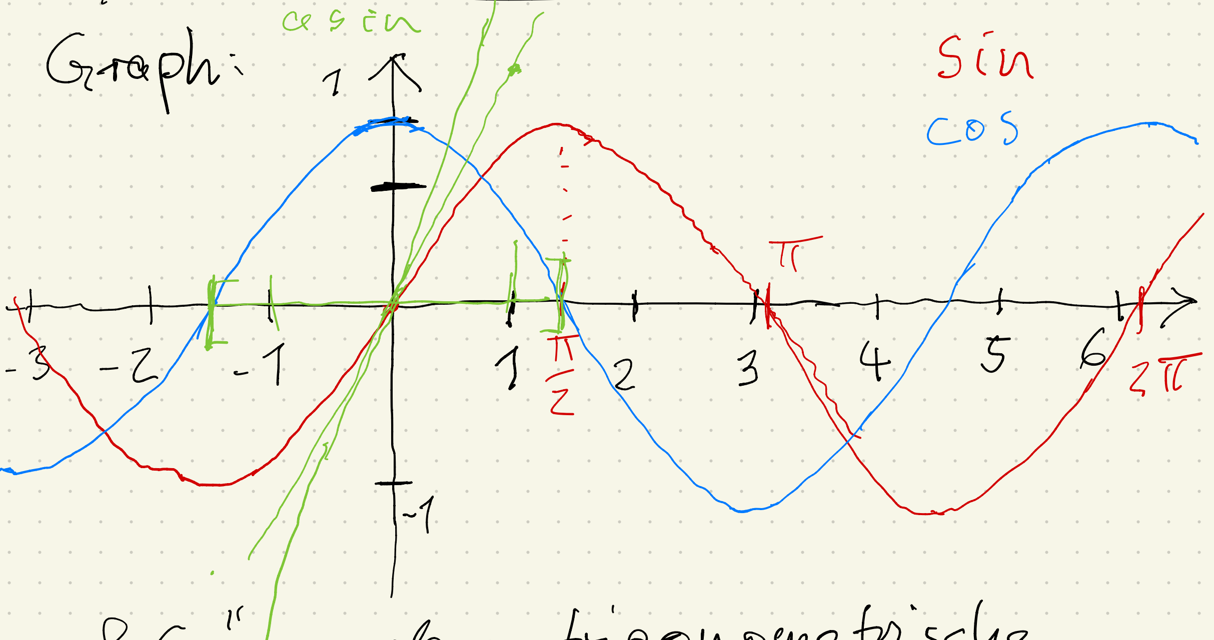
Vorkurs Informatik

Tag 9

sin, cos, Co: Eigenschaften

- $\sin(x + k\cdot 2\pi) = \sin(x)$ $(k \in \mathbb{Z})$
- $\cos(x + k\cdot 2\pi) = \cos(x)$ "
- $(\sin(x))^2 + (\cos(x))^2 = 1$; bzw kurz
  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ (!)
- $\cos(x - \frac{\pi}{2}) = \sin(x)$
- $\sin(-x) = -\sin(x)$
- $\cos(-x) = \cos(x)$

Graph:



"& Co": andere trigonometrische Funktionen:

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \quad (\text{„Tangens"})$$

$$\cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} \quad (\text{„Cotangens"})$$

$$\sec(x) = \frac{1}{\cos(x)} \quad (\text{„Sekans"})$$

$\vdots$

und ihre Umkehrfunktionen:

(zumindest da, wo sie bijektiv sind)

$$\operatorname{asin}(x) = \arcsin(x) = \sin^{-1}(x)$$

(„Arcussinus")

Auch:

$$\boxed{\begin{aligned} \sin(x+y) &= \sin x \cos y + \sin y \cdot \cos x \\ \cos(x+y) &= \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y \end{aligned}}$$

(„Additionstheoreme")

---

6 $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$

$$\mathbb{N} \xrightarrow[-]{} \mathbb{Z} \xrightarrow[:]{} \mathbb{Q} \xrightarrow[\lim]{\sqrt{2}} \mathbb{R} \xrightarrow{\sqrt{-2}} \mathbb{C}$$

$(\sqrt{2} \in \mathbb{Q})$

Polynome sollen immer Nullstellen haben.

<u>Bsp</u> $x^2 + 1 = 0$

p-q-Formel: $\pm\sqrt{-1}$

Keine Lösung in $\mathbb{R}$

Aber: wenn wir eine neue Zahl einführen: „$\sqrt{-1}$", oder schöner:

Komplexe Zahlen

i mit der Eigsch. $\boxed{i^2 = -1}$ „imaginäre Einheit"

Dann $\mathbb{C} := \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}$

$(\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}: \quad a = a + 0 \cdot i)$

- Lösungen v. $x^2 + 1 = 0$: $\pm i$

  (denn einsetzen: $i^2 + 1 = -1 + 1 = 0$)

- Lösungen von $x^2 + 4x + 5 = 0$

  p-q-F.: $-\frac{4}{2} \pm \sqrt{4 - 5} = -2 \pm i$

Rechnen:

- $a + bi + c + di = (a + c) + (b + d) \cdot i$

  z.B. $2 + 3i + 1 - 5i = 3 + (-2) \cdot i$

- $a + bi - (c + di) = (a - c) + (b - d) i$
- $(a + bi) \cdot (c + di) = a \cdot c + adi + b \cdot c \cdot i + b \cdot d \cdot \underbrace{i^2}_{-1} = a \cdot c - b \cdot d + (ad + bc) \cdot i$

Bezeichnung $a + bi$

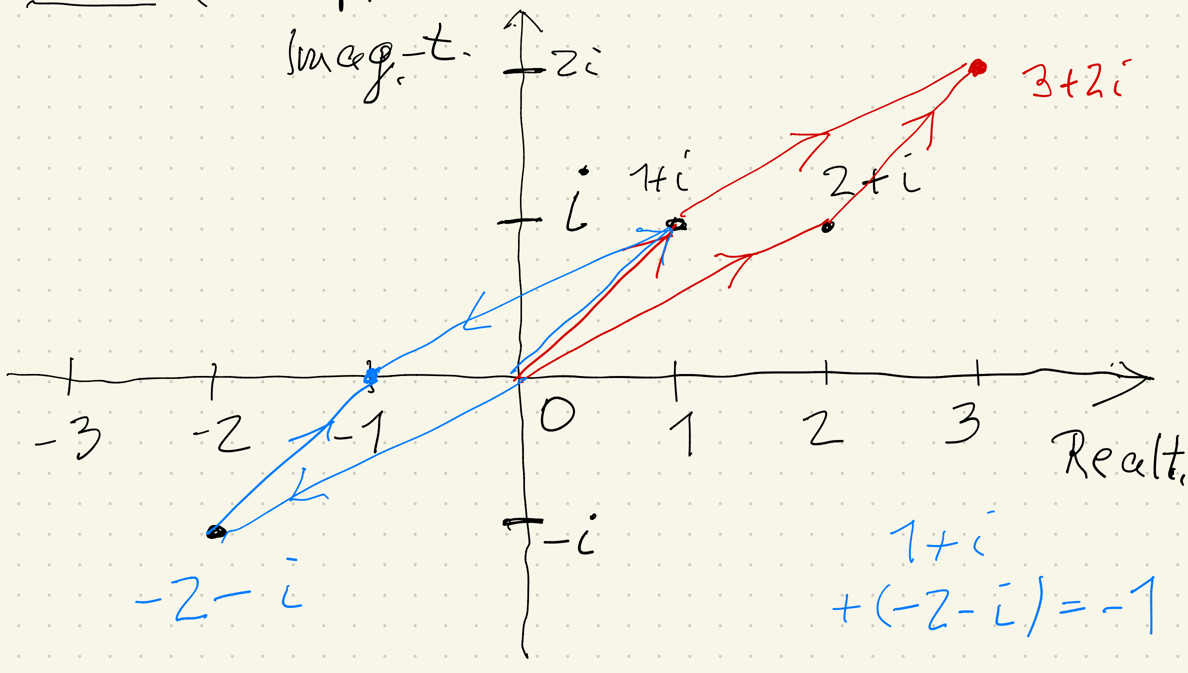
Realteil (a), Imaginärteil (b)

- Beachte: $z \in \mathbb{C}$, dann hat z immer die Form $a+bi$,
- Komplex Konjugierte zu $z \in \mathbb{C}$, $z = a+bi$, ist $\overline{z} = a - bi$

  also z.B. $z = 2-3i$: $\overline{z} = 2+3i$

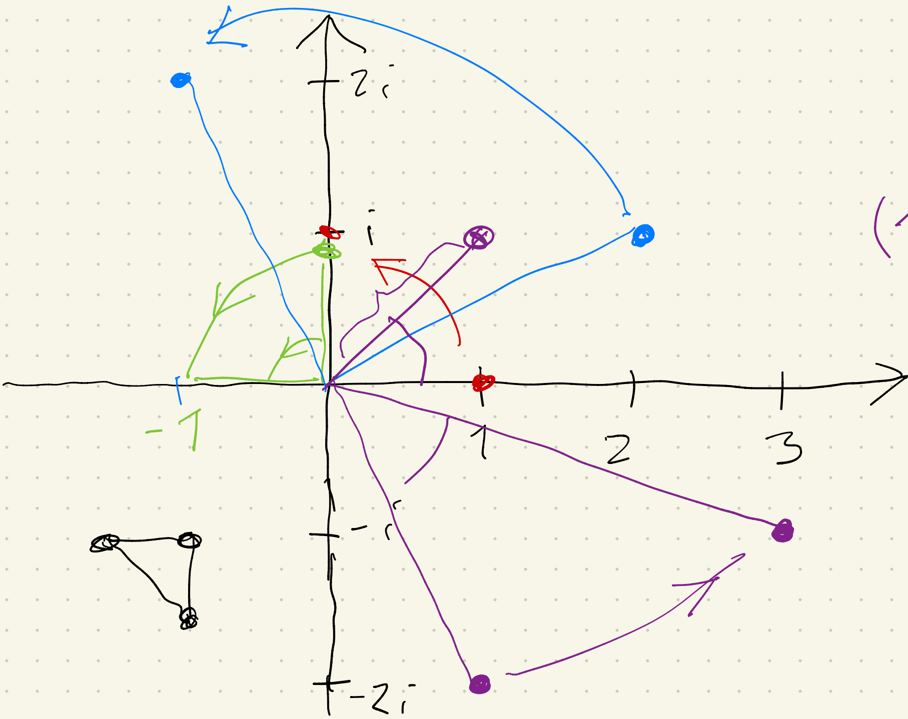
  (klar: $\overline{\overline{z}} = z$)

Bild: (Komplexe Ebene)



$(2+i)\cdot i = -1+2i$

$(1-2i)\cdot(1+i) = 1+2-1i = 3-i$



$1\cdot i = 1$

$i\cdot i = -1$

$\underline{(1-2i)\cdot(1+i)}$

Allgemein: „mal $(a+bi)$" ist

- drehen um (einen Winkel) $\arctan\left(\frac{b}{a}\right)$ (ohne Gewähr)
- strecken um $\sqrt{a^2+b^2}$

(bei $\cdot(1+i)$ also: drehen um $45^\circ = \frac{\pi}{4}$, strecken um $\sqrt{2}$)

Was ist $(a+bi):(c+di)$ $\quad \frac{a+bi}{c+di}$

OK, aber wir wollen das als $e+f\cdot i$

<u>TRICK</u>: $(x+y)(x-y) = x^2-y^2$; hier

hier: $\frac{a+bi}{c+di}$ mit $(c-di)$ erweitern.

<u>Dann</u>: $$\frac{(a+bi)\cdot(c-di)}{(c+di)\cdot(c-di)} = \frac{(a+bi)\cdot(c-di)}{c^2-\underbrace{(di)^2}_{d^2\cdot\underbrace{i^2}_{-1}}}$$

$$= \frac{a\cdot c+b\cdot d+(-d\cdot a+b\cdot c)\cdot i}{c^2+d^2}$$

$$= \underbrace{\frac{a\cdot c+b\cdot d}{c^2+d^2}}_{\text{Realteil}} + \underbrace{\frac{b\cdot c-a\cdot d}{c^2+d^2}}_{\text{Imaginärteil}}\cdot i$$

<u>Satz 6.6</u> (Fundamentalsatz der Algebra)

Ein Polynom $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ hat genau n Nullstellen, wenn man

(a) komplexe Nullstellen mitzählt

(b) Nullstellen mit ihrer Vielfachheit zählt.

Dabei ist (b) so zu verstehen:

z.B. $x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = (x-1)^3$

$= (x-1)\cdot(x-1)\cdot(x-1)$ ← 1 ist 3fache Nullstelle

Aus dem Satz folgt:

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Jedes Polynom}^{*} \text{ kann man schreiben} \\ \text{als } (x-\alpha_1)\cdot(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n) \\ \text{wobei } \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \text{ die Nullstellen sind.} \\ {}^{*}\text{der Form } x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0\end{array}}$$

Wurzelsatz von Vieta:

$$(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdot(x-\alpha_3) = x^3 + \dots \underbrace{-\alpha_1\alpha_2\alpha_3}_{a_0}$$

Überblick Mathe I: Lineare Algebra

(morgen: Analysis)

I Vektorräume
($\mathbb{R}^n$, Basis, ...)

II $\mathbb{C}$ ✓

III Lineare Abbildungen

IV " " & Matrizen