Dr. Dirk Frettlöh 13.7.2023

Präsenzübungen zur Vorlesung Wissenschaftliches Rechnen

Blatt 8

Aufgabe 1:
Berechnen Sie für die Vektoren $f = (1,1,0,0)$ und $g = (0,1,0,0)$ deren Faltung $f * g$; bzw genauer (und einfacher): Berechnen Sie $N \cdot (f * g)$. Was ist der Zusammenhang zwischen dieser Faltung und der Rechnung $3 \cdot 2$?

Berechnen Sie für die Vektoren $f = (1,0,1,1,0,0,0,0)$ und $g = (1,1,0,1,0,0,0,0)$ ebenfalls $N \cdot (f * g)$. Welcher Multiplikation entspricht das?

Berechnen Sie für die Vektoren $f = (1,1,1,1,0,0,0,0)$ und $g = (1,2,2,1,0,0,0,0)$ ebenfalls $N \cdot (f * g)$. Welcher Multiplikation entspricht das?

Aufgabe 2:
Beweisen Sie die diskrete Version der Parsevalschen Gleichung: Für jede Funktion $f : \{0,1,\dots,N-1\} \to \mathbb{C}$ gilt:

$$\sum_{n=0}^{N-1} |\hat{f}_n|^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |f_n|^2$$

Hart: Beweisen Sie die diskrete Version des Faltungssatzes, also

$$\widehat{f * g} = N \widehat{f} \cdot \widehat{g}.$$

Dabei ist, für $f = \{f_0, f_1, \dots, f_{N-1}\}$ und $g = \{g_0, g_1, \dots, g_{N-1}\}$:

$$f * g(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f_k g_{n-k} \qquad (0 \le n \le N-1)$$

Der Index $n-k$ von g_{n-k} kann negativ werden, also setzen wir hier für $1 \le \ell \le N-1$ fest: $g_{-\ell} = g_{N-\ell}$.

Aufgabe 3:
Eine n-te Einheitswurzel modulo m ($n \ge 1$) ist eine Lösung der Gleichung $x^n = 1 \bmod m$ in den Zahlen $\{0,1,\dots,m-1\}$, so dass $x^k \ne 1 \bmod m$ für $k < n$. (*Wir schreiben hier statt* $x^n \bmod m = 1$ *lieber* $x^n = 1 \bmod m$ *und meinen damit "alles mod m"*)

Der Schönhage-Strassen-Algorithmus zur schnellen Multiplikation hoher Zahlen rechnet in den Zahlen $\{0,1,\dots,m-1\}$. Er arbeitet mit n-ten Einheitswurzel modulo m für $m = 2^k + 1$. In Wirklichkeit ist das m sehr groß; hier betrachten wir nur ein Spielzeugbeispiel:

Eine vierte Einheitswurzel modulo 5 ist $\xi = 2$. Stellen Sie die DFT-Matrix V, mit Einträgen aus $\{0,1,2,3,4\}$ (alles modulo 5) auf, siehe Skript. Hier ist $N = m - 1 = 4$, also ist D eine 4×4-Matrix usw). Benutzen Sie, dass $2^{-1} = 3 \bmod 5$ (denn $2 \cdot 3 = 1 \bmod 5$), und $\frac{1}{4} = 4^{-1} = 4 \bmod 5$, denn $4 \cdot 4 = 1 \bmod 5$, usw.

Berechnen Sie dann mit diesem D die DFT der Vektoren $(1,0,1,0)$, $(1,1,1,1)$ und $(4,0,0,0)$.