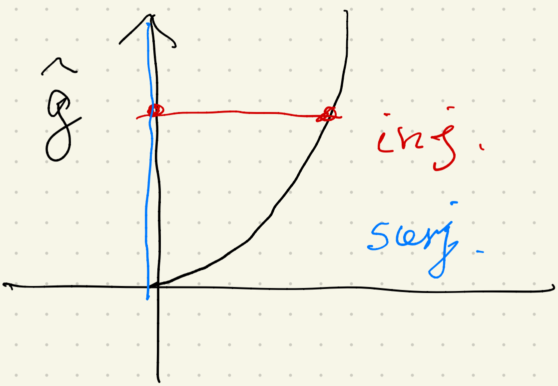
$\hat{g}$ ist bijektiv.

Injektiv & surjektiv sieht man Graphen der Funktion:

g



$\hat{g}$



Def. $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$

Dann heißt $g \circ f : X \to Z$

$$g \circ f(x) = g(f(x))$$

Bsp: $f: \{\text{Techfakstudis}\} \to \mathbb{N}$

$g: \mathbb{N} \to \{1{,}0;\ 1{,}3;\ 1{,}7,\ \ldots 4;\ \text{n.b.}\}$

nicht bestanden

$f(s) = \text{Matrikelnummer}$

$g(m) = \text{Note in A\&D}$

$g \circ f(s) = \text{Note}$

$f \circ g$? $\quad f(\text{Note}) = $?

Def 5.2: $f: X \to X$; $f(x) = x$

heißt id_X. („Identität auf X")

Damit:

5.3 Umkehrfunktion

f^{-1} so, dass f^{-1} die Wirkung von f aufhebt. Formal:

Def 5.3 $f: X \to Y$ bijektiv.

Dann heißt $g: Y \to X$ Umkehrfunktion von f, falls

$$g \circ f = id_X \text{ und } f \circ g = id_Y$$

Bezeichnung: g heißt f^{-1}

$$\hat{g}: \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{R}_0^+, \quad \hat{g}(x) = x^2$$

$$\hat{g}^{-1}: \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{R}_0^+, \quad \hat{g}^{-1}(x) = \sqrt{x}$$

denn $\hat{g}^{-1}(\hat{g}(x)) = \sqrt{x^2} = x$

$\hat{g}(\hat{g}^{-1}(x)) = (\sqrt{x})^2 = x.$

Bsp: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \; f(x) = x+1$

$f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad f^{-1}(x) = x-1$ ✓

$$g : \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{R}_0^+ , \quad g(x) = \sqrt[3]{x}$$

$$g^{-1} : \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{R}_0^+ ; \quad g^{-1}(x) = x^3$$

- $h : \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow [2, +\infty[\; ; \; h(x) = \sqrt[3]{x+1} + 1$

$$\cancel{h^{-1} : [2, +\infty[\to \mathbb{R}_0^+ ; \; h^{-1}(x) = (x+2)^3}$$

$$\cancel{h^{-1}(h(x)) = \left(\left(\sqrt[3]{x+1} + 1\right) + 2\right)^3}$$

$$\cancel{= x+1 + (x+1)^{2/3} \cdot 3 + (x+1)^{1/3} \cdot 3 + \dots}$$

$$\cancel{\dots \neq x}$$

$$h^{-1} : [2, +\infty[\to \mathbb{R}_0^+ ; \; h^{-1}(x) = (x-1)^3 - 1$$

denn $h^{-1}(h(x)) = \left(\left(\sqrt[3]{x+1} + 1\right) - 1\right)^3 - 1$

$$= \left(\sqrt[3]{x+1}\right)^3 - 1 = x+1-1 = \underline{\underline{x}} \; \checkmark$$

(und $h(h^{-1}(x)) = \dots$)

- $\tilde{f} : \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow]0; 1] \; ; \; \tilde{f}(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$

$$\tilde{f}^{-1} :]0, 1] \to \mathbb{R}_0^+ ; \; \tilde{f}^{-1} = x^2 + 1$$

$$\sqrt{\frac{1}{x}-1} = \tilde{f}^{-1}(x)$$

$$\tilde{f}^{-1}(\tilde{f}(x)) = \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{x^2+1}} - 1}$$

$$= \sqrt{x^2+1-1} = \sqrt{x^2} = x.$$

$$\tilde{g}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ ;\ \tilde{g}(x) = \left(\frac{e^{x^2+1} + \sqrt{x^3}}{\frac{1}{x^2+1} + x^{10} + 7}\right)^3$$

$$\tilde{g}^{-1} = ?$$

Systematisch so: f^{-1} bestimmen

Schreibe $f(x) = y$;

umformen, bis da steht $x = f^{-1}(y)$

hier kein x mehr

Bsp: $\tilde{f}(x) = \frac{1}{1+x^2}$

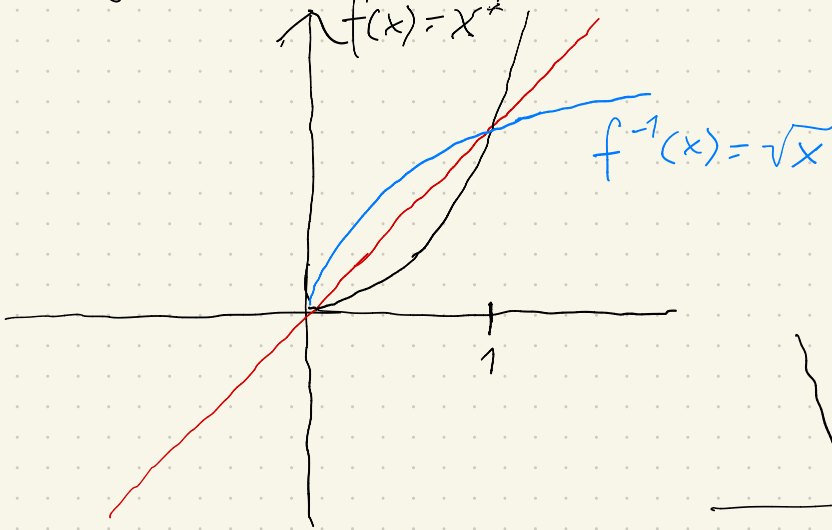
$$\frac{1}{1+x^2} = y \quad \Big|\ \cdot(1+x^2) \quad \Big|\ : y$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{y} = 1+x^2 \quad \text{bzw} \quad 1+x^2 = \frac{1}{y} \quad \Big|\ -1 \quad \Big|\ \sqrt{\ }$$

$$\Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{1}{y}-1} = f^{-1}(y)$$

Also $\tilde{f}^{-1}(x) = \sqrt{\frac{1}{x} - 1}$

- Berechnen: s.o.
- Anschaulich: Graph von f gespiegelt an $\{(x,x) \mid x \in \mathbb{R}\}$



Nicht: