Vorkurs Informatik

Tag 10

Recall: Lineare Algebra

0: Lineare Gleichungssysteme

Bsp Bauer hat insgesamt 26 Tiere;
Schweine, Hühner, Kakerlaken;
mit insgesamt 82 Beine;
Schweine + Kakerlaken = Hühner − 4

S: Anzahl Schweine,
H: " Hühner,
K: " Kakerlaken

$$
\begin{aligned}
& S + H + K = 26 \quad \cdot(-4) \quad \cdot(-1) \\
\wedge\ & 4\cdot S + 2\cdot H + 6\cdot K = 82 \quad + \\
\wedge\ & S - H + K = -4 \quad +
\end{aligned}
$$

lineares Gleichungssystem

$$
\begin{aligned}
& S + H + K = 26 && \mathrm{I} \\
\wedge\ & -2H + 2K = -22 && \mathrm{II} \\
\wedge\ & -2H = -30 && \mathrm{III}
\end{aligned}
$$

$\mathrm{III} \Rightarrow H = 15$

$\mathrm{II} \quad -30 + 2K = -22 \quad | :2$

$\Rightarrow -15 + K = -11 \quad | +15$

$$\Rightarrow \qquad K = 4$$

$$\text{I} \qquad S + 15 + 4 = 26 \quad \big| -19$$

$$S = 7$$

<u>Lösung:</u> 7 Schweine, 15 Hühner, 4 Kakerlaken.

Variante: erste & zweite wie oben, 12 mehr Hühner als Kakerlaken.

Kürzer schreiben: $\qquad H = K + 12$:

$$\begin{array}{ccc|c}
(S) & (H) & (K) & \\
1 & 1 & 1 & 26 \quad \cdot(-4) \\
4 & 2 & 6 & 82 \quad +\\
0 & 1 & -1 & 12 \\
\hline
1 & 1 & 1 & 26 \\
0 & -2 & 2 & -22 \\
0 & 1 & -1 & 12 \quad \cdot 2 \\
\hline
1 & 1 & 1 & 26 \\
0 & -2 & 2 & -22 \\
0 & 0 & 0 & 2 \quad \text{III} \\
\hline
\end{array}$$

III heißt: $0 \cdot S + 0 \cdot H + 0 \cdot K = 2$

$$\Leftrightarrow \qquad 0 = 2$$

Hier: Keine Lösung!

<u>Variante 3:</u> Wie oben, aber $H = K + 11$

$$\left.\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 26 \\ 4 & 2 & 6 & 82 \\ 0 & 1 & -1 & 11 \end{array}\right. \quad \cdot(-4)$$

$$\left.\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & +26 \\ 0 & -2 & 2 & -22 \\ 0 & 1 & -1 & 11 \end{array}\right. \quad \cdot 2 \quad +$$

$$\begin{array}{ccc|cl} 1 & 1 & 1 & 26 & \mathrm{I} \\ 0 & -2 & 2 & -22 & \mathrm{II} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathrm{III} \end{array}$$

III: $0 = 0$ Keine Information

II: $-2H + 2K = -22 \quad | :2 \quad +H$

$\Leftrightarrow \quad K = H - 11 \quad (*)$

I: $S + H + K = 26$

$\Rightarrow \quad S + H + H - 11 = 26 \quad | +11 \; -2H$

$\Rightarrow \quad S = 37 - 2H$

<u>Lösung:</u> $S = 37 - 2H$; $K = H - 11$;
H irgendwie (sinnvoll)

z.B. ($\cancel{H=5,\ S=27,\ K=-6}$)

$$H=15;\ S=7;\ K=4;$$

oder $H=16;\ S=5;\ K=5;$

$\vdots$

Lösung (hier): $\{(37-2H,\ H;\ H-11) \mid 11 \le H \le 18\}$; bzw

$$\{(37-2H,\ H,\ H-11) \mid H \in \mathbb{R}\}$$

Ein lineares Gl.-system in $\mathbb{C}$:

$$x_1 + i\cdot x_2 - i\cdot x_3 = 0$$
$$\wedge\ (1-i)\cdot x_1 + (1+i)x_2 - (1+i)\cdot x_3 = 0$$
$$\wedge\ -i x_1 + x_2 - x_3 = 0$$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & i & -i & 0 \\ 1-i & 1+i & -1-i & 0 \\ -i & 1 & -1 & 0 \\ \hline 1 & i & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} \cdot(1-i)\ \ \cdot i \\ \ - \quad\ + \\ \\ \mathrm{I} \end{array}$$

$i\cdot(1-i) = i+1$

Lösung: $x_2, x_3 \in \mathbb{C}$

$I \Rightarrow x_1 + ix_2 - ix_3 = 0 \quad | -ix_2 + ix_3$

$\Rightarrow x_1 = -ix_2 + ix_3$

Lösung: $\{(-ix_2 + ix_3, x_2, x_3) \mid x_2, x_3 \in \mathbb{C}\}$

Bezeichnung: Wenn rechts nur Nullen stehen, heißt das lin. Gl.-system (LGS) homogen; sonst inhomogen

Fakt: Ein inhomogenes LGS hat keine, oder eine, oder ∞ viele Lösungen.

Ein homogenes LGS hat eine Lösung (dann: $x_1 = 0, x_2 = 0$ usw.), oder ∞ viele.

In Linearer Algebra:

Vektorräume: $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \mathbb{R}^5; \mathbb{C}^2, \mathbb{C}^3, \ldots$

(K vorstellen als $\mathbb{R}$)

Highlight: Lineare Abbildungen von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^m$ sind Matrizen u.U.

Matrix: $\begin{pmatrix}1&2\\1&3\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}1&0&1\\2&2&2\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}0&0&1\\1&1&0\\1&2&1\end{pmatrix}$...

Vektor: $\begin{pmatrix}1\\2\\5\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$

Matrix mal Vektor:

$$\cancel{\begin{pmatrix}1&2\\1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\5\end{pmatrix}}$$

geht nicht

$$\begin{pmatrix}1&2\\1&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\-3\end{pmatrix}$$

oder $\begin{pmatrix}1&0&1\\2&2&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\16\end{pmatrix}$

Eine Matrix liefert eine Abbildung

$$f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m;\ f(v) = A\cdot v$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Lineare Abbildung ist } f: X \to Y, \\ \text{so dass} \\ \quad \forall x, x' \in X:\ f(x+x') = f(x) + f(x') \\ \quad \forall x \in X\ \forall a \in \mathbb{R}:\ f(a\cdot x) = a\cdot f(x)\end{array}}$$

zum Drangewöhnen: lin. Abb. $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Bsp: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) =$

ⓐ $\sin(x)$ linear?

$\sin(x+x') = \sin(x) + \sin(x')$?

falsche: $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \sin(\pi) = 0$ $\neq$

aber $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 + 1 = 2$

ⓑ x^2 linear?

$(x+x')^2 \overset{?}{=} x^2 + x'^2$ falsch

$(1+2)^2 = 9 \neq 5 = 1^2 + 2^2$

ⓒ x <u>ist</u> linear

ⓓ 0 " "

<u>Fakt</u> Alle linearen Abb. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind von der Form $f(x) = a \cdot x$ $(a \in \mathbb{R})$

<u>Fakt:</u> Alle lineare Abb. $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ sind von der Form $f(v) = A \cdot v$

---

8 Überblick Mathe I: Analysis

8 Überblick Mathe I: Analysis

I Zahlen

- $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$; $|x|$; $\leq$ ✓
- vollst. Induktion ✓

II Folgen & Reihen

- Konv., Folgen, Reihen ✓

(• Cauchyfolgen)

III stetige Funktionen

- injektiv, surjektiv ✓
- stetig: s.u.

(• gleichmäßig stetig, Funktionenfolgen)
Potenzreihen

IV Ableitung

- Kettenregel, Produktregel, Extrema,
- Mittelwertsatz, Satz von l'Hôpital, ...

V Integrale

- Def, Regeln, ...
- Hauptsatz der Differential- & Integralrechnung

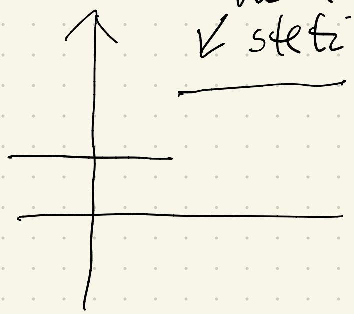
Zu „stetig": Keine Sprungstellen, keine Polstellen, keine anderen Abnormitäten

Grob: Ich kann den Graph zeichnen, ohne den Stift abzusetzen.

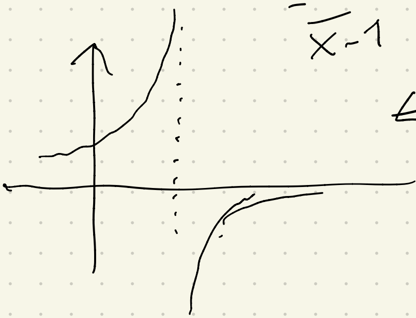
So:

stetig

nicht stetig



$-\frac{1}{x-1}$



nicht stetig

Def: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig, falls

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x, y \in \mathbb{R}: |f(x) - f(y)| < \varepsilon \Rightarrow |x - y| < \delta$$

Wichtig $\boxed{\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(a)}$

falls f stetig & $\lim_{n\to\infty} a_n = a$

Ableitung: $f'(x)$ („differenzieren")

z.B. $(x^2)' = 2x$

$(x^3+1)' = 3x^2,$

$(e^x)' = e^x$

Stammfunktion („integrieren")

$f'(x) = x^2; \quad f(x) = \ ? \ \frac{1}{3}x^3$

Notation: $\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3$

Hauptsatz: Zusammenhang Ableitung & Stammfunktion.