

Präsenzübungen zur Vorlesung Wissenschaftliches Rechnen**Blatt 3****Aufgabe 1:**

Zeichnen Sie die Menge  $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\|_p \leq 1\}$ , jeweils für  $p = 1$ ,  $p = 2$ ,  $p = \infty$ . (Falls Sie das in wenigen Minuten hinbekommen, zeichnen Sie sie auch für  $p = 3$  und  $p = \frac{1}{2}$ ).

**Aufgabe 2:**

Zeigen Sie für  $x \in \mathbb{R}^m$ :

1.  $\|x\|_\infty \leq \|x\|_1$ ,
2.  $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2$ ,
3.  $\|x\|_2 \leq \|x\|_1$ .

Gemeinsam besprechen:

- Falls  $p > p'$ , gilt dann immer  $\|x\|_p \geq \|x\|_{p'}$ , oder immer  $\|x\|_p \leq \|x\|_{p'}$ , oder nichts von beidem?
- Wie sieht wohl der Graph von  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \|x\|_p$  aus? ( $p = 1, p = 2, p = \infty$ )

**Aufgabe 3:**

Bestimmen Sie, ob die folgenden Matrizen jeweils positiv definit sind, positiv semidefinit, negativ definit, negativ semidefinit, oder indefinit.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

**Aufgabe 4:**

Bestimmen Sie  $\min\{\|Ax - b\|_2 \mid x \in \mathbb{R}^m\}$  sowie das zugehörige  $x$  für

1.  $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 2.5 \end{pmatrix}$  (zeichnerisch oder irgendwie).
2.  $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$  (über die Normalengleichung)

**Zusatzaufgabe:**

Sie  $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times m}$  eine symmetrisch positiv definite Matrix. Zeigen Sie:

1.  $a_{jj} > 0$  für  $j = 1, \dots, m$ .
2.  $a_{jk}^2 < a_{jj}a_{kk}$  für  $j = 1, \dots, m$ ,  $j \neq k$ .
3. Der betragsmäßig größte Eintrag von  $A$  liegt auf der Hauptdiagonalen.