Informatikvorkurs

Tag 8

14.10.'20

Gestern: Umkehrfunktion f^{-1} zu f

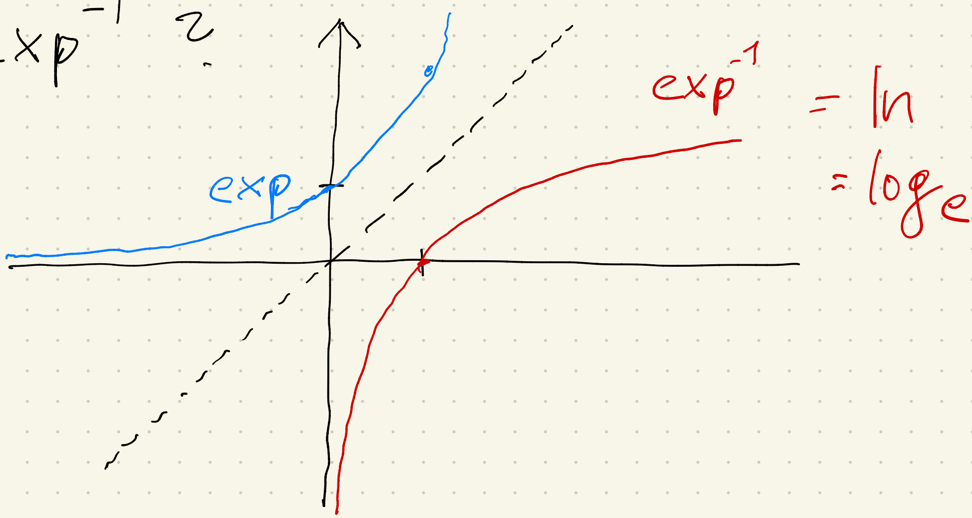
tut dies: $f^{-1}(f(x)) = x$

Betrachte: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$

Zwei Sichtweisen: $e = 2{,}71828\ldots$

- e^x (klappt nur, falls $x \in \mathbb{Q}$)
- $\exp(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ (klappt für $x \in \mathbb{R}$!)

$\exp^{-1}$?



Die Logarithmusfunktion ist <u>definiert</u> als $\exp^{-1}$, heißt $\ln$ (ist $\log_e$)

Deshalb gilt:

$$\boxed{\begin{aligned} &e^{\ln(x)} = \exp(\ln(x)) = x \quad \text{und} \\ &\ln(e^x) = \ln(\exp(x)) = x \end{aligned}}$$

Obacht: $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ (bijektiv!)

als $\ln : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ (bijektiv!)

Deshalb:

- $\ln(1) = 0$; denn $e^0 = 1$; bzw
  $\ln(1) = \ln(e^0) = 0$
- $\ln(e) = 1$; denn $e^1 = e$,
  also $\ln(e) = \ln(e^1) = 1$
- $\ln\left(\frac{1}{e}\right) = -1$; denn $e^{-1} = \frac{1}{e}$,
  also $\ln\left(\frac{1}{e}\right) = (\ln(e^{-1})) = -1$

Als Potenzreihe: tricksen: ($\ln(0)$ gibt's nicht) also $\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}$

5.4 Prominente Funktionen

1. Polynome

Allg.: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$;

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

Also z.B. $7x^4 - 3x^3 + 0{,}1 \cdot x + \pi$,

oder $x^2 + 1$, $x^3 - 2x$

Nächste Stufe: gebrochen rationale Funktionen: $\dfrac{\text{Polynom 1}}{\text{Polynom 2}}$; also

z.B. $\dfrac{x^2-1}{x+1}$ oder $\dfrac{x^3+5x-1}{x^7+x^2}$

$$= \frac{(x-1)\cancel{(x+1)}}{\cancel{x+1}} = x-1$$

Dazu Polynomdivision:

Auch nützlich für:

Nullstellen von Polynomen finden.

z.B. $x^2 - 2x - 1 = 0$ I

oder $x^3 - 4x^2 + 2x + 4 = 0$ II

zu I: p-q-Formel: $-\frac{-2}{2} \pm \sqrt{1-(-1)}$

$= +1 \pm \sqrt{2}$

zu II: Raten: $x = 2$

Es gibt keine einfache „allgemeine p-q-Formel" für $x^3 + \ldots$ oder" $x^4 + \ldots$

(wikipedia: Cardano formula
Cardanische Formeln)

und überhaupt keine für $x^5 + \ldots$

Satz 5.4 (Wurzelsatz von Vieta)

Hat ein Polynom der Form

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

$(a_i \in \mathbb{Z})$ eine Nullstelle $x_0 \in \mathbb{Z}$, dann ist x_0 Teiler von a_0 (+ & −)

(Falls $a_0 = 0$: eine Nullstelle $x = 0$;
z.B. $x^7 + 10x^5 + x^3 + 2x$)

Im Bsp oben: II $x^3 - 4x^2 + 2x + 4$

Teste $1, -1, 2, -2, 4, -4$, Einsetzen:

$1^3 - 4 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 + 4 = 3 \neq 0$ ✗

$(-1)^3 - 4(-1)^2 + 2 \cdot (-1) + 4 \neq 0$ ✗

$2^3 - 4 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 + 4 = 0$ 2 ✓

Jetzt Polynomdivision; hier:

$\boxed{\text{„Polynom durch } x - \text{Nullstelle"}}$

$$
\begin{array}{l}
(x^3 - 4x^2 + 2x + 4) : (x - 2) = x^2 - 2x - 2 \\
-(x^3 - 2x^2) \\
\hline
\quad -2x^2 + 2x + 4 \\
\quad -(-2x^2 + 4x) \\
\hline
\qquad -2x + 4 \\
\qquad (-2x + 4) \\
\hline
\qquad\quad 0
\end{array}
$$

(Hier geht die Division auf, wie $12 : 4$)

Damit ist $x^3 - 4x^2 + 2x + 4$

$$= (x-2)(x^2-2x-2) \overset{?}{=} 0$$

also $x = 2$ oder $-\frac{-2}{2} \pm \sqrt{1-(-2)}$

$$= 1 \pm \sqrt{3}$$

Nullstellen des Polynoms also

$2,\ 1+\sqrt{3},\ 1-\sqrt{3}$.

Oben: Division ging glatt auf (wie 12 : 4)

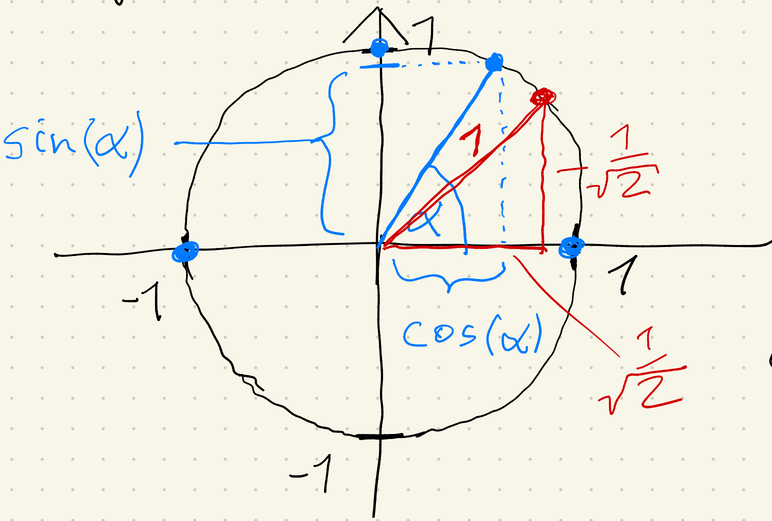
Jetzt: nicht (wie 10 : 3)

<u>Bsp.</u>

$$\begin{aligned}
&(x^3 - 4x^2 + 2x + 4) = (x-1)\cdot(x^2 - 3x - 1) + \frac{3}{x-1} \\
&\underline{-(x^3 - x^2)} \\
&\qquad -3x^2 + 2x + 4 \\
&\qquad \underline{-(-3x^2 + 3x)} \\
&\qquad\qquad -x + 4 \\
&\qquad\qquad \underline{-(-x + 1)} \\
&\qquad\qquad\quad 3
\end{aligned}$$

5.2 Sinus, Cosinus & Co

Eigentlich werden die als Potenzreihen definiert; aber: hier so



$\sin(90°) = 1$

$\cos(90°) = 0$

$\sin(180°) = 0$

$\cos(180°) = -1$

$$\sin(720°) = \sin(0°) = \sin(360°) = 0$$

$$\cos(-360°) = \cos(0°) = \cos(360°) = 1$$

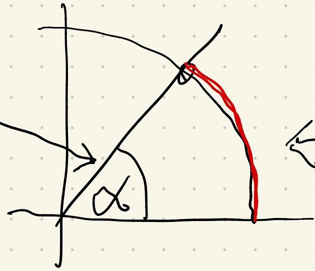
$$\sin(45°) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \cos(45°)$$

$$\cancel{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \neq 1}$$

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{2}{4} + \frac{2}{4} = 1 \checkmark$$

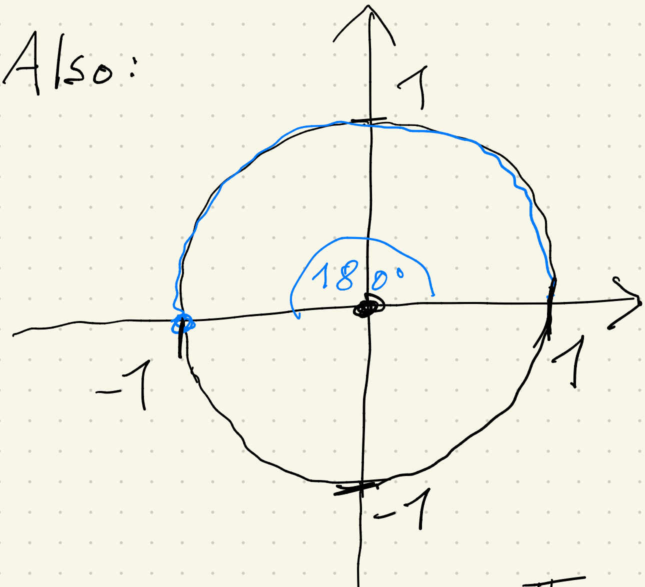
An der Uni werden Winkel anders gemessen, im <u>Bogenmaß</u>

Statt dem Winkel



diese Länge

Also:

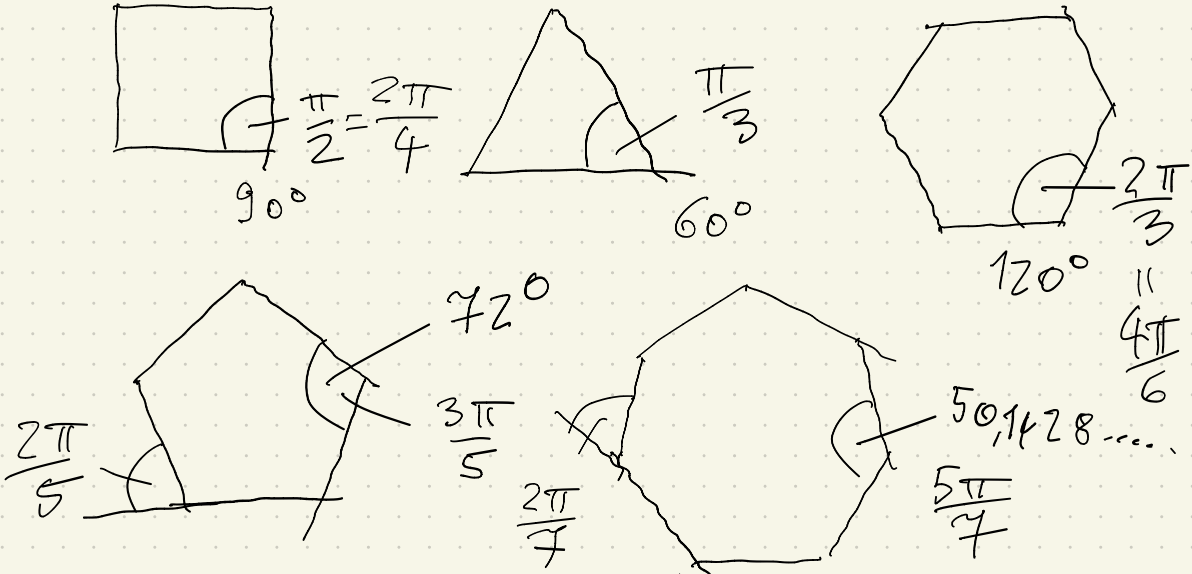


Grad	Bogenmaß
180°	π
360°	2π
90°	$\frac{1}{2}\pi$
60°	$\frac{1}{3}\pi$
45°	$\frac{1}{4}\pi$
...	

<u>Umrechnung</u>

$$\begin{tikzcd} \text{Grad} \arrow[r, bend left, "\cdot \frac{\pi}{180}"] & \text{Bogenmaß} \arrow[l, bend left, "\cdot \frac{180}{\pi}"] \end{tikzcd}$$

Manche Winkel sind so sogar einfacher:



- Innenwinkel eines regulären n-Ecks:

$$\frac{(n-2)\pi}{n}$$