Dr. Dirk Frettlöh 2.6.2022

Präsenzübungen zur Vorlesung Wissenschaftliches Rechnen

Blatt 5

Aufgabe 1:
Es sei $A = \begin{pmatrix} c & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Es ist $A^{-1} = \frac{1}{1-c}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -c \end{pmatrix}$. Berechnen Sie die Konditionszahl $\kappa(A)$ der Matrix A, einmal für die Frobeniusnorm, einmal für die Zeilensummennorm $\|A\|_\infty = \max\limits_k \{\sum\limits_{i=1}^m |a_{ki}|\}$. Für welche c wird $\kappa(A)$ besonders groß?

Aufgabe 2:
Es sei $A = \begin{pmatrix} c & 100c \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, wobei $c > 0$. Es ist $A^{-1} = \frac{1}{99}\begin{pmatrix} -1/c & 100 \\ 1/c & -1 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie die Konditionszahl von A bezüglich der Zeilensummennorm $\|A\|_\infty = \max\{\sum\limits_{i=1}^m |a_{ik}|\}$. Für welche c wird $\kappa(A)$ minimal?

Aufgabe 3:
Berechnen Sie die QR-Zerlegung von $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ mittels Gram-Schmidt.

Aufgabe 4:
Es sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Zeigen Sie:

1. Ist $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$ invertierbar, so ist die Pseudoinverse $A^+ = (A^T A)^{-1}A^T$ gleich A^{-1}.
2. Ist $q \in \mathbb{R}^m$ ein Vektor der Länge 1, und ist $Q = qq^T$, dann gilt $Q^2 = E$.
3. Ist $Q = qq^T$ wie in 3 und $p \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$, dann ist Qp orthogonal zu $(E - Q)p$.
4. Sei $A = QR$ die QR-Zerlegung von A. Zeigen Sie: $A^+ = R^{-1}Q^T$.
5. Mit q wie in 3 und $H = E - 2qq^T$ gilt:
   (a) H ist symmetrisch und orthogonal.
   (b) $H^2 = E$.
   (c) q ist Eigenvektor zum Eigenwert -1.