Dr. Dirk Frettlöh 11.5.2023

Präsenzübungen zur Vorlesung Wissenschaftliches Rechnen

Blatt 4

Aufgabe 1:
Sei $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 10 & 8 \\ -1 & 8 & 14 \end{smallmatrix}\right)$. A ist symm. positiv definit. Berechnen Sie die Choleskyzerlegung LL^T von A.

(Denk-)Aufgabe 2: (Zum Miniprojekt 2:) Es ist

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_m & x_m^2 \end{pmatrix}.$$

Überlegen Sie sich, was passieren muss, damit $A^T \cdot A$ vollen Rang hat. Und was passieren muss, damit A keinen vollen Rang hat.

Aufgabe 3:
Berechnen Sie die Konditionszahlen (einiger) der folgenden Funktionen an der Stelle $x = 1$. Also für

$$f_1(x) = (1-x)^6, \quad f_2(x) = \frac{1}{(1+x)^6}, \quad f_3(x) = (3-2x)^3,$$

$$f_4(x) = 99 - 70x, \quad f_5(x) = \frac{1}{(3+2x)^3}, \quad f_6(x) = \frac{1}{99+70x}.$$

(Der Witz hier ist: es ist $f_i(\sqrt{2}) = f_j(\sqrt{2})$ für alle $i, j = 1, 2, \ldots, 6$. Wenn man also $(1-\sqrt{2})^6$ näherungsweise berechnen möchte, kann man (wegen $\sqrt{2} \approx 1,4$) ja $f_i(1,4)$ berechnen, für verschiedene i. Die Ergebnisse unterscheiden sich teilweise deutlich.)

Aufgabe 4:
Berechnen Sie die Konditionszahl der Matrix $A = \left(\begin{smallmatrix} c & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, einmal für die Frobeniusnorm, einmal für die Zeilensummennorm $\|A\|_\infty = \max\big\{ \sum_{i=1}^{m} |a_{i,k}| \big\}$. Für welche c wird $\operatorname{cond}(A)$ besonders groß?

Zusatzfrage: Wenn wir bei der Choleskyzerlegung auf die Forderung $\ell_{ii} > 0$ verzichten, wieviele Möglichkeiten gibt es dann für L mit $LL^T = A$?

Zusatzaufgabe: Beweisen Sie: ist $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$ symmetrisch, dann hat A m Eigenvekotren, die paarweise orthogonal sind.