Präsenzübungen zur Vorlesung Wissenschaftliches Rechnen

Blatt 3

Aufgabe 1:
Zeichnen Sie die Menge $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\|_p \leq 1\}$, jeweils für $p = 1$, $p = 2$, $p = \infty$. (Falls Sie das in wenigen Minuten hinbekommen, zeichnen Sie sie auch für $p = 3$ und $p = \frac{1}{2}$).

Aufgabe 2:
Bestimmen Sie, ob die folgenden Matrizen jeweils positiv definit sind, positiv semidefinit, negativ definit, negativ semidefinit, oder indefinit.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3:
Bestimmen Sie $\min\{\|Ax - b\|_2 \mid x \in \mathbb{R}^m\}$ sowie das zugehörige x für

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 2.5 \end{pmatrix}$ (zeichnerisch oder irgendwie).
2. $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ (über die Normalengleichung)

Aufgabe 4:
Bestimmen Sie mit der *least squares*-Methode die Gerade, die die Punkte $(0,1)^T, (1,1)^T, (2,2)^T$ am besten approximiert (bzgl. der 2-Norm natürlich).

Eventuell gemeinsam besprechen:

- Falls $p > p'$, gilt dann immer $\|x\|_p \geq \|x\|_{p'}$, oder immer $\|x\|_p \leq \|x\|_{p'}$, oder nichts von beidem?
- Wie sieht wohl der Graph von $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x) = \|x\|_p$ aus? $(p = 1, p = 2, p = \infty)$

Zusatzufgabe:
Zeigen Sie für $x \in \mathbb{R}^m$:

1. $\|x\|_\infty \leq \|x\|_1$,
2. $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2$,
3. $\|x\|_2 \leq \|x\|_1$.

Zusatzaufgabe:
Sie $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times m}$ eine symmetrisch positiv definite Matrix . Zeigen Sie:

1. $a_{jj} > 0$ für $j = 1, \ldots, m$.
2. $a_{jk}^2 < a_{jj} a_{kk}$ für $j = 1, \ldots, m$, $j \neq k$.
3. Der betragsmäßig größte Eintrag von A liegt auf der Hauptdiagonalen.