Analysis II

Alexander Grigoryan
Universität Bielefeld

SS 2021

Contents

Chapter 9

Differentialrechnung: höhere Ableitungen

9.1 Höhere Ableitungen

14.04.2021 **Vorlesung 1**

Zunächst erinnern wir uns an die Definition der Ableitung. Sei $f : J \to \mathbb{R}$ eine Funktion auf einem Intervall J.

Die Ableitung von f an einer Stelle $x \in J$ ist der Grenzwert

$$f'(x) := \lim_{y \to x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x},$$

vorausgesetzt, dass der Grenzwert existiert. Ist der Grenzwert endlich, so heißt f differenzierbar in $x \in J$. Ist f an allen Stellen $x \in J$ differenzierbar, so heißt f differenzierbar auf dem Intervall J. In diesem Fall ist die Ableitung f' auch eine Funktion auf J.

Andere Notation für f':

$$f' = \frac{df}{dx} = \partial_x f.$$

Die zweite Ableitung $f''(x)$ wird als die Ableitung von f' definiert, vorausgesetzt, dass f auf J differenzierbar ist und f' in x differenzierbar ist. Schreibweise:

$$f'' = (f')' = \frac{d^2 f}{dx^2} = \partial_{xx} f = \partial_x^2 f.$$

Definition. Sei f eine Funktion auf einem Intervall J. Die Ableitung $f^{(n)}$ der Ordnung $n \in \mathbb{Z}_+$ (=die n-te Ableitung) wird per Induktion nach n wie folgt definiert:

$$f^{(0)}(x) = f(x) \quad \text{und} \quad f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}\right)'(x) \quad \text{für jedes } n \geq 1,$$

vorausgesetzt, dass $f^{(n-1)}$ auf J definiert ist und in x differenzierbar. In diesem Fall heißt f n-fach differenzierbar in x. Ist f an allen Stellen $x \in J$ n-fach differenzierbar, so heißt f n-fach differenzierbar auf J. In diesem Fall ist $f^{(n)}$ auch eine Funktion auf J.

Schreibweise:

$$f^{(n)} = \frac{d^n f}{dx^n} = \partial_x^n f.$$

Zum Beispiel, wir haben

$$\begin{aligned} f^{(1)} &= f' \\ f^{(2)} &= (f')' =: f'' \\ f^{(3)} &= (f'')' =: f''' \\ f^{(4)} &= (f''')' =: f^{IV}. \end{aligned}$$

Definition. Eine Funktion $f : J \to \mathbb{R}$ heißt *unendlich oft* differenzierbar auf J, wenn f n-fach differenzierbar auf J für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beispiel. 1. Sei $f = e^x$. Dann $f' = e^x$ und per Induktion erhalten wir, dass

$$(e^x)^{(n)} = e^x$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Insbesondere ist e^x unendlich oft differenzierbar auf $\mathbb{R}$.

2. Sei $f = \sin x$. Dann

$$f' = \cos x,\ f'' = -\sin x,\ f''' = -\cos x,\ f^{IV} = \sin x,$$

woraus folgt

$$(\sin x)^{(n)} = \begin{cases} \sin x, & n = 0 \bmod 4 \\ \cos x, & n = 1 \bmod 4 \\ -\sin x, & n = 2 \bmod 4 \\ -\cos x, & n = 3 \bmod 4 \end{cases}$$

Insbesondere sind $\sin x$ und $\cos x$ unendlich oft differenzierbar auf $\mathbb{R}$.

3. Sei $f(x) = x^a$ wobei $x \in (0, +\infty)$ und $a \in \mathbb{R}$. Dann

$$f' = ax^{a-1},\ \ f'' = a(a-1)x^{a-2},\ f''' = a(a-1)(a-2)x^{a-3},$$

usw. Per Induktion erhalten wir für alle $k \in \mathbb{N}$

$$(x^a)^{(k)} = \underbrace{a(a-1)\ldots(a-k+1)}_{k \text{ Glieder}} x^{a-k} = \left(\prod_{i=0}^{k-1}(a-i)\right)x^{a-k}.$$

Insbesondere ist x^a unendlich oft differenzierbar auf $(0, +\infty)$.

4. Sei $f(x) = x^n$ wobei $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt für $k \le n$

$$(x^n)^{(k)} = n(n-1)\ldots(n-k+1)x^{n-k}.$$

Für $k = n$ erhalten wir

$$(x^n)^{(n)} = n! = \text{const},$$

woraus folgt, dass $(x^n)^{(k)} \equiv 0$ für alle $k > n$. Insbesondere ist x^n unendlich oft differenzierbar auf $\mathbb{R}$.

Für die n-te Ableitung gelten die Rechenregeln

$$\begin{aligned} (f+g)^{(n)} &= f^{(n)} + g^{(n)}, \\ (cf)^n &= cf^{(n)} \end{aligned}$$

vorausgesetzt, dass f und g n-fach differenzierbar sind und $c \in \mathbb{R}$. Diese Regeln wurden für $n = 1$ in Analysis 1 bewiesen, und für alle $n \geq 1$ beweist man sie per Induktion.

Für das Produkt gilt die Leibnizformel

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)},$$

wobei $\binom{n}{k}$ der Binomialkoeffizient ist (siehe Aufgabe 21).

Beispiel. Sei f ein Polynom

$$f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + ... + c_n x^n \tag{9.1}$$

mit reellen Koeffizienten c_k, wobei $n \in \mathbb{Z}_+$ und $c_n \neq 0$. Die Zahl n heißt der Grad des Polynoms f und wird mit $\deg f$ bezeichnet. Ist $n \geq 1$ so gilt

$$f'(x) = c_1 + 2c_2 x + ... + nc_n x^{n-1}.$$

Somit ist die Ableitung von f ein Polynom des Grades $n - 1$.

Es folgt per Induktion, dass

$$f^{(n)}(x) = c_n n! = \text{const}$$

und $f^{(k)} \equiv 0$ für alle $k > n$. Die Eigenschaft, dass $f^{(k)} \equiv 0$ für ein k, ist eine charakteristische Eigenschaft von Polynomen, was wir später sehen.

9.2 Taylorformel mit Peano-Restglied

Ist f differenzierbar in J so gilt es für alle $a \in J$ die asymptotische Identität

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + o(x - a) \text{ für } x \to a, \tag{9.2}$$

(siehe (8.46)). Diese Identität lässt sich betrachten als eine Approximation der Funktion $f(x)$ in der Nähe von a mit der linearen Funktion

$$T_1(x) = f(a) + f'(a)(x - a).$$

Da die Gleichung

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

die *Tangente* zum Graph von f am Punkt $(a, f(a))$ bestimmt, so bedeutet (9.2) die Approximation des Graphes von f in der Nähe von a mit der Tangente.

Der Satz 8.16 ((Taylorformel 2er Ordnung mit der Restgliedform nach Peano) besagt folgendes: ist f 2-fach differenzierbar in J, so gilt die asymptotische Identität

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2}(x - a)^2 + o\left((x - a)^2\right) \quad \text{für } x \to a. \tag{9.3}$$

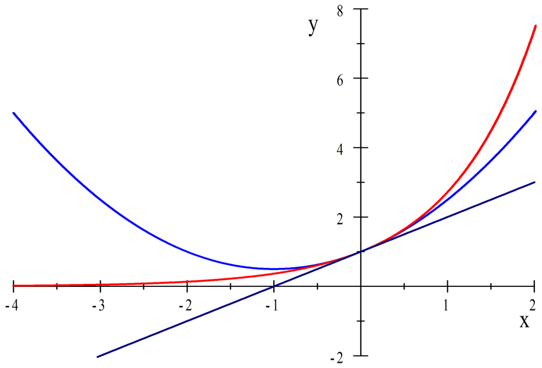
Diese Identität lässt sich betrachten als eine Approximation der Funktion $f(x)$ in der Nähe von a mit der quadratischen Funktion

$$T_2(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2}(x - a)^2.$$

Die Gleichung

$$y = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2$$

bestimmt eine Parabel (die *Schmiegparabel* zum Graph von f an $(a, f(a))$), die eine bessere Approximation des Graphes von f liefert.



Funktion e^x (rot) und ihre Taylor-Polynome $T_1(x) = 1 + x$ (schwarz) und $T_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}$ (blau)

In diesem Abschnitt beweisen wir die *Taylorformel*, die eine Approximation der Funktion f mit Hilfe von Polynomen des beliebigen Grades n liefert. Wir fangen mit einer Taylorformel für Polynome an.

Lemma 9.1 *Für jedes Polynom f von Grad $\leq n$ gilt für alle $a, x \in \mathbb{R}$,*

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k . \end{aligned} \tag{9.4}$$

Beweis. Induktionsanfang für $n = 0$. Ist $\deg f = 0$ so ist $f = \text{const}$ und $f' \equiv 0$, so dass die Identität (9.4) ist offensichtlich erfüllt.

Induktionsschritt von n nach $n + 1$. Sei f ein Polynom des Grades $\leq n + 1$. Wir müssen beweisen, dass für alle x

$$f(x) = g(x),$$

wobei

$$g(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + ... + \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} . \tag{9.5}$$

Da $\deg f' \leq n$, so können wir die Induktionsvoraussetzung für das Polynom f' verwenden. Da $(f')^{(k)} = f^{(k+1)}$, so erhalten wir nach der Induktionsvoraussetzung

$$f'(x) = f'(a) + \frac{f''(a)}{1!}(x-a) + \frac{f'''(a)}{2!}(x-a)^2 + ... + \frac{f^{(n+1)}(a)}{n!}(x-a)^n . \tag{9.6}$$

Ableiten der Funktion g aus (9.5) ergibt

$$g'(x) = f'(a) + \frac{f''(a)}{1!}(x-a) + \frac{f'''(a)}{2!}(x-a)^2 + ... + \frac{f^{(n+1)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Vergleichen mit (9.6) ergibt die Identität $f'(x) = g'(x)$. Somit gilt $(f-g)' \equiv 0$, und nach dem Konstantentest (Satz 8.11) beschließen wir, dass $f - g = \text{const}$. Da nach (9.5) $g(a) = f(a)$, so erhalten wir dass $\text{const} = 0$, so dass die Identität $f(x) = g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt. ■

Beispiel. Setzen wir $x = a + b$ ein und schreiben (9.4) um wie folgt:

$$f(a+b) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}b + \frac{f''(a)}{2!}b^2 + ... + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}b^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}b^k.$$

Insbesondere für $f(x) = x^n$ erhalten wir den binomischen Lehrsatz:

$$\begin{aligned}(a+b)^n &= a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}b^2 + ... + \frac{n!}{n!}b^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{n(n-1)...(n-k+1)\,a^{n-k}}{k!}b^k = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k.\end{aligned}$$

Wir haben hier verwendet, dass

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!}.$$

Jetzt beweisen wir die Taylorformel mit Peano-Restglied für beliebige n-fach differenzierbare Funktion.

Hauptsatz 9.2 (Taylorformel mit der Restgliedform nach Peano) *Sei $f(x)$ eine n-fach differenzierbare Funktion auf einem Intervall J, wobei $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt es für jedes $a \in J$*

$$\boxed{f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + ... + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + o((x-a)^n)} \tag{9.7}$$

für $x \to a$. Umgekehrt, gilt für einige $c_0, c_1, ..., c_n \in \mathbb{R}$

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + ... + c_n(x-a)^n + o((x-a)^n) \tag{9.8}$$

für $x \to a$, so gilt dann $c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$ für alle $k = 0, 1, ..., n$.

Das Polynom

$$T_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + ... + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k, \tag{9.9}$$

heißt *Taylor-Polynom* von f der Ordnung n an der Stelle a. Die vollständige Notation von dem Taylor-Polynom ist $T_{n,f}(x;a)$, aber häufig schreibt man $T_n(x)$ wenn es klar ist was f und a sind.

Der Satz 9.2 besagt, dass

$$f(x) - T_n(x) = o\left((x-a)^n\right) \quad \text{für } x \to a. \tag{9.10}$$

Darüber hinaus ist $T_n(x)$ das einzige Polynom des Grades $\leq n$, das (9.10) erfüllt.

Das Taylor-Polynom $T_n(x)$ lässt sich betrachten als eine Approximation von $f(x)$ in der Nähe von a. Die Differenz $f(x) - T_n(x)$ heißt das *Restglied* der Taylorformel. Die Darstellung des Restgliedes in der Form (9.10) heißt die *Restgliedform nach Peano*.

Ein spezieller Fall des Satzes 9.2 für $n = 2$ stimmt mit dem Satz 8.16 überein.

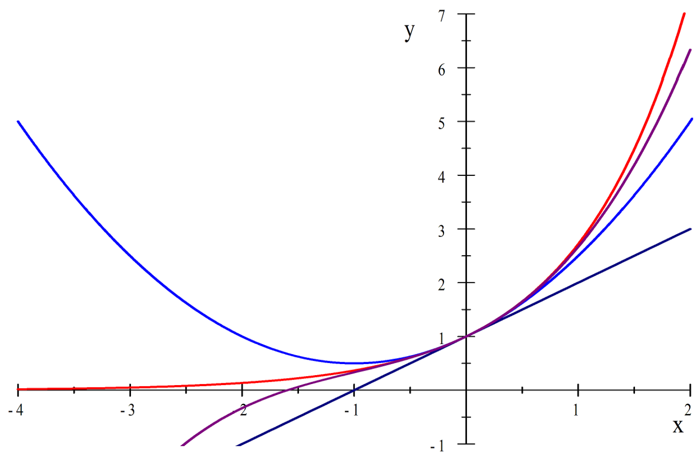
Beispiel. Sei $f(x) = e^x$. Da $f^{(n)}(a) = e^a$ für alle n, so erhalten wir aus (9.9)

$$T_n(x) = e^a\left(1 + \frac{(x-a)}{1!} + \frac{(x-a)^2}{2!} + \ldots + \frac{(x-a)^n}{n!}\right).$$

Insbesondere für $a = 0$ erhalten wir

$$T_n(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!},$$

d.h. $T_n(x)$ als eine Partialsumme der Exponentialreihe.



Funktion e^x (rot) und ihre Taylor-Polynome $T_1(x) = 1 + x$ (schwarz) $T_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}$ (blau) und $T_3(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$ (lila)

Beispiel. Sei $f(x) = x^p$, wobei $x > 0$ und $p \in \mathbb{R}$. Das Taylor-Polynom an einer Stelle $a > 0$ ist

$$\begin{aligned} T_n(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{p(p-1)\ldots(p-k+1)}{k!} a^{p-k}(x-a)^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{p}{k} a^{p-k}(x-a)^k \end{aligned} \tag{9.11}$$

wobei

$$\binom{p}{k} := \frac{p\,(p-1)\dots(p-k+1)}{k!}$$

eine Verallgemeinerung von Binomialkoeffizienten ist. Nach (9.7) gilt

$$x^p = T_n\,(x) + o\,((x-a)^n) \quad \text{für } x \to a.$$

Für $b = x - a$ erhalten wir aus (9.11)

$$\boxed{(a+b)^p = a^p + \binom{p}{1} a^{p-1} b + \binom{p}{2} a^{p-2} b^2 + \dots + \binom{p}{n} a^{p-n} b^n + o\,(b^n)}, \tag{9.12}$$

für $b \to 0$. Insbesondere für $n = 1$ erhalten wir

$$(a+b)^p = a^p + p a^{p-1} b + o\,(b)$$

für $n = 2$

$$(a+b)^p = a^p + p a^{p-1} b + \frac{p\,(p-1)}{2} a^{p-2} b^2 + o\left(b^2\right)$$

and für $n = 3$

$$(a+b)^p = a^p + p a^{p-1} b + \frac{p\,(p-1)}{2} a^{p-2} b^2 + \frac{p\,(p-1)\,(p-2)}{6} a^{p-3} b^3 + o\left(b^3\right). \tag{9.13}$$

Zum Beispiel, (9.13) ergibt für $p = 1/3$

$$\begin{aligned}(a+b)^{1/3} &= a^{1/3} + \frac{1}{3} a^{-2/3} b + \frac{1}{2 \cdot 3}\left(-\frac{2}{3}\right) a^{-5/3} b^2 + \frac{1}{6 \cdot 3}\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{5}{3}\right) a^{-8/3} b^3 + o\left(b^3\right) \\ &= a^{1/3} + \frac{1}{3} a^{-2/3} b - \frac{1}{9} a^{-5/3} b^2 + \frac{5}{81} a^{-8/3} b^3 + o\left(b^3\right).\end{aligned}$$

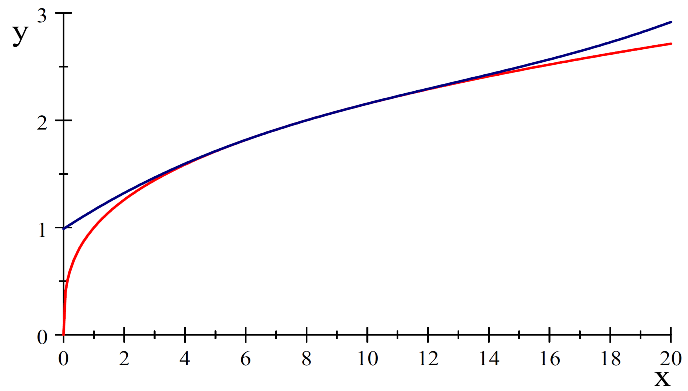
Für $a = 8$ und $b = 1$ erhalten wir

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{9} &\approx 8^{1/3} + \frac{1}{3} 8^{-2/3} - \frac{1}{9} 8^{-5/3} + \frac{5}{81} 8^{-8/3} \\ &= 2 + \frac{1}{3 \cdot 2^2} - \frac{1}{9 \cdot 2^5} + \frac{5}{81 \cdot 2^8} \\ &= 2 + \frac{1}{12} - \frac{1}{288} + \frac{5}{20\,736} = 2{,}08010\ldots \end{aligned} \tag{9.14}$$

In der Tat gilt es

$$\sqrt[3]{9} = 2{,}08008\ldots$$

so dass der Approximationsfehler von (9.14) ca. $0{,}00002$ ist.



Function $f(x) = x^{1/3}$ (rot) und ihres Taylor-Polynom an $a = 8$:

$$T_3(x) = 2 + \frac{1}{3 \cdot 2^2}(x-8) - \frac{1}{9 \cdot 2^5}(x-8)^2 + \frac{5}{81 \cdot 2^8}(x-8)^3 \text{ (blau)}$$

Beweis von dem Satz 9.2. Wir beweisen die asymptotische Identität

$$f(x) - T_n(x) = o((x-a)^n) \quad \text{für } x \to a \tag{9.15}$$

per Induktion nach n. Induktionsanfang: für $n = 1$ gilt (9.15) nach (9.2).

Induktionsschritt von n nach $n+1$. Wir müssen beweisen, dass

$$f(x) - T_{n+1}(x) = o\left((x-a)^{n+1}\right) \quad \text{für } x \to a$$

d.h.

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - T_{n+1}(x)}{(x-a)^{n+1}} = 0. \tag{9.16}$$

Leiten wir das Taylor-Polynom $T_{n+1}(x) = T_{n+1,f}(x;a)$ ab and erhalten folgendes:

$$\begin{aligned} T'_{n+1}(x) &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} k (x-a)^{k-1} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{f^{(k)}(a)}{(k-1)!}(x-a)^{k-1} \\ &= \sum_{l=0}^{n} \frac{(f')^{(l)}(a)}{l!}(x-a)^l, \end{aligned}$$

wobei $l = k-1$. Wir sehen, dass die rechte Seite hier mit dem Taylor-Polynom der Ordnung n der Funktion f' übereinstimmt. Somit gilt die folgende Identität:

$$\boxed{T'_{n+1,f}(x;a) = T_{n,f'}(x;a)}. \tag{9.17}$$

Nach der Induktionsvoraussetzung gilt

$$f'(x) - T_{n,f'}(x;a) = o((x-a)^n) \quad \text{für } x \to a,$$

woraus folgt

$$f'(x) - T'_{n+1}(x) = o((x-a)^n) \text{ für } x \to a,$$

d.h.

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)-T'_{n+1}(x)}{(x-a)^n}=0. \tag{9.18}$$

Da (9.16) ein unbestimmter Ausdruck der Form $\frac{0}{0}$ ist, so erhalten wir nach der Regel von l'Hôspital (Satz 8.14) und (9.18), dass

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-T_{n+1}(x)}{(x-a)^{n+1}}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)-T'_{n+1}(x)}{(n+1)(x-a)^n}=0,$$

woraus (9.10) folgt.

Für die zweite Aussage, nehmen wir an, dass (9.8) gilt, d.h.

$$f(x)=c_0+c_1(x-a)+...+c_n(x-a)^n+o((x-a)^n)\quad \text{für } x\to a, \tag{9.19}$$

und bezeichnen

$$b_k=\frac{f^{(k)}(a)}{k!}-c_k.$$

Wir müssen beweisen, dass $b_k=0$. Es folgt aus (9.7) und (9.19), dass

$$\begin{aligned} b_0+b_1(x-a)+...+b_n(x-a)^n &= T_n(x)-(c_0+c_1(x-a)+...+c_n(x-a)^n) \\ &= (f(x)+o((x-a)^n))-(f(x)+o((x-a)^n)) \\ &= o((x-a)^n)\quad \text{für } x\to a. \end{aligned} \tag{9.20}$$

Leiten wir daraus her, dass $b_k=0$ für alle $k=0,...,n$. Nehmen wir das Gegenteil an, dass $b_k\neq 0$ für einige k und setzen

$$m=\min\{k\in\{0,...,n\}:b_k\neq 0\}.$$

Dann gilt nach (9.20)

$$b_m(x-a)^m+b_{m+1}(x-a)^{m+1}+...+b_n(x-a)^n=o((x-a)^n)\ \text{für } x\to a.$$

Dividieren durch $(x-a)^m$ ergibt

$$b_m+b_{m+1}(x-a)+...+b_n(x-a)^{n-m}=\frac{o((x-a)^n)}{(x-a)^n}(x-a)^{n-m}\to 0 \text{ für } x\to a.$$

Andererseits, der Limes der linken Seite hier ist gleich b_m, woraus folgt $b_m=0$, was im Widerspruch zur Annahme steht. ■

16.04.2021 Vorlesung 2

Beispiel. Bestimmen wir die Taylor-Polynome für $\sin x$ an $a=0$. Wir haben die folgende Reihe für $\sin x$:

$$\sin x=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-...$$

Zeigen wir, dass das Taylor-Polynom $T_{2n+1}(x)$ von $\sin x$ ist gleich die Partialsumme

$$S_{2n+1}(x)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

In der Tat gilt es für $|x| \leq 1$

$$\begin{aligned} \left|\sin x - S_{2n+1}(x)\right| &= \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\right| \\ &\leq |x|^{2n+3} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} \\ &\leq \text{const}\, |x|^{2n+3} \end{aligned}$$

so dass

$$\sin x - S_{2n+1}(x) = o\left(x^{2n+1}\right) \quad \text{für } x \to 0.$$

Nach dem Eindeutigkeit-Aussage des Satzes 9.2 erhalten wir $T_{2n+1} = S_{2n+1}$.

Analog bestimmt man die Taylor-Polynome von $\cos x$. Alternativ kann man die Taylor-Polynome von $\cos x$ mit Hilfe von (9.17) erhalten d.h. als die Ableitungen von Taylor-Polynomen von $\sin x$:

$$T_{2n,\cos}(x) = T'_{2n+1,\sin}(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}.$$

Mit Hilfe von dem Satz 9.2 erhält man auch die folgenden Taylorformeln:

$$\boxed{\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - ... + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)} \text{ für } x \to 0$$

$$\boxed{\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - ... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o\left(x^{2n+2}\right)} \text{ für } x \to 0$$

(siehe Aufgaben 22 und 25).

9.3 Taylorformel mit Lagrange-Restglied

Wir beweisen hier eine andere Darstellung des Restgliedes in Taylorformel.

Hauptsatz 9.3 (Taylorformel mit der Restgliedform nach Lagrange) *Sei $f(x)$ eine n-fach differenzierbare Funktion auf einem Intervall J, wobei $n \in \mathbb{N}$. Dann, für alle $a, x \in J$, $x \neq a$, gilt*

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + ... + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n \tag{9.21}$$

für ein c zwischen a und x (d.h. $c \in (a,x)$ oder $c \in (x,a)$).

Für $n = 1$ sieht (9.21) wie folgt aus:

$$f(x) = f(a) + f'(c)(x-a),$$

was nicht anderes als Mittelwertsatz von Lagrange ist. Für $n = 2$ erhalten wir

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(c)}{2}(x-a)^2,$$

was mit dem Satz 8.17 übereinstimmt.

Die Identität (9.21) lässt sich wie folgt umschreiben:

$$f(x) = T_{n-1}(x) + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n,$$

wobei $T_{n-1}(x) = T_{n-1,f}(x;a)$, woraus die folgende Darstellung des Restgliedes folgt

$$f(x) - T_{n-1}(x) = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n, \tag{9.22}$$

was die *Restgliedform nach Lagrange* heißt.

Beweis von dem Satz 9.3. Wir wechseln im Beweis die Notation und beweisen, dass für alle $a, b \in J$, $a \neq b$, gilt

$$f(b) - T_{n-1}(b) = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(b-a)^n, \tag{9.23}$$

für ein c zwischen a und b. Dafür verwenden wir den Mittelwertsatz von Cauchy (Satz 8.15) mit den folgenden Funktionen F und G:

$$F(x) := f(b) - \left(f(x) + \tfrac{f'(x)}{1!}(b-x) + \tfrac{f''(x)}{2!}(b-x)^2 + ... + \tfrac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}(b-x)^{n-1}\right), \tag{9.24}$$

$$G(x) := (b-x)^n.$$

Nach Voraussetzungen ist F auf J differenzierbar, und nach dem Mittelwertsatz von Cauchy existiert ein c zwischen a und b mit

$$G'(c)(F(a) - F(b)) = F'(c)(G(a) - G(b)). \tag{9.25}$$

Bestimmen wir alle Werte in dieser Identität. Wir haben

$$F(a) - F(b) = (f(b) - T_{n-1}(b)) - 0 = f(b) - T_{n-1}(b)$$

und

$$G(a) - G(b) = (b-a)^n.$$

Auch gilt

$$G'(x) = -n(b-x)^{n-1}.$$

Leiten wir jedes Glied in (9.24) in x ab. Für jedes $k = 1, ..., n-1$ gilt

$$\begin{aligned}\left(\frac{f^{(k)}(x)}{k!}(b-x)^k\right)' &= -\frac{f^{(k)}(x)}{k!}k(b-x)^{k-1} + \frac{f^{(k+1)}(x)}{k!}(b-x)^k \\ &= -\left[\frac{f^{(k)}(x)}{(k-1)!}(b-x)^{k-1} - \frac{f^{(k+1)}(x)}{k!}(b-x)^k\right],\end{aligned}$$

woraus folgt

$$\begin{aligned}F'(x) &= -f'(x) + \left[\frac{f'(x)}{0!} - \frac{f''(x)}{1!}(b-x)\right] \\ &\quad + \left[\frac{f''(x)}{1!}(b-x) - \frac{f'''(x)}{2!}(b-x)^2\right] \\ &\quad + \left[\frac{f'''(x)}{2!}(b-x)^2 - \frac{f^{(4)}(x)}{3!}(b-x)^3\right] \\ &\quad + \cdots \\ &\quad + \left[\frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-2)!}(b-x)^{n-2} - \frac{f^{(n)}(x)}{(n-1)!}(b-x)^{n-1}\right].\end{aligned}$$

Alle Glieder in diesem Ausdruck lassen sich wegkürzen, außer des letzten Glied. Somit erhalten wir

$$F'(x) = -\frac{f^{(n)}(x)}{(n-1)!}(b-x)^{n-1}. \tag{9.26}$$

Einsetzen von den Werten von F, G, F', G' in (9.25) ergibt

$$n(b-c)^{n-1}(f(b) - T_{n-1}(b)) = \frac{f^{(n)}(c)}{(n-1)!}(b-c)^{n-1}(b-a)^n.$$

Da $c \neq b$, so dividieren durch $n(b-c)^{n-1}$ ergibt (9.23). ■

Beispiel. Betrachten wir die Funktion $f(x) = \sin x$ und ihre Taylor-Polynome an 0

$$T_4(x) = T_3(x) = x - \frac{x^3}{3!}.$$

Nach dem Satz 9.3 gilt für alle $x \neq 0$

$$\sin x - T_4(x) = \frac{f^{(5)}(c)}{5!}x^5$$

für ein c zwischen 0 und x. Da $f^{(5)}(c) = \cos c$ und $|\cos c| \leq 1$, so erhalten wir die Abschätzung des Approximationsfehlers:

$$|\sin x - T_4(x)| \leq \frac{|x|^5}{120},$$

die für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt. Zum Beispiel, für $x = 0,1$ erhalten wir

$$\sin 0,1 \approx T_4(0,1) = 0,1 - \frac{0,1^3}{6} = 0,0998333...,$$

und der Approximationsfehler ist kleiner gleich

$$\frac{0,1^5}{120} < 10^{-7}.$$

Chapter 10

Integralrechnung: unbestimmtes Integral

Wir betrachten hier das folgende Problem:

wie lässt sich eine Funktion durch ihre Ableitung wiederherstellen?

Diese Frage entsteht in vielen Anwendungen von Mathematik. Zum Beispiel, die Bestimmung der Position $x(t)$ von einem bewegenden Körper durch die gegebene Geschwindigkeit $v(t) = x'(t)$ führt zu diesem Problem. Noch allgemeineres Problem bekommt man aus dem Aktionsprinzip (Zweites Newtonsches Gesetz)

$$ma = F,$$

wobei m die Masse des Körpers ist, $a = a(t)$ die Beschleunigung an der Zeit t und F die bewegende Kraft. Da $a(t) = x''(t)$, so erhalten wir die Gleichung

$$x''(t) = \frac{F}{m}.$$

Ist F als eine Funktion von Zeit t bekannt, so bestimmt man erst x' und danach x. Ist F eine Funktion von x und x' wie häufig der Fall ist, so erhält man eine *Differentialgleichung* – eine Beziehung zwischen x'', x', x die x wiederherstellen lässt.

10.1 Stammfunktion und unbestimmtes Integral

Seien f und F reellwertige Funktionen auf einem Intervall J.

Definition. Gilt $F' = f$ auf einem Intervall J, so heißt die Funktion F eine *Stammfunktion* von f auf J.

Nicht alle Funktionen haben Ableitung. Auch nicht alle Funktion haben Stammfunktion. Im nächsten Kapitel beweisen wir den folgenden Satz.

Satz 10.1 *Jede stetige Funktion auf einem Interval J hat eine Stammfunktion auf diesem Intervall.*

Für die Eindeutigkeit von Stammfunktion gilt folgendes.

Satz 10.2 *Ist F eine Stammfunktion von f auf einem Intervall J, so hat jede Stammfunktion von f die Form $F(x)+C$, wobei C eine beliebige Konstante ist.*

Beweis. Gilt $F' = f$, so gilt auch $(F+C)' = F' = f$. Somit ist $F+C$ auch eine Stammfunktion von f. Umgekehrt, ist G eine Stammfunktion von f so gilt auf J die Identität $F' = G' = f$ woraus folgt $(G-F)' = 0$ auf J. Nach dem Konstantentest (Satz 8.11) ist die Funktion $G-F$ gleich eine Konstante C auf J, woraus folgt $G(x) = F(x)+C$ für alle $x \in J$, was zu beweisen war. ∎

Zum Beispiel, we wissen, dass

$$\left(x^2\right)' = 2x,$$

so dass x^2 eine Stammfunktion von $2x$ ist. Es folgt, dass jede Stammfunktion von $2x$ gleich x^2+C ist.

Definition. Die Menge von allen Stammfunktionen von $f(x)$ wird mit

$$\int f(x)\,dx$$

bezeichnet ("Integral von f von x dx"). Dieser Ausdruck heißt auch *unbestimmtes* Integral von f. Nach dem Satz 10.2 ist $\int f(x)\,dx$ eine Funktion plus beliebige Konstante.

Z.B. es gilt

$$\int 2x\,dx = x^2 + C.$$

Der Grund für diese Notation ist wie folgt. Das Symbol $\int$ heißt *Integral* und stamm aus dem Buchstabe "S" von "**S**umme". Allerdings passt der Buchstabe "S" auch zum Wort "**S**tammfunktion". Um $f(x)\,dx$ zu erklären, erinnern wir uns an die Definition von Differential.

Definition. Sei F eine differenzierbare Funktion auf einem Intervall. Der Ausdruck $F'(x)\,dx$ heißt das *Differential* von F und wird mit dF bezeichnet, d.h.

$$dF = F'(x)\,dx, \tag{10.1}$$

wobei dx eine unabhängige Variable ist, die das Differential von x heißt.

Nach Definition der Ableitung gilt es für $dx \to 0$

$$\begin{aligned} F(x+dx) - F(x) &= F'(x)\,dx + o(dx) \\ &= dF + o(dx). \end{aligned} \tag{10.2}$$

Somit ist das Differential dF eine lineare bezüglich dx Approximation der Differenz $F(x+dx) - F(x)$.

Gegeben sei eine stetige Funktion f auf einem Intervall J, versuchen wir die Stammfunktion F von f zu bestimmen. Fixieren wir einen Punkt $x_0 \in J$ und für beliebigen Punkt $x \in J$ betrachten eine Folge $\{x_k\}_{k=0}^{n}$ mit $x_n = x$ so dass die Differenzen

$$dx_k = x_{k+1} - x_k$$

klein genug sind (d.h. n reichend groß ist). Wenn wir $o\,(dx)$ vernachlässigen so erhalten mit Hilfe von (10.2)

$$F\,(x) - F\,(x_0) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(F\,(x_{k+1}) - F\,(x_k)\right) \approx \sum_{k=0}^{n-1} F'\,(x_k)\,dx_k = \sum_{k=0}^{n-1} f\,(x_k)\,dx_k. \tag{10.3}$$

Im nächsten Kapitel beweisen wir, dass der Grenzwert der rechten Seite für $n \to \infty$ existiert und gleich $F\,(x) - F\,(x_0)$ ist. Somit spiegelt die Notation $\int f\,(x)\,dx$ die Konstruktion der Stammfunktion wider, und die Summe $\sum_{k=0}^{n-1} f\,(x_k)\,dx_k$ wird zum Integral $\int f\,(x)\,dx$ für $n \to \infty$.

Die Operation $f \mapsto \int f\,(x)\,dx$ heißt *unbestimmte Integration* oder Integrieren. Das Wort "unbestimmt" bezieht sich auf die unbestimmte Konstante C im Satz 10.2. Die Funktion $f\,(x)$ heißt der *Integrand*, die Variable x heißt die *Integrationsvariable*. Natürlich ist der Wert von Integral unabhängig von der Notation der Integrationsvariable.

In diesem Kapitel lernen wir die Methoden von unbestimmten Integration. Da Integrieren eine inverse Operation von Ableiten (=Differenzieren) ist, so erhält man meist die Rechenregeln von Integrieren als Umkehrung von den Rechenregeln von Ableiten.

Sei F eine differenzierbare Funktion auf einem Intervall J. Nach dem Satz 10.2 gilt auf J die Identität

$$\boxed{\int F'\,(x)\,dx = F\,(x) + C}. \tag{10.4}$$

Diese Identität lässt uns eine Tabelle von Stammfunktionen zu erstellen.

Zum Beispiel, da $\left(x^{a+1}\right)' = (a+1)\,x^a$ so für $a \neq -1$ erhalten wir

$$\left(\frac{x^{a+1}}{a+1}\right)' = x^a,$$

woraus folgt, für $a \neq -1$,

$$\boxed{\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C.}$$

Für reelles a gilt diese Identität auf $(0, +\infty)$, für nichtnegative ganze a – auf $\mathbb{R}$, und für negative ganze a – auf $(0, +\infty)$ und $(-\infty, 0)$.

Insbesondere erhalten wir

$$\begin{aligned} \int dx &= x + C, \qquad \int x\,dx = \frac{x^2}{2} + C, \\ \int \sqrt{x} dx &= \frac{x^{3/2}}{3/2} + C, \qquad \int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C. \end{aligned}$$

Da $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$ auf $(0, +\infty)$ und $(-\infty, 0)$ (Aufgabe 7), so erhalten wir

$$\boxed{\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C},$$

auch auf $(0, +\infty)$ und $(-\infty, 0)$.

Umkehrung von Ableitung von Exponentialfunktion $(e^x)' = e^x$ ergibt

$$\boxed{\int e^x dx = e^x + C}$$

und $(e^{ax})' = ae^{ax}$ ergibt, für $a \neq 0$,

$$\boxed{\int e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a} + C}.$$

Umkehrung von $(a^x)' = (\ln a)\, a^x$ ergibt

$$\boxed{\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C}$$

wobei $a > 0,\ a \neq 1$.

Umkehrung von Ableitungen $(\cos x)' = -\sin x$ und $(\sin x)' = \cos x$ ergibt:

$$\boxed{\int \sin x\, dx = -\cos x + C}$$

$$\boxed{\int \cos x\, dx = \sin x + C}.$$

Da und $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ und $(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$ so erhalten wir

$$\boxed{\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C},$$

auf jedem Intervall wo $\cos x$ nicht verschwindet, und

$$\boxed{\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C},$$

auf jedem Intervall wo $\sin x$ nicht verschwindet.

Umkehrung von Ableitungen $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ und $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$ ergibt

$$\boxed{\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C} \text{ auf } (-1, 1),$$

$$\boxed{\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C} \text{ auf } (-\infty, \infty).$$

21.04.21 Vorlesung 3

Umkehrung von Ableitungen von den Hyperbelfunktionen $(\cosh x)' = \sinh x$ und $(\sinh x)' = \cosh x$ ergibt

$$\boxed{\int \sinh x \, dx = \cosh x + C}$$

$$\boxed{\int \cosh x \, dx = \sinh x + C}.$$

Da $(\tanh x)' = \frac{1}{\cosh^2 x}$ und $(\coth x)' = \frac{1}{\sinh^2 x}$, so erhalten wir

$$\boxed{\int \frac{dx}{\cosh^2 x} = \tanh x + C},$$

$$\boxed{\int \frac{dx}{\sinh^2 x} = -\coth x + C}$$

auf $(0, \infty)$ und $(-\infty, 0)$. Nach Aufgaben $6, 7$ haben wir

$$\left(\ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)\right)' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}},$$

$$\left(\ln\left|x + \sqrt{x^2-1}\right|\right)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \quad \text{auf } (1, +\infty) \text{ und } (-\infty, -1)$$

$$\left(\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right)' = \frac{1}{1-x^2} \quad \text{auf } \ (-\infty, -1), (-1, 1) \text{ und } (1, +\infty)$$

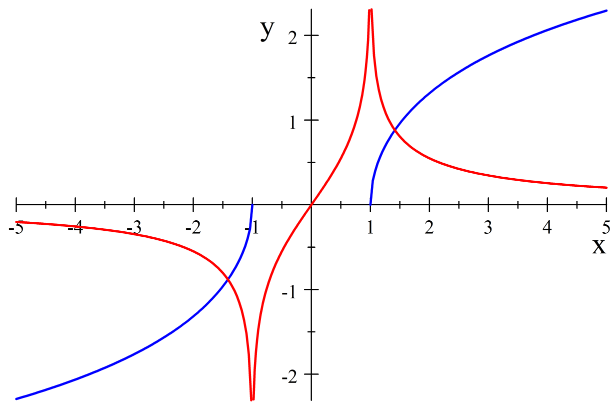
Umkehrung von diesen Identitäten ergibt folgendes:

$$\boxed{\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) + C = \sinh^{-1} x + C},$$

$$\boxed{\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2-1}\right| + C} \quad \text{auf } (1, +\infty) \text{ und } (-\infty, -1),$$

$$\boxed{\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C} \quad \text{auf } \ (-\infty, -1), (-1, 1) \text{ und } (1, +\infty)$$

Die Funktion $\ln\left|x + \sqrt{x^2-1}\right|$ heißt der *lange Logarithmus.* Auf $(1, +\infty)$ stimmt diese Funktion mit $\cosh^{-1} x$ überein. Die Funktion $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$ heißt der *hohe Logarithmus.* Auf $(-1, 1)$ stimmt diese Funktion mit $\tanh^{-1} x$ überein.



Der lange Logarithmus (blau) und der hohe Logarithmus (rot)

Die obigen Identitäten liefern eine Tabelle von Stammfunktionen, die auch *Integraltabelle* heißt. Die Einträge dieser Tabelle heißen *Grundintegrale*. Es gibt längere Tabellen von Stammfunktionen mit tausenden Einträgen. Es gibt mehrere Programme wie *Maple*, *Mathematica*, *MuPAD* usw., die Stammfunktion explizit bestimmen können. Diese Programme benutzen die ausführlichen Integraltabellen und die Rechenregeln Integrieren.

Integrieren ist normalerweise viel schwieriger als Differenzieren. Darüber hinaus ist es nicht immer möglich das Integral explizit durch elementare Funktionen auszudrücken. Z.B. die Integrale

$$\int e^{x^2} dx, \quad \int \frac{\sin x}{x} dx, \quad \int e^{-x}\sqrt{x} dx$$

(und viele andere) lassen sie nicht als elementare Funktionen darstellen.

In diesem Kapitel entwickeln wir die Technik des Integrierens für explizite Bestimmung von Integralen (wenn möglich). Diese Technik besteht aus drei Rechenregeln – Linearität, partielle Integration, und Substitution, die häufig ein gegebenes Integral auf Grundintegrale zurückzuführen helfen.

Es gibt auch spezielle Integrationsverfahren für einige Klassen von Integranden.

10.2 Linearität des unbestimmten Integrale

Satz 10.3 *Seien f und g zwei stetige Funktion auf einem Intervall J. Dann gilt*

$$\int (f+g)\, dx = \int f\, dx + \int g\, dx. \tag{10.5}$$

Auch für beliebige Konstante $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, gilt

$$\int a\, f\, dx = a \int f\, dx.$$

Beweis. Wir müssen beweisen, dass die Ableitung der rechten Seite von (10.5) gleich $f+g$ ist. Die Summenregel der Ableitung ergibt

$$\left(\int f dx + \int g dx\right)' = \left(\int f dx\right)' + \left(\int g dx\right)' = f+g,$$

was zu beweisen war. Die zweite Identität lässt sich analog beweisen:

$$\left(a\int f dx\right)' = a\left(\int f dx\right)' = af.$$

■

Beispiel. 1. Bestimmen wir $\int\left(x+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 dx$. Es gilt

$$\left(x+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 = x^2+2x\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x} = x^2+2\sqrt{x}+\frac{1}{x},$$

und somit

$$\begin{aligned}\int\left(x+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 dx &= \int x^2dx+2\int x^{1/2}dx+\int\frac{1}{x}dx\\ &= \frac{x^3}{3}+\frac{4x^{3/2}}{3}+\ln|x|+C.\end{aligned}$$

2. Bestimmen wir $\int\cos^2 x\,dx$. Dafür bemerken wir, dass

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

und somit

$$\begin{aligned}\int\cos^2 x\,dx &= \int\frac{1+\cos 2x}{2}dx\\ &= \frac{1}{2}\int dx+\frac{1}{2}\int\cos 2x\,dx\\ &= \frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x+C\\ &= \frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\sin x\cos x+C.\end{aligned}\qquad (10.6)$$

Hier haben wir benutzt, dass $(\sin 2x)' = 2\cos 2x$ und somit

$$\int\cos 2x\,dx = \frac{1}{2}\sin 2x+C.$$

3. Bestimmen wir $\int\frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}$. Bemerken wir zunächst, dass

$$\frac{1}{\sin^2 x\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}+\frac{1}{\sin^2 x},$$

woraus folgt

$$\int\frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x} = \int\frac{dx}{\cos^2 x}+\int\frac{dx}{\sin^2 x} = \tan x-\cot x+C.$$

4. Sei f ein Polynom

$$f(x) = c_0+c_1x+...+c_nx^n = \sum_{k=0}^n c_kx^k.$$

Dann erhalten wir

$$\begin{aligned}\int f(x)\,dx &= \sum_{k=0}^{n}\int c_k x^k dx = \sum_{k=0}^{n}\frac{c_k}{k+1}x^{k+1}+C\\ &= C+c_0x+c_1\frac{x^2}{2}+...+c_n\frac{x^{n+1}}{n+1}.\end{aligned}$$

Die unbestimmte Konstante C lässt sich bestimmen wenn die Stammfunktion noch eine Bedingung erfüllen muss. Z.B., bestimmen wir die Stammfunktion F des Polynoms f mit der zusätzlichen *Anfangsbedingung* $F(0)=a$, wobei a gegeben ist. Für die Funktion

$$F(x)=C+c_0x+c_1\frac{x^2}{2}+...+c_n\frac{x^{n+1}}{n+1}$$

gilt $F(0)=C$, woraus folgt, dass $C=a$ und somit

$$F(x)=a+c_0x+c_1\frac{x^2}{2}+...+c_n\frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

10.3 Partielle Integration

Seien $u(x)$ und $v(x)$ zwei Funktionen auf einem Intervall J. Ist v differenzierbar, so betrachten wir den Ausdruck

$$\int u dv \equiv \int u(x)\,dv(x) := \int u(x)\,v'(x)\,dx.$$

Satz 10.4 *Seien u,v zwei stetig differenzierbare Funktionen auf einem Intervall J. Dann gilt auf diesem Intervall die Identität*

$$\int u dv = uv - \int v du. \tag{10.7}$$

Beweis. Die Identität (10.7) lässt sich ausführlicher wie folgt umschreiben:

$$\int uv'dx = uv - \int vu'dx. \tag{10.8}$$

Da die Funktionen uv' und vu' stetig sind, so die beiden Integrale in (10.8) existieren. Um (10.8) zu beweisen, es reicht zu zeigen, dass die Ableitung der rechten Seite gleich uv' ist. In der Tat gilt es nach der Produktregel der Ableitung, dass

$$\begin{aligned}\left(uv-\int vu'dx\right)' &= (uv)'-vu'\\ &= (u'v+uv')-vu'\\ &= uv',\end{aligned}$$

was zu beweisen war. ■

Beispiel. 1. Bestimmen $\int \ln x\,dx$. Für $u = \ln x$ und $v = x$ haben wir

$$\int \ln x\,dx = x\ln x - \int x\,d\ln x = x\ln x - \int x\frac{1}{x}dx = x\ln x - x + C,$$

so dass

$$\boxed{\int \ln x\,dx = x\ln x - x + C}$$

2. Bestimmen $\int x^2e^x dx$. Wir benutzen, dass $e^x dx = de^x$. Für $u = x^2$ und $v = e^x$ haben wir

$$\int x^2e^x dx = \int x^2 de^x = x^2e^x - \int e^x dx^2 = x^2e^x - 2\int xe^x dx.$$

Um $\int xe^x dx$ zu bestimmen, wir benutzen den Satz 10.4 wieder, diesmal mit $u = x$ und $v = e^x$:

$$\int xe^x dx = \int x\,de^x = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C.$$

Somit erhalten wir

$$\int x^2e^x dx = x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + C.$$

3. Bestimmen $\int \sqrt{x^2+1}\,dx$. Für $u = \sqrt{x^2+1}$ und $v = x$, erhalten wir

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{x^2+1}\,dx &= x\sqrt{x^2+1} - \int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+1}} \\
&= x\sqrt{x^2+1} - \int \frac{(x^2+1)\,dx}{\sqrt{x^2+1}} + \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} \\
&= x\sqrt{x^2+1} - \int \sqrt{x^2+1}\,dx + \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) + C.
\end{aligned}$$

Wir sehen, dass dasselbe Integral in den beiden Seiten erscheint. Lösen diese Gleichung bezüglich $\int \sqrt{x^2+1}\,dx$ ergibt

$$\boxed{\int \sqrt{x^2+1}\,dx = \tfrac{1}{2}x\sqrt{x^2+1} + \tfrac{1}{2}\ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) + C.}$$

Analog zeigt man, dass

$$\boxed{\int \sqrt{x^2-1}\,dx = \tfrac{1}{2}x\sqrt{x^2-1} - \tfrac{1}{2}\ln\left|x + \sqrt{x^2-1}\right| + C}$$

auf $(1, +\infty)$ und $(-\infty, -1)$ (siehe Aufgabe 30).

10.4 Substitutionsregel

Satz 10.5 *Sei f eine Funktion auf einem Intervall I und sei F eine Stammfunktion von f auf I, d.h.*

$$\int f(y)\, dy = F(y) + C. \tag{10.9}$$

Sei u eine differenzierbare Funktion auf einem Intervall J mit $u(J) \subset I$. Dann gilt auf J

$$\int f(u(x))\, du(x) = F(u(x)) + C. \tag{10.10}$$

Bemerkung. Dieser Aussage bedeutet folgendes: um das Integral in (10.10) zu berechnen, man macht die Substitution $y = u(x)$ und betrachtet y als eine neue Integrationsvariable; nach Integrieren ersetzt man y in (10.9) zurück durch $u(x)$. Die Bedingung $u(J) \subset I$ gewährleistet dass die Komposition $f \circ u$ auf J definiert ist.

Dieses Verfahren von Integrieren, die auf der Identität (10.10) basiert, heißt *die Substitutionsregel*. Die Reihenfolge von Schritten ist wie folgt:

$$\int f(u(x))\, du(x) \rightsquigarrow \int f(y)\, dy \rightsquigarrow F(y) \rightsquigarrow F(u(x)).$$

Beweis. Die beiden Funktionen $f(u(x))$ und $F(u(x))$ haben den Definitionsbereich J. Da

$$\int f(u(x))\, du(x) = \int f(u(x))\, u'(x)\, dx,$$

so ist die Identität (10.10) äquivalent zu

$$(F(u(x)))' = f(u(x))\, u'(x).$$

In der Tat erhalten wir nach der Kettenregel und $F' = f$, dass

$$(F(u(x)))' = F'(u(x))\, u'(x) = f(u(x))\, u'(x),$$

was zu beweisen war. ∎

Es ist klar aus dem Beweis, dass die Substitutionsregel eine Umkehrung der Kettenregel ist.

Beispiel. 1. Bestimmen wir

$$\int (ax+b)^n\, dx$$

wobei $a \neq 0$ und $n \in \mathbb{R}$. Da

$$d(ax+b) = a dx$$

und somit

$$dx = \frac{1}{a} d(ax+b),$$

so erhalten wir mit der Substitution $u(x) = ax + b$

$$\int (ax+b)^n\, dx = \frac{1}{a}\int (ax+b)^n\, d(ax+b) = \frac{1}{a}\int u^n du.$$

Betrachten wir weiter u als neue Integrationsvariable (ohne y einzuführen) und erhalten

$$\int u^n du = \begin{cases} \dfrac{u^{n+1}}{n+1} + C, & n \neq -1, \\ \\ \ln|u| + C, & n = -1. \end{cases}$$

Es folgt, dass

$$\int (ax+b)^n \, dx = \begin{cases} \dfrac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)} + C, & n \neq 1, \\ \\ \dfrac{1}{a} \ln|ax+b| + C, & n = -1. \end{cases} \tag{10.11}$$

2. Bestimmen wir

$$\int \frac{dx}{x^2-1}.$$

Das ist ein Grundintegral, aber trotzdem zeigen wir, wie man dieses Integral berechnen kann. Da

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right),$$

so erhalten wir

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2-1} &= \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x+1} \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{d(x-1)}{x-1} - \frac{1}{2}\int \frac{d(x+1)}{x+1} \\ &= \frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln|x+1| + C \\ &= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C. \end{aligned}$$

Hier haben wir die Substitutionen $u = x - 1$ und $u = x + 1$ verwendet.

3. Bestimmen wir

$$\int \frac{x\,dx}{1+x^2}.$$

Da

$$x\,dx = d\left(\frac{x^2}{2}\right) = \frac{1}{2} d\left(1+x^2\right),$$

so haben wir

$$\int \frac{x\,dx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2}.$$

Die Substitution $u = 1 + x^2$ ergibt

$$\int \frac{x\,dx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{2}\ln|u| + C = \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) + C.$$

4. Bestimmen wir

$$\int \frac{dx}{\sin x}.$$

Mit der Substitution $u = \cos x$ erhalten wir

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sin x} &= \int \frac{\sin x\, dx}{\sin^2 x} = -\int \frac{d\cos x}{\sin^2 x} = \int \frac{d\cos x}{\cos^2 x - 1} = \int \frac{du}{u^2-1} \\ &= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right| + C = \frac{1}{2}\ln\frac{1-\cos x}{1+\cos x} + C.\end{aligned}$$

Um die Antwort weiter zu vereinfachen, benutzen wir die trigonometrische Identität[1]

$$\frac{1-\cos x}{1+\cos x} = \tan^2\frac{x}{2}, \tag{10.12}$$

was ergibt

$$\boxed{\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|\tan\tfrac{x}{2}\right| + C.}$$

5. Bestimmen wir

$$\int \arcsin x\, dx.$$

Wir haben:

$$\begin{aligned}\int \arcsin x\, dx &= x\arcsin x - \int x\, d\arcsin x \quad \text{(partielle Integration: } u = \arcsin x,\ v = x) \\ &= x\arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx \\ &= x\arcsin x + \frac{1}{2}\int \frac{d\left(1-x^2\right)}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{(Substitution } u = 1-x^2) \\ &= x\arcsin x + \frac{1}{2}\int u^{-1/2}du \quad \text{(Grundintegral)} \\ &= x\arcsin x + u^{1/2} + C \\ &= x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C.\end{aligned}$$

Somit gilt es

$$\boxed{\int \arcsin x\, dx = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C}$$

Häufig ist es unklar ob das gegebene Integral sich in der form $\int f(u(x))\, du(x)$ darstellen lässt. In diesem Fall hilft die folgende Version der Substitutionsregel.

Korollar 10.6 (Inverse Substitution) *Sei f eine stetige Funktion auf einem Intervall J. Sei v eine differenzierbare Funktion auf einem Intervall I mit $v(I) = J$, und nehmen wir an, dass die inverse Funktion $v^{-1} : J \to I$ existiert. Gilt auf I*

$$\int f(v(y))\, dv(y) = G(y) + C \tag{10.13}$$

[1] In der Tat gilt

$$2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x = \cos 2x,$$

woraus folgt

$$\frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x} = \frac{2\sin^2 x}{2\cos^2 x} = \tan^2 x.$$

Ersetzen x durch $x/2$ ergibt (10.12).

so gilt auf J

$$\int f(x)\,dx = G\left(v^{-1}(x)\right) + C. \tag{10.14}$$

Bemerkung. Diese Aussage bedeutet folgendes: um das Integral $\int f(x)\,dx$ zu berechnen, man macht die inverse Substitution $x = v(y)$, berechnet das Integral $\int f(v(y))\,dv(y)$ und dann ersetzt y durch $v^{-1}(x)$. Dieses Verfahren von Integrieren heißt die inverse Substitutionsregel. Die Reihenfolge von Schritten ist wie folgt:

$$\int f(x)\,dx \rightsquigarrow \int f(v(y))\,dv(y) \rightsquigarrow G(y) \rightsquigarrow G\left(v^{-1}(x)\right).$$

Beweis. Sei F eine Stammfunktion von f (die nach dem Satz 10.1 existiert) so dass

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C.$$

Nach dem Satz 10.5 ergibt die Substitution $x = v(y)$

$$\int f(v(y))\,dv(y) = F(v(y)) + C.$$

Vergleichen mit (10.13) zeigt dass

$$G(y) = F(v(y)) + C.$$

Einsetzen $v(y) = x$ und $y = v^{-1}(x)$ ergibt die Gleichheit

$$F(x) = G\left(v^{-1}(x)\right) + C,$$

woraus (10.14) folgt. ■

Beispiel. 1. Bestimmen wir

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$$

im Definitionsbereich $x \in (0,1)$. Mit der inversen Substitution $x = y^2$ (wobei $y \in (0,1)$) erhalten wir

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} &= \int \frac{d(y^2)}{\sqrt{y^2(1-y^2)}} \\
&= \int \frac{2y\,dy}{y\sqrt{1-y^2}} \\
&= 2\int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = 2\arcsin y + C \\
&= 2\arcsin\sqrt{x} + C,
\end{aligned}$$

da $y = \sqrt{x}$.

2. Bestimmen wir das Integral

$$\int \frac{dx}{e^x+1}$$

mit Hilfe von der inversen Substitution $x = \ln y$ wobei $y > 0$. Wir erhalten

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{e^x+1} &= \int \frac{d\ln y}{y+1} \\
&= \int \frac{dy}{y\,(y+1)} \\
&= \int \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y+1}\right) dy \\
&= \int \frac{dy}{y} - \int \frac{dy}{y+1} \\
&= \ln y - \ln(y+1) + C \\
&= x - \ln(e^x+1) + C,
\end{aligned}$$

da $y = e^x$.

3. Bestimmen wir

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx.$$

Der Definitionsbereich des Integrands ist $x \in [-1, 1]$. Verwenden wir die inverse Substitution $x = \sin y$ wobei $y \in [-\pi/2, \pi/2]$. Dann erhalten wir

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{1-x^2}\,dx &= \int \sqrt{1-\sin^2 y}\,d\sin y \\
&= \int \cos y\ \cos y\,dy \qquad\qquad (\text{da } \cos y \geq 0) \\
&= \int \cos^2 y\ dy \qquad\qquad (\text{nach } (10.6)) \\
&= \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}\sin y \cos y + C \\
&= \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + C,
\end{aligned}$$

da $y = \arcsin x$ und $\cos y = \sqrt{1-x^2}$. Die Antwort ist

$$\boxed{\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \tfrac{1}{2}\arcsin x + \tfrac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + C}. \tag{10.15}$$

Das obige Argument beweist die Identität (10.15) auf $[-1, 1]$. Allerdings sind die einzelnen Funktionen $\arcsin x$ und $\sqrt{1-x^2}$ nur auf $(-1, 1)$ differenzierbar. Es ist interessant, dass die Summe in der rechten Seite von (10.15) trotzdem auch an den Grenzen $x = \pm 1$ differenzierbar ist.

23.04.21 Vorlesung 4

10.5 Integration von rationalen Funktionen

Eine Funktion $f(x)$ heißt *rational* wenn f als Quotient zweier Polynome darstellbar ist, d.h.

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

wobei $P(x)$ und $Q(x)$ Polynome mit reellwertigen Koeffizienten sind. Der Definitionsbereich von f ist jedes Intervall wo $Q(x)$ nicht verschwindet, insbesondere, jedes Intervall zwischen aufeinanderfolgenden reellen Nullstellen von $Q(x)$.

Die rationalen Funktionen lassen sich immer in elementaren Funktionen integrieren. Das Verfahren von Berechnung des Integrals

$$\int f(x)\,dx$$

mit einem rationalen Integrand f besteht aus drei Schritten.

(i) Faktorisieren den Nenner $Q(x)$ in Produkt von linearen und quadratischen Funktionen wie folgt:

$$Q(x) = \alpha (x - r_1)^{k_1} \ldots (x - r_l)^{k_l} \left(x^2 + p_1 x + q_1\right)^{m_1} \ldots \left(x^2 + p_n x + q_n\right)^{m_n}, \tag{10.16}$$

wobei $l, n \in \mathbb{Z}_+$, $\alpha, r_i, p_j, q_j \in \mathbb{R}$, $k_i, m_j \in \mathbb{N}$, wobei die quadratische Polynome $x^2 + p_j x + q_j$ keine reellen Nullstellen haben. Darüber hinaus sind alle Zahlen r_i verschieden und die Paaren (p_j, q_j) sind auch verschieden[2]. Die Potenz k_i heißt die *Vielfachheit* von $(x - r_i)$ und m_j – die Vielfachheit von $(x^2 + p_j x + q_j)$.

(ii) Zerlegen der Funktion $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ in die Summe von einem Polynom und mehreren *Partialbrüchen* der Form

$$\frac{a}{(x - r)^k}, \quad \frac{bx + c}{(x^2 + px + q)^m}. \tag{10.17}$$

Jeder lineare Faktor $(x - r_i)^{k_i}$ in (10.16) trägt zu solcher Zerlegung von $f(x)$ die folgende Summe bei:

$$\frac{a_1}{(x - r_i)} + \frac{a_2}{(x - r_i)^2} + \ldots + \frac{a_{k_i}}{(x - r_i)^{k_i}},$$

und jeder quadratische Faktor $(x^2 + p_j x + q_j)^{m_j}$ in (10.16) trägt zur Zerlegung von $f(x)$ die folgende Summe bei:

$$\frac{b_1 x + c_1}{(x^2 + p_j x + q_j)} + \frac{b_2 x + c_2}{(x^2 + p_j x + q_j)^2} + \ldots + \frac{b_{m_j} x + c_{m_j}}{(x^2 + p_j x + q_j)^{m_j}}.$$

Somit erhält man eine Zerlegung

[2] Existenz der Faktorisierung (10.16) für beliebiges Polynom folgt aus dem Fundamentalsatz der Algebra, die wir später beweisen. Allerdings brauchen wir solche Darstellung nur für einige Beispiele wo sie leicht zu bekommen ist.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= R(x) + \sum_{i=1}^{l}\left(\frac{a_1^{(i)}}{(x-r_i)} + \frac{a_2^{(i)}}{(x-r_i)^2} + \dots + \frac{a_{k_i}^{(i)}}{(x-r_i)^{k_i}}\right) \\
&\quad + \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{b_1^{(j)}x + c_1^{(j)}}{(x^2+p_jx+q_j)} + \dots + \frac{b_{m_j}^{(j)}x + c_{m_j}^{(j)}}{(x^2+p_jx+q_j)^{m_j}}\right),
\end{aligned}
\tag{10.18}
$$

wobei $R(x)$ ein Polynom ist, r_i, p_j, q_j, k_i, m_j sind wie in (10.16), und $a_k^{(i)}, b_m^{(j)}, c_m^{(j)} \in \mathbb{R}$. Die Koeffizienten $a_k^{(i)}, b_m^{(j)}, c_m^{(j)}$ müssen noch aus dieser Identität bestimmt werden. Die Darstellung einer rationalen Funktion f in der Form (10.18) heißt die *Partialbruchzerlegung.* Die Existenz der Partialbruchzerlegung für beliebige rationale Funktion f lässt sich mit Hilfe von Division von Polynomen beweisen.

(iii) Integrieren f mit Hilfe von der Partialbruchzerlegung (10.18). Integrieren von dem Polynom $R(x)$ ist offensichtlich. Die Partialbrüche lassen sich wie folgt integrieren.

Der *Partialbruch erster Art* $\frac{a}{(x-r)^k}$ wird nach (10.11) integriert:

$$
\int \frac{a}{(x-r)^k}dx = a\int (x-r)^{-k}\,dx = a\begin{cases} \dfrac{(x-r)^{1-k}}{1-k} + C, & k \neq 1, \\ \ln|x-r| + C, & k = 1. \end{cases}
$$

Integrieren den *Partialbruch zweiter Art* $\frac{bx+c}{(x^2+px+q)^m}$ ist schwieriger. Zuerst verwenden wir die quadratische Ergänzung:

$$
x^2 + px + q = (x+p/2)^2 + \left(q - p^2/4\right) = u^2 + s^2,
$$

wobei $u = x + p/2$ und $s = \sqrt{q - p^2/4} > 0$ (da $x^2 + px + q$ keine reelle Nullstelle hat, so gilt $q - p^2/4 > 0$). Mit Substitution $x = u - p/2$ erhalten wir

$$
\begin{aligned}
\int \frac{bx+c}{(x^2+px+q)^m}dx &= \int \frac{b(u-p/2)+c}{(u^2+s^2)^m}du \\
&= b\int \frac{u\,du}{(u^2+s^2)^m} + (c - bp/2)\int \frac{du}{(u^2+s^2)^m}.
\end{aligned}
$$

Somit bleibt es die folgenden Integrale zu bestimmen:

$$
\int \frac{u\,du}{(u^2+s^2)^m} \quad \text{und} \quad \int \frac{du}{(u^2+s^2)^m}. \tag{10.19}
$$

Das erste Integral ist einfach:

$$
\begin{aligned}
\int \frac{u\,du}{(u^2+s^2)^m} &= \frac{1}{2}\int \frac{d(u^2+s^2)}{(u^2+s^2)^m} \quad \text{(Substitution } v = u^2+s^2\text{)} \\
&= \frac{1}{2}\int v^{-m}dv = \frac{1}{2}\begin{cases} \dfrac{v^{1-m}}{1-m} + C, & m \neq 1, \\ \ln|v| + C, & m = 1, \end{cases} \\
&= \frac{1}{2}\begin{cases} \dfrac{(u^2+s^2)^{1-m}}{1-m} + C, & m \neq 1, \\ \ln(u^2+s^2) + C, & m = 1. \end{cases}
\end{aligned}
$$

Das zweite Integral in (10.19) lässt sich per Induktion nach m berechnen. Dafür setzen wir

$$F_m(u) = \int \frac{du}{(u^2+s^2)^m}$$

und bemerken, dass

$$F_1(u) = \int \frac{du}{u^2+s^2} = \int \frac{du}{s^2\left((u/s)^2+1\right)} = \frac{s}{s^2}\int \frac{d(u/s)}{(u/s)^2+1} = \frac{1}{s}\arctan\frac{u}{s} + C,$$

d.h.

$$\boxed{\int \frac{du}{u^2+s^2} = \frac{1}{s}\arctan\frac{u}{s} + C}.$$

Partielle Integration von F_m ergibt

$$\begin{aligned}
F_m(u) &= \frac{u}{(u^2+s^2)^m} - \int u\, d\frac{1}{(u^2+s^2)^m} \\
&= \frac{u}{(u^2+s^2)^m} + 2m\int \frac{u^2 du}{(u^2+s^2)^{m+1}} \\
&= \frac{u}{(u^2+s^2)^m} + 2m\int \frac{u^2+s^2}{(u^2+s^2)^{m+1}}du - 2ms^2\int \frac{du}{(u^2+s^2)^{m+1}} \\
&= \frac{u}{(u^2+s^2)^m} + 2mF_m - 2ms^2F_{m+1}.
\end{aligned}$$

Daraus folgt die folgende Relation zwischen F_m und F_{m+1}

$$F_{m+1} = \frac{1}{2ms^2}\left(\frac{u}{(u^2+s^2)^m} + (2m-1)\,F_m\right),$$

so dass F_m sich per Induktion nach m bestimmen lässt.

Somit haben wir gesehen, dass jede rationale Funktion $f(x)$ in elementaren Funktionen integrierbar ist.

Beispiel. 1. Bestimmen wir

$$\int \frac{dx}{x^3-x}.$$

Der Nenner lässt sich wie folgt faktorisieren:

$$x^3 - x = x(x-1)(x+1).$$

Somit hat die Funktion $f(x) = \frac{1}{x^3-x}$ die folgende Partialbruchzerlegung:

$$\frac{1}{x^3-x} = \frac{1}{x(x-1)(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x+1}, \tag{10.20}$$

wobei die Koeffizienten a, b, c noch bestimmt werden sollen. Diese Identität gilt für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1, -1\}$. Um a zu bestimmen, multiplizieren wir (10.20) mit x:

$$\frac{1}{(x-1)(x+1)} = a + x\left(\frac{b}{x-1} + \frac{c}{x+1}\right) \tag{10.21}$$

und bemerken, dass diese Identität für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1, -1\}$ gilt, genau wie (10.20). Aber die beiden Seiten von (10.21) sind auch für $x = 0$ definiert. Nach der Stetigkeit der beiden Seiten von (10.21) gilt die Gleichheit (10.21) auch für $x = 0$. Setzen wir in (10.21) $x = 0$ ein und erhalten

$$a = \left.\frac{1}{(x-1)(x+1)}\right|_{x=0} = -1.$$

Analog ergibt Multiplizieren von (10.20) mit $x - 1$ die folgende Identität

$$\frac{1}{x(x+1)} = b + (x-1)\left(\frac{a}{x} + \frac{c}{x+1}\right),$$

und für $x = 1$ erhalten wir

$$b = \left.\frac{1}{x(x+1)}\right|_{x=1} = \frac{1}{2}.$$

Multiplizieren von (10.20) mit $x + 1$ ergibt

$$\frac{1}{x(x-1)} = c + (x+1)\left(\frac{a}{x} + \frac{b}{x-1}\right),$$

woraus für $x = -1$ folgt

$$c = \left.\frac{1}{x(x-1)}\right|_{x=-1} = \frac{1}{2}.$$

Somit erhalten wir

$$\frac{1}{x^3 - x} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\frac{1}{x-1} + \frac{1}{2}\frac{1}{x+1}$$

und

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^3 - x} &= -\ln|x| + \frac{1}{2}\ln|x-1| + \frac{1}{2}\ln|x+1| + C \\ &= \frac{1}{2}\ln\frac{|x^2-1|}{x^2} + C. \end{aligned}$$

2. Bestimmen wir das Integral

$$\int \frac{dx}{(x-1)^2(x^2+1)}.$$

Die Partialbruchzerlegung der Funktion $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2(x^2+1)}$ hat die Form

$$\frac{1}{(x-1)^2(x^2+1)} = \frac{a_1}{(x-1)} + \frac{a_2}{(x-1)^2} + \frac{bx+c}{x^2+1}, \tag{10.22}$$

wobei die Koeffizienten a_i, b, c noch bestimmt werden sollen. Multiplizieren diese Identität mit $(x-1)^2$ ergibt

$$\frac{1}{x^2+1} = a_2 + a_1(x-1) + (x-1)^2 g(x),$$

wobei $g(x) = \frac{bx+c}{x^2+1}$. Für $x = 1$ erhalten wir

$$a_2 = \left.\frac{1}{x^2+1}\right|_{x=1} = \frac{1}{2}.$$

Subtrahieren aus (10.22) das Glied $\frac{a_2}{(x-1)^2}$ ergibt

$$\frac{1}{(x-1)^2(x^2+1)} - \frac{a_2}{(x-1)^2} = \frac{a_1}{x-1} + g(x),$$

wobei

$$\begin{aligned}\frac{1}{(x-1)^2(x^2+1)} - \frac{a_2}{(x-1)^2} &= \left(\frac{1}{(x^2+1)} - \frac{1}{2}\right)\frac{1}{(x-1)^2} \\ &= \frac{1}{2}\frac{1-x^2}{(x^2+1)(x-1)^2} \\ &= -\frac{1}{2}\frac{x+1}{(x^2+1)(x-1)}\end{aligned}$$

so dass

$$\frac{a_1}{x-1} + g(x) = -\frac{1}{2}\frac{x+1}{(x^2+1)(x-1)}. \tag{10.23}$$

Um a_1 daraus zu bestimmen, multiplizieren wir diese Identität mit $x-1$ und erhalten

$$a_1 + (x-1)\,g(x) = -\frac{1}{2}\frac{x+1}{x^2+1}.$$

Einsetzen $x=1$ ergibt

$$a_1 = -\frac{1}{2}\frac{x+1}{x^2+1}\bigg|_{x=1} = -\frac{1}{2}.$$

Jetzt können wir $g(x)$ aus (10.23) bestimmen wie folgt:

$$\begin{aligned}g(x) &= -\frac{1}{2}\frac{x+1}{(x^2+1)(x-1)} - \frac{a_1}{(x-1)} \\ &= -\frac{1}{2}\frac{x+1}{(x^2+1)(x-1)} + \frac{1}{2}\frac{1}{x-1} \\ &= \frac{1}{2}\frac{-(x+1)+(x^2+1)}{(x^2+1)(x-1)} \\ &= \frac{1}{2}\frac{x(x-1)}{(x^2+1)(x-1)} \\ &= \frac{1}{2}\frac{x}{x^2+1},\end{aligned}$$

so dass $g(x)$ wirklich die Form $\frac{bx+c}{x^2+1}$ mit $b=\frac{1}{2}$ und $c=0$ hat. Somit erhalten wir die folgende Partialbruchzerlegung von f:

$$f(x) = -\frac{1}{2}\frac{1}{x-1} + \frac{1}{2}\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{2}\frac{x}{x^2+1}.$$

Jetzt können wir jedes Glied von $f(x)$ integrieren:

$$\int \frac{1}{x-1}dx = \int \frac{d(x-1)}{x-1} = \ln|x-1| + C,$$

$$\int \frac{dx}{(x-1)^2} = \int \frac{d(x-1)}{(x-1)^2} = -\frac{1}{x-1} + C,$$

$$\int \frac{x\,dx}{x^2+1} = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right) + C,$$

woraus folgt

$$\begin{aligned}\int f(x)\,dx &= -\frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{2}\frac{1}{x-1} + \frac{1}{4}\ln\left(x^2+1\right) + C \\ &= \frac{1}{4}\ln\frac{x^2+1}{(x-1)^2} - \frac{1}{2}\frac{1}{x-1} + C\end{aligned}$$

3. Bestimmen wir

$$\int \frac{dx}{(x^2+2x+5)^2}.$$

Das Polynom x^2+2x+5 hat keine reelle Nullstelle, und somit ist die Funktion $f(x) = \frac{1}{(x^2+2x+5)^2}$ schon ein Partialbruch zweiter Art. Wir haben mit quadratischer Ergänzung

$$x^2+2x+5 = (x+1)^2 + 4,$$

und mit Substitution $u = x+1$ erhalten wir

$$\int \frac{dx}{(x^2+2x+5)^2} = \int \frac{du}{(u^2+4)^2} =: F_2(u).$$

Zuerst berechnen wir

$$F_1(u) := \int \frac{du}{u^2+4} = \frac{1}{2}\int \frac{d(u/2)}{(u/2)^2+1} = \frac{1}{2}\arctan\frac{u}{2} + C.$$

Partielle Integration ergibt

$$\begin{aligned}F_1(u) &= \int \frac{du}{u^2+4} = \frac{u}{u^2+4} - \int u\,d\frac{1}{u^2+4} \\ &= \frac{u}{u^2+4} + \int u\frac{2u}{(u^2+4)^2}du \\ &= \frac{u}{u^2+4} + 2\int \frac{u^2+4-4}{(u^2+4)^2}du \\ &= \frac{u}{u^2+4} + 2\int \frac{du}{u^2+4} - 8\int \frac{du}{(u^2+4)^2} \\ &= \frac{u}{u^2+4} + 2F_1(u) - 8F_2(u).\end{aligned}$$

Daraus folgt, dass

$$8F_2(u) = \frac{u}{u^2+4} + F_1(u)$$

und somit

$$F_2(u) = \frac{u}{8(u^2+4)} + \frac{1}{16}\arctan\frac{u}{2} + C.$$

Einsetzen $u = x + 1$ ergibt die Antwort

$$\int \frac{dx}{(x^2 + 2x + 5)^2} = \frac{x + 1}{8(x^2 + 2x + 5)} + \frac{1}{16} \arctan \frac{x + 1}{2} + C.$$

In allen Fällen oberhalb gilt $\deg P < \deg Q$, so dass das Polynom R in der Zerlegung (10.18) verschwindet. Im Fall $\deg P \geq \deg Q$ bekommt man in der Zerlegung (10.18) ein nicht-triviales Polynom $R(x)$ indem man zunächst P durch Q mit Rest dividiert:

$$P = QR + \widetilde{P},$$

wobei $\deg \widetilde{P} < \deg Q$. Es folgt

$$f = \frac{P}{Q} = R + \frac{\widetilde{P}}{Q},$$

und weiter zerlegt man $\frac{\widetilde{P}}{Q}$ in Partialbrüche wie oberhalb.

Beispiel. Bestimmen wir das Integral

$$\int \frac{x^9 - 2}{x^4 - 1} dx.$$

Zunächst dividieren wir $x^9 - 2$ durch $x^4 - 1$ mit Rest:

$$\begin{aligned} x^9 - 2 &= x^5 \left(x^4 - 1\right) + x^5 - 2 \\ &= x^5 \left(x^4 - 1\right) + x \left(x^4 - 1\right) + x - 2 \\ &= \left(x^5 + x\right) \left(x^4 - 1\right) + x - 2 \end{aligned}$$

so dass

$$\frac{x^9 - 2}{x^4 - 1} = x^5 + x + \frac{x - 2}{x^4 - 1}.$$

Weiter zerlegen wir die Funktion $\frac{x-2}{x^4-1}$ in Partialbrüche. Der Nenner lässt sich wie folgt faktorisieren:

$$x^4 - 1 = \left(x^2 - 1\right) \left(x^2 + 1\right) = (x - 1)(x + 1)\left(x^2 + 1\right)$$

so dass

$$\frac{x - 2}{x^4 - 1} = \frac{x - 2}{(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)} = \frac{a_1}{x - 1} + \frac{a_2}{x + 1} + \frac{bx + c}{x^2 + 1}.$$

Multiplizieren mit $x - 1$ und Einsetzen $x = 1$ ergibt:

$$a_1 = \left.\frac{x - 2}{(x + 1)(x^2 + 1)}\right|_{x=1} = -\frac{1}{4}.$$

Multiplizieren mit $x + 1$ und Einsetzen $x = -1$ ergibt:

$$a_2 = \left.\frac{x - 2}{(x - 1)(x^2 + 1)}\right|_{x=-1} = \frac{3}{4}.$$

Es folgt

$$\begin{aligned}
\frac{bx+c}{x^2+1} &= \frac{x-2}{(x-1)(x+1)(x^2+1)} - \frac{a_1}{x-1} - \frac{a_2}{x+1} \\
&= \frac{x-2}{(x-1)(x+1)(x^2+1)} + \frac{1}{4}\frac{1}{x-1} - \frac{3}{4}\frac{1}{x+1} \\
&= -\frac{1}{2}\frac{x-2}{x^2+1}
\end{aligned}$$

so dass

$$\frac{x-2}{x^4-1} = -\frac{1}{4}\frac{1}{x-1} + \frac{3}{4}\frac{1}{x+1} - \frac{1}{2}\frac{x-2}{x^2+1}.$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^9-2}{x^4-1}dx &= \int \left(x^5+x\right)dx - \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x-1} + \frac{3}{4}\int \frac{dx}{x+1} - \frac{1}{2}\int \frac{x-2}{x^2+1}dx \\
&= \frac{x^6}{6} + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{4}\ln|x-1| + \frac{3}{4}\ln|x+1| - \frac{1}{4}\int \frac{d\left(x^2+1\right)}{x^2+1} + \int \frac{dx}{x^2+1} \\
&= \frac{x^6}{6} + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{4}\ln|x-1| + \frac{3}{4}\ln|x+1| - \frac{1}{4}\ln\left(x^2+1\right) + \arctan x + C \\
&= \frac{x^6}{6} + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{4}\ln\left|\frac{(x+1)^3}{(x-1)\left(x^2+1\right)}\right| + \arctan x + C.
\end{aligned}$$

Chapter 11

Integralrechnung: bestimmtes Integral

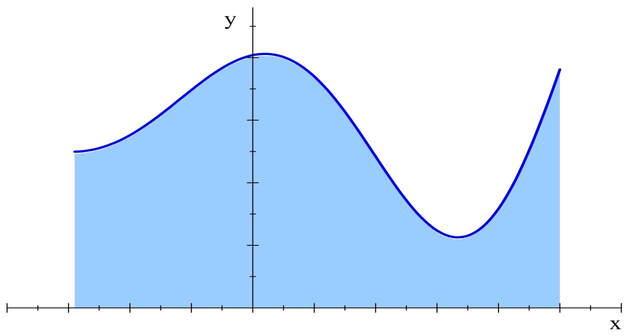
28.04.21 **Vorlesung 5**

11.1 Riemann-Integral

Sei $f(x)$ eine reellwertige Funktion auf einem Intervall $[a,b]$ wobei $a,b \in \mathbb{R}$ und $a < b$. Wir definieren hier den Begriff von *bestimmten Integral*

$$\int_a^b f(x)\,dx \tag{11.1}$$

("Integral von a bis b von f von x dx"). Die Zahlen a und b heißen die *Grenzen* des Integrals. Der Ausdruck (11.1) hat einen reellen Wert. Im Fall $f \geq 0$ lässt sich (11.1) als der Flächeninhalt unter dem Graph der Funktion f betrachten werden.



Der Untergraph einer Funktion f

Das Integral (11.1) heißt auch das *Riemann-Integral* oder *Riemannsches Integral*. Die Idee der folgenden Konstruktion stammt aus (10.3) – Wiederherstellung einer Funktion F durch Ihre Ableitung F'. Mit Hilfe davon werden wir auch die Existenz von Stammfunktion einer stetigen Funktion beweisen.

Definition. Eine *Zerlegung* von einem Intervall $[a, b]$ ist eine endliche streng monoton steigende Folge $\{x_k\}_{k=0}^n$, wobei $n \in \mathbb{N}$, $x_0 = a$ und $x_n = b$, d.h.

$$a = x_0 < x_1 < x_2 ... < x_{n-1} < x_n = b.$$

Wir bezeichnen eine Zerlegung mit Z, d.h. Z bezeichnet die ganze Folge $\{x_k\}_{k=0}^n$.

Gegeben sei eine Zerlegung $Z = \{x_k\}_{k=0}^n$ von $[a, b]$, betrachten wir noch eine Folge $\{\xi_k\}_{k=1}^n$ von Zahlen ξ_k mit $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$, d.h.

$$x_0 \le \xi_1 \le x_1, ..., \; x_{k-1} \le \xi_k \le x_k, ..., \; x_{n-1} \le \xi_n \le x_n.$$

Dann heißen ξ_k die *Zwischenstellen* von Z. Wir bezeichnen $\xi = \{\xi_k\}_{k=1}^n$.

Definition. Für jede Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ und für jede Zerlegung Z von $[a, b]$ mit den Zwischenstellen ξ definieren wir die *Riemann-Summe* mit

$$S(f, Z, \xi) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \, \Delta x_k,$$

wobei

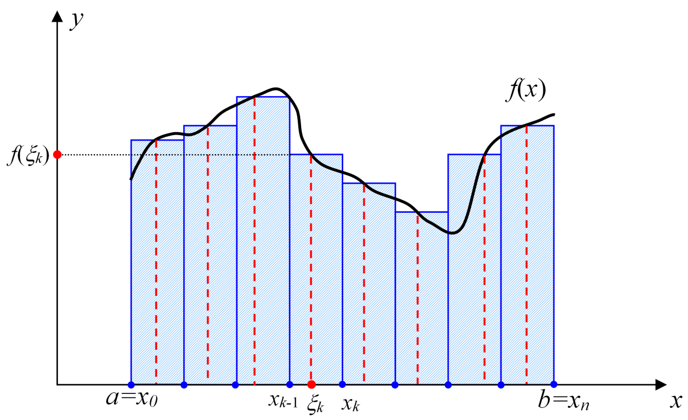
$$\Delta x_k := x_k - x_{k-1}$$

die Differenz der Folge $\{x_k\}$ ist.

Geometrische Bedeutung der Summe $S(f, Z, \xi)$ ist wie folgt. Ist f auf $[a, b]$ nichtnegativ, so heißt die folgende Menge

$$U = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \le x \le b, \; 0 \le y \le f(x)\right\}$$

der *Untergraph* von f. Die Riemann-Summe $S(f, Z, \zeta)$ ist gleich die Summe von Flächeninhalten von Rechtecken mit der Basis $[x_{k-1}, x_k]$ und der Höhe $f(\xi_k)$, was eine Annäherung von dem Flächeninhalt des Untergraphes von $f(x)$ ist.



Der Approximationsfehler dieser Annäherung wird fallen wenn die Feinheit der Zerlegung Z gegen 0 geht.

Definition. Für jede Zerlegung $Z = \{x_k\}_{k=0}^n$ definieren wir die *Feinheit* von Z mit

$$\varphi(Z) = \max_{1 \le k \le n} \{\Delta x_k\}.$$

Der Grenzwert von Riemann-Summen $S(f,Z,\xi)$ für $\varphi(Z)\to 0$ wird wie folgt definiert.

Definition. Wir schreiben

$$\lim_{\varphi(Z)\to 0} S(f,Z,\xi) = A$$

mit einem $A\in\mathbb{R}$, wenn es für jedes $\varepsilon>0$ ein $\delta>0$ gibt so dass für jede Zerlegung Z mit $\varphi(Z)<\delta$ und für jede Folge ξ von Zwischenstellen von Z gilt

$$|S(f,Z,\xi)-A|<\varepsilon. \tag{11.2}$$

Äquivalent: $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall Z$ mit $\varphi(Z)<\delta$ und $\forall\xi$ gilt (11.2).

Definition. Eine reellwertige Funktion f auf $[a,b]$ heißt *Riemann-integrierbar* wenn der Grenzwert

$$\lim_{\varphi(Z)\to 0} S(f,Z,\xi)$$

existiert. Der Wert des Grenzwertes heißt das Riemann-Integral (=bestimmtes Integral) von f und wird wie folgt bezeichnet:

$$\int_a^b f(x)\,dx,$$

d.h.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varphi(Z)\to 0} S(f,Z,\xi) = \lim_{\varphi(Z)\to 0}\sum_{k=1}^n f(\xi_k)\,\Delta x_k, \tag{11.3}$$

vorausgesetzt, dass der Grenzwert existiert.

Die Notation $\int_a^b f(x)\,dx$ wurde von Leibniz vorgeschlagen und bezieht sich auf die Summe $\sum_{k=1}^n f(\xi_k)\,\Delta x_k$. Die Zahlen a und b heißen *untere* bzw *obere Grenzen* des Integrals $\int_a^b f(x)\,dx$.

Sei f Riemann-integrierbar und $f\geq 0$ auf $[a,b]$. Dann definieren wir den *Flächeninhalt* des Untergraphes von f als der Wert von $\int_a^b f(x)\,dx$.

Die folgenden Fragen werden in diesem Kapitel behandelt werden:

1. Wie bestimmt man den Wert von Riemann-Integral? Insbesondere welche Beziehung gibt es zum unbestimmten Integral $\int f(x)\,dx$?

2. Wie lässt sich das Riemann-Integral verwenden?

Wir fangen mit zwei Beispielen an.

Beispiel. 1. Sei $f(x)\equiv c$ eine Konstantefunktion. Dann ist f Riemann-integrierbar da für jede Zerlegung Z mit Zwischenstellen ξ gilt

$$S(f,Z,\xi) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)\,\Delta x_k = c\sum_{k=1}^n \Delta x_k = c\,(b-a)$$

und somit der Grenzwert in (11.3) existiert und ist gleich $c\,(b-a)$, d.h.

$$\int_a^b c\,dx = c\,(b-a)\,. \tag{11.4}$$

Da der Untergraph von f der Rechteck $[a,b] \times [0,c]$ ist, so beschließen wir, dass der Flächeninhalt dieses Rechteckes gleich $c\,(b-a)$ ist, wie erwartet.

2. Sei f die Dirichlet-Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases} \tag{11.5}$$

Zeigen wir, dass f auf jedem Intervall $[a,b]$ nicht Riemann-integrierbar ist. Gegeben sei eine Zerlegung $Z = \{x_k\}_{k=0}^{n}$, wählen wir alle Zwischenstellen ξ_k irrational. Dann gilt $f(\xi_k) = 0$ und somit

$$S(f, Z, \xi) = 0.$$

Andererseits, für dieselbe Zerlegung wählen wir jetzt die anderen Zwischenstellen ξ_k so dass alle ξ_k rational sind. Dann gilt $f(\xi_k) = 1$ und somit

$$S(f, Z, \xi) = b - a.$$

Wir sehen, dass $\lim_{\varphi(Z)\to 0} S(f, Z, \xi)$ nicht existiert.

11.2 Darboux-Integrierbarkeit

Um die Integrierbarkeit von Funktionen untersuchen zu können, brauchen wir den folgenden Begriff.

Definition. Für eine Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ und eine Zerlegung Z von $[a,b]$, definieren wir die *obere Darboux-Summe* von f und Z mit

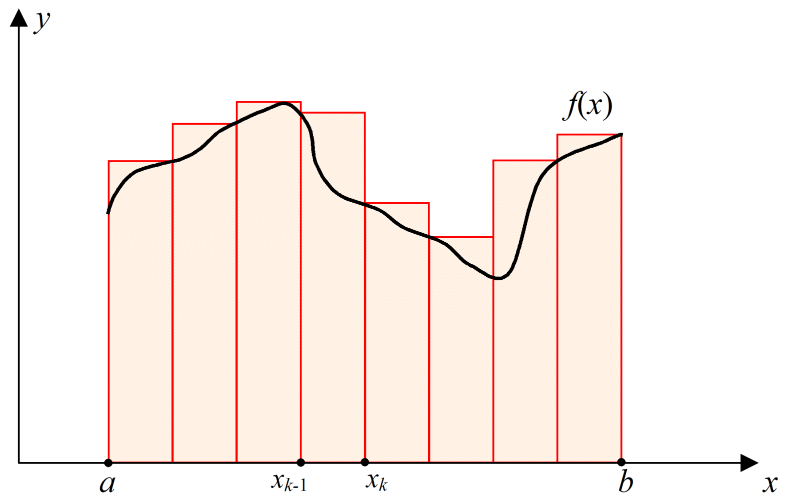
$$S^*(f, Z) = \sum_{k=1}^{n} \Big(\sup_{[x_{k-1}, x_k]} f \Big) \Delta x_k$$

und die *untere Darboux-Summe* mit

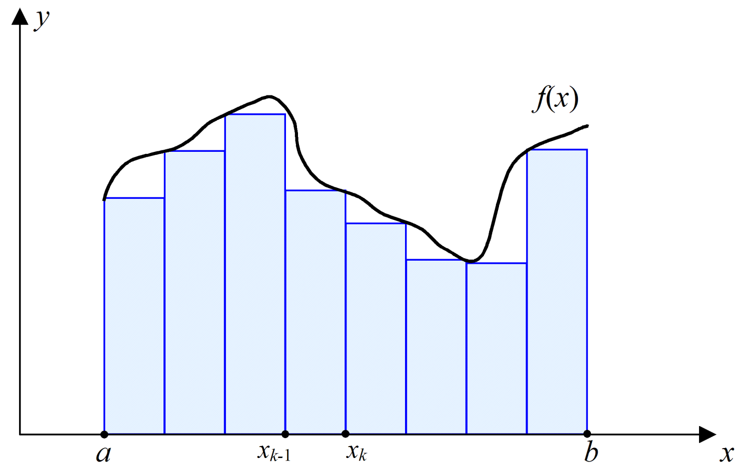
$$S_*(f, Z) = \sum_{k=1}^{n} \Big(\inf_{[x_{k-1}, x_k]} f \Big) \Delta x_k.$$

Bemerken wir, dass $S^*(f, Z)$ Element von $(-\infty, +\infty]$ ist und $S_*(f, Z)$ Element von $[-\infty, +\infty)$ ist.

Die Darboux-Summen brauchen keine Zwischenstellen. Im Fall $f \geq 0$, die obere Summe $S^*(f, Z)$ ist die Summe von den Flächeninhalten von Rechtecken, die den Untergraph von f überdecken:



Analog ist die untere Summe $S_*(f,Z)$ gleich die Summe von den Flächeninhalten von Rechtecken, die im Untergraph enthalten werden:



Da für jede Zwischenstelle $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ gilt

$$\inf_{[x_{k-1},x_k]} f \leq f(\xi_k) \leq \sup_{[x_{k-1},x_k]} f,$$

so erhalten wir, dass für jede Wahl von Zwischenstellen ξ von Z gilt

$$S_*(f,Z) \leq S(f,Z,\xi) \leq S^*(f,Z). \tag{11.6}$$

Definition. Eine reellwertige Funktion f auf $[a,b]$ heißt *Darboux-integrierbar* wenn

$$\lim_{\varphi(Z)\to 0} \left(S^*(f,Z) - S_*(f,Z)\right) = 0, \tag{11.7}$$

d.h.

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \ \forall Z \ \text{ mit } \ \varphi(Z) < \delta \text{ gilt } |S^*(f,Z) - S_*(f,Z)| < \varepsilon.$$

Beispiel. Für die Dirichlet-Funktion (11.5) gilt auf jedem Intervall $[x_{k-1}, x_k]$

$$\sup_{[x_{k-1},x_k]} f = 1 \quad \text{und} \quad \inf_{[x_{k-1},x_k]} f = 0$$

woraus folgt

$$S^*(f, Z) = b - a \quad \text{und} \quad S_*(f, Z) = 0.$$

Die Bedingung (11.7) ist somit nicht erfüllt und f ist nicht Darboux-integrierbar.

Satz 11.1 *Sei f eine reellwertige Funktion auf $[a, b]$. Die folgenden drei Eigenschaften sind äquivalent:*

(a) *Funktion f ist Riemann-integrierbar.*

(b) *Funktion f ist Darboux-integrierbar.*

(c) *Die Grenzwerte $\lim_{\varphi(Z)\to 0} S_*(f, Z)$ und $\lim_{\varphi(Z)\to 0} S^*(f, Z)$ existieren (in $\mathbb{R}$) und sind gleich.*

Darüber hinaus gelten unter jeder von den Bedingungen $(a), (b), (c)$ die folgenden Identitäten:

$$\lim_{\varphi(Z)\to 0} S^*(f, Z) = \lim_{\varphi(Z)\to 0} S_*(f, Z) = \int_a^b f(x)\, dx = \sup_Z S_*(f, Z) = \inf_Z S^*(f, Z). \quad (11.8)$$

Definition. Eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt *integrierbar* auf $[a, b]$ wenn f eine ($\Leftrightarrow$jede) von den Bedingungen $(a), (b), (c)$ erfüllt.

Beweis. $(a) \Rightarrow (c)$ Setzen wir

$$A = \int_a^b f(x)\, dx = \lim_{\varphi(Z)\to 0} S(f, Z, \xi)$$

ein. Nach Definition des Limes gilt: $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall Z = \{x_k\}_{k=0}^n$ mit $\varphi(Z) < \delta$ und $\forall \xi = \{\xi_k\}_{k=1}^n$ gilt

$$A - \varepsilon < S(f, Z, \xi) < A + \varepsilon. \quad (11.9)$$

Betrachten wir für jedes $k = 1, ..., n$ die Menge

$$M_k = f([x_{k-1}, x_k])\, \Delta x_k = \{f(\xi_k)\, \Delta x_k : \xi_k \in [x_{k-1}, x_k]\} \subset \mathbb{R}$$

so dass

$$\Big(\sup_{[x_{k-1},x_k]} f\Big)\, \Delta x_k = \sup M_k.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} S^*(f,Z) &= \sum_{k=1}^{n}(\sup_{[x_{k-1},x_k]} f)\Delta x_k \\ &= \sum_{k=1}^{n} \sup M_k = \sup \sum_{k=1}^{n} M_k \\ &= \sup_{\xi} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k \\ &= \sup_{\xi} S(f,Z,\xi). \end{aligned} \tag{11.10}$$

Hier haben wir die folgende Definition der Summe von nichtleeren Teilmengen M_k von $\mathbb{R}$ benutzt:

$$\sum_{k=1}^{n} M_k = \left\{ \sum_{k=1}^{n} t_k : t_k \in M_k \right\} \subset \mathbb{R}.$$

Offensichtlich gilt die Identität (11.10) für beliebige M_k.

Analog beweist man, dass

$$S_*(f,Z) = \inf_{\xi} S(f,Z,\xi).$$

Es folgt aus (11.9), dass

$$A-\varepsilon \le S_*(f,Z) \le S^*(f,Z) \le A+\varepsilon.$$

und somit

$$\lim_{\varphi(Z)\to 0} S^*(f,Z) = \lim_{\varphi(Z)\to 0} S_*(f,Z) = A. \tag{11.11}$$

Somit haben wir sowohl die Aussage (c) als auch die beiden linken Identitäten in (11.8) bewiesen.

$(c) \Rightarrow (b)$ Trivial: gilt

$$\lim_{\varphi(Z)\to 0} S_*(f,Z) = \lim_{\varphi(Z)\to 0} S^*(f,Z),$$

so gilt auch

$$\lim_{\varphi(Z)\to 0} \left(S^*(f,Z) - S_*(f,Z)\right) = 0.$$

$(b) \Rightarrow (a)$ Für zwei Zerlegungen Z und Z' von $[a,b]$ schreiben wir $Z' \subset Z$ wenn Z' als Menge eine Teilmenge von Z ist. Man sagt, dass Z eine *Verfeinerung* von Z' ist.

Behauptung 1. *Für $Z' \subset Z$ gelten die Ungleichungen*

$$S^*(f,Z) \le S^*(f,Z')$$

und

$$S_*(f,Z) \ge S_*(f,Z').$$

D.h. die obere Summe fällt nach Verfeinerung und die untere Summe steigt.

Seien $Z = \{x_i\}_{i=0}^n$ und $Z' = \{y_k\}_{k=0}^N$. Da $Z' \subset Z$, jedes Intervall $[y_{k-1}, y_k]$ von Z' stimmt mit einem Intervall $[x_l, x_m]$ überein so dass

$$y_{k-1} = x_l < ... < x_{i-1} < x_i < ... < x_m = y_k.$$

Daraus folgt, dass

$$\begin{aligned} \left(\sup_{[y_{k-1},y_k]} f\right)(y_k - y_{k-1}) &= \sum_{i=l+1}^{m} \left(\sup_{[y_{k-1},y_k]} f\right)(x_i - x_{i-1}) \\ &\geq \sum_{i=l+1}^{m} \left(\sup_{[x_{i-1},x_i]} f\right)(x_i - x_{i-1}). \end{aligned}$$

Addieren diese Ungleichungen für alle k ergibt

$$S^*(f, Z') \geq S^*(f, Z).$$

Die Ungleichung für S_* wird analog bewiesen.

Behauptung 2. *Für zwei beliebige Zerlegungen Z' und Z'' von $[a, b]$ gilt*

$$S_*(f, Z') \leq S^*(f, Z''). \tag{11.12}$$

Die Vereinigung $Z = Z' \cup Z''$ ist auch eine Zerlegung von $[a, b]$. Da $Z' \subset Z$ und $Z'' \subset Z$, so erhalten wir nach Behauptung 1 und (11.6), dass

$$S_*(f, Z') \leq S_*(f, Z) \leq S^*(f, Z) \leq S^*(f, Z''),$$

woraus (11.12) folgt.

Jetzt beweisen wir, dass eine Darboux-integrierbare Funktion f auch Riemann-integrierbar ist. Setzen wir

$$A = \sup_Z S_*(f, Z) \quad \text{und} \quad B = \inf_Z S^*(f, Z) \tag{11.13}$$

ein. Es folgt aus der Behauptung 2, dass

$$A \leq B. \tag{11.14}$$

Nach (11.13) und (11.14) gilt

$$S_*(f, Z) \leq A \leq B \leq S^*(f, Z). \tag{11.15}$$

Beweisen wir, dass

$$\lim_{\varphi(Z)\to 0} S(f, Z, \xi) = A = B, \tag{11.16}$$

was sowohl die Riemann-Integrierbarkeit von f als auch die beiden rechten Identitäten in (11.8) ergeben wird. Nach (11.6) gilt

$$S_*(f, Z) \leq S(f, Z, \xi) \leq S^*(f, Z).$$

Vergleich mit (11.15) zeigt, dass die Werte A, B und $S(f,Z,\xi)$ im Intervall $[S_*(f,Z), S^*(f,Z)]$ liegen, woraus folgt

$$\begin{aligned} |S(f,Z,\xi) - A| &\le S^*(f,Z) - S_*(f,Z), \\ |S(f,Z,\xi) - B| &\le S^*(f,Z) - S_*(f,Z). \end{aligned}$$

Nach der Darboux-Integrierbarkeit gilt

$$S^*(f,Z) - S_*(f,Z) \to 0 \quad \text{für } \varphi(Z) \to 0,$$

woraus (11.16) folgt, was zu beweisen war. ■

30.04.2021 **Vorlesung 6**

Korollar 11.2 (Notwendige Bedingung für Integrierbarkeit) *Ist eine Funktion f auf $[a,b]$ integrierbar, so ist f auf $[a,b]$ beschränkt.*

Beweis. Nehmen wir das Gegenteil an, dass $\sup_{[a,b]} f = +\infty$. Für jede Zerlegung $Z = \{x_k\}_{k=0}^n$ gibt es ein Intervall $[x_{k-1}, x_k]$ wo $\sup_{[x_{k-1},x_k]} f = +\infty$, woraus folgt

$$S^*(f,Z) = +\infty.$$

Da immer $S_*(f,Z) < +\infty$, so erhalten wir

$$S^*(f,Z) - S_*(f,Z) = +\infty,$$

und f ist nicht Darboux-integrierbar. Somit muss es gelten $\sup_{[a,b]} f < +\infty$, und analog $\inf_{[a,b]} f > -\infty$, was zu beweisen war. ■

11.3 Integrierbarkeit von stetigen und monotonen Funktionen

Der folgende Satz gibt uns viele Beispiele von integrierbaren Funktionen.

Satz 11.3 (Hinreichende Bedingungen für Integrierbarkeit)
(a) *Jede stetige Funktion f auf $[a,b]$ ist auf diesem Intervall integrierbar.*
(b) *Jede monotone Funktion f auf $[a,b]$ ist auf diesem Intervall integrierbar.*

Für dem Beweis von (a) brauchen wir den Begriff von *gleichmäßiger Stetigkeit.*

Definition. Eine Funktion f auf einem Intervall J heißt *gleichmäßig* stetig auf J wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; \forall x, y \in J \quad \text{mit } |x-y| < \delta \text{ gilt } |f(x) - f(y)| < \varepsilon. \tag{11.17}$$

Erinnern wir uns an Definition von Stetigkeit von f an einer Stelle $x \in J$:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \quad \forall y \in J \text{ mit } |x-y| < \delta \text{ gilt } |f(x) - f(y)| < \varepsilon. \tag{11.18}$$

In (11.18) hängt δ von x ab, wobei in (11.17) δ gleich für alle x ist, was das Wort "gleichmäßig" erklärt. Offensichtlich ist jede gleichmäßig stetige Funktion auch stetig an allen Stellen $x \in J$, aber die Umkehrung gilt es nicht immer: eine Funktion kann stetig an allen Stellen $x \in J$ sein, aber nicht gleichmäßig stetig auf J.

Beispiel. Die Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ ist stetig auf $J = (0, 1]$ aber wir zeigen, dass f nicht gleichmäßig stetig auf J ist, d.h. (11.17) gilt für diese Funktion nicht. Die Negation von (11.17) ist die folgende Aussage:

$$\exists \varepsilon > 0 \ \ \forall \delta > 0 \ \ \exists x, y \in J \ \text{ mit } \ |x - y| < \delta \ \text{ und } \ |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon. \tag{11.19}$$

Um (11.19) für $f(x) = \frac{1}{x}$ zu beweisen, setzen wir $\varepsilon = 1$ und, für jedes $\delta > 0$, wählen wir $x \in (0, \delta)$ und $y = x/2$ so dass $|x - y| < \delta$, während

$$|f(x) - f(y)| = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| = \left|\frac{1}{x} - \frac{2}{x}\right| = \frac{1}{x} > 1 = \varepsilon.$$

Somit ist (11.19) erfüllt.

Lemma 11.4 *Ist $f(x)$ stetig auf einem beschränkten abgeschlossen Intervall J, so ist f auf J gleichmäßig stetig.*

Beweis. Nehmen wir das Gegenteil an, dass f auf J nicht gleichmäßig stetig ist, d.h. (11.19) mit ein $\varepsilon > 0$ erfüllt ist. Wählen wir $\delta = \frac{1}{n}$ für ein $n \in \mathbb{N}$ und somit bekommen $x_n, y_n \in J$ mit

$$|x_n - y_n| < \frac{1}{n} \tag{11.20}$$

und

$$|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon. \tag{11.21}$$

Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß (Satz 4.10) hat die Folge $\{x_n\}$ eine konvergente Teilfolge $\{x_{n_k}\}$. Nach (11.20) erhalten wir, dass auch $\{y_{n_k}\}$ konvergiert und

$$\lim_{k \to \infty} x_{n_k} = \lim_{k \to \infty} y_{n_k} =: c \in J.$$

Nach der Stetigkeit von f erhalten wir

$$\lim_{k \to \infty} f(x_{n_k}) = f(c) = \lim_{k \to \infty} f(y_{n_k}),$$

was im Widerspruch zu (11.21) steht. ∎

Beweis von Satz 11.3(a)**.** Nach dem Lemma 11.4 ist die Funktion f gleichmäßig stetig auf $[a, b]$, d.h. die Bedingung (11.17) ist erfüllt:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0 \ \ \forall x, y \in J \ \ \text{ mit } \ |x - y| < \delta \ \text{ gilt } \ |f(x) - f(y)| < \varepsilon. \tag{11.22}$$

Fixieren wir ein $\varepsilon > 0$ und, für δ aus (11.22), betrachten eine beliebige Zerlegung $Z = \{x_k\}_{k=0}^n$ von $[a, b]$ mit $\varphi(Z) < \delta$. Für alle $x, y \in [x_{k-1}, x_k]$ gilt $|x - y| < \delta$ und somit nach (11.22) auch

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Daraus folgt, dass

$$\sup_{[x_{k-1},x_k]} f - \inf_{[x_{k-1},x_k]} f \leq \varepsilon$$

und somit

$$\begin{aligned} S^*(f,Z) - S_*(f,Z) &= \sum_{k=1}^{n} \Big(\sup_{[x_{k-1},x_k]} f - \inf_{[x_{k-1},x_k]} f \Big)(x_k - x_{k-1}) \\ &\leq \varepsilon \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) \\ &= \varepsilon (b-a). \end{aligned}$$

Da $\varepsilon(b-a)$ beliebig klein sein kann, so erhalten wir

$$\lim_{\varphi(Z)\to 0} (S^*(f,Z) - S_*(f,Z)) = 0.$$

Nach Definition ist f Darboux-integrierbar und nach dem Satz 11.1 ist f auch Riemann-integrierbar. ∎

Beweis von Satz 11.3(b)**.** Sei f monoton steigend. Für jede Zerlegung $Z = \{x_k\}_{k=0}^{n}$ von $[a,b]$ gilt

$$\sup_{[x_{k-1},x_k]} f = f(x_k) \quad \text{und} \quad \inf_{[x_{k-1},x_k]} f = f(x_{k-1})$$

woraus folgt

$$\begin{aligned} S^*(f,Z) - S_*(f,Z) &= \sum_{k=1}^{n} \left(\sup_{[x_{k-1},x_k]} f - \inf_{[x_{k-1},x_k]} f \right) \Delta x_k \\ &= \sum_{k=1}^{n} (f(x_k) - f(x_{k-1})) \Delta x_k \\ &\leq \varphi(Z) \sum_{k=1}^{n} (f(x_k) - f(x_{k-1})) \\ &= \varphi(Z)(f(b) - f(a)). \end{aligned}$$

Somit erhalten wir

$$\lim_{\varphi(Z)\to 0} (S^*(f,Z) - S_*(f,Z)) = 0,$$

woraus die Integrierbarkeit von f folgt. ∎

11.4 Fundamentalsatz der Analysis, 1

Der nächste Satz etabliert eine Beziehung zwischen bestimmten und unbestimmten Integralen.

Hauptsatz 11.5 (Fundamentalsatz der Analysis: Newton-Leibniz-Formel) *Sei $f(x)$ eine integrierbare Funktion auf einem beschränkten abgeschlossenen Intervall $[a,b]$ mit $a < b$. Hat f auf $[a,b]$ eine Stammfunktion F, so gilt die Identität*

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)}. \tag{11.23}$$

Führen wir die folgende Notation ein:

$$[F]_a^b := F(b) - F(a).$$

Da $F = \int f(x)\,dx$, so lässt sich die *Newton-Leibniz-Formel* (11.23) wie folgt umschreiben:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left[\int f(x)\,dx\right]_a^b.$$

In dieser Form liefert die Newton-Leibniz-Formel eine direkte Beziehung zwischen bestimmten und unbestimmten Integralen.

Man kann (11.23) auch wie folgt umformulieren: ist F eine differenzierbare Funktion auf $[a,b]$, so gilt

$$\int_a^b F'(x)\,dx = F(b) - F(a) = [F]_a^b,$$

vorausgesetzt, dass F' integrierbar ist. Insbesondere gilt diese Identität für jede stetig differenzierbare Funktion F auf $[a,b]$, da F' stetig und somit nach dem Satz 11.3 integrierbar ist.

Beweis. Nach Definition von Riemann-Integral gilt

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varphi(Z)\to 0} S(f,Z,\xi).$$

Fixieren wir eine Zerlegung $Z = \{x_k\}_{k=0}^n$ von $[a,b]$ und wählen die Zwischenstellen $\xi = \{\xi_k\}_{k=1}^n$ wie folgt. Nach dem Mittelwertsatz (Satz 8.10), es gibt ein $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ mit

$$F(x_k) - F(x_{k-1}) = F'(\xi_k)(x_k - x_{k-1}).$$

Für dieses ξ_k erhalten wir

$$\begin{aligned} S(f,Z,\xi) &= \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \\ &= \sum_{k=1}^n F'(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \\ &= \sum_{k=1}^n (F(x_k) - F(x_{k-1})) \\ &= F(b) - F(a). \end{aligned}$$

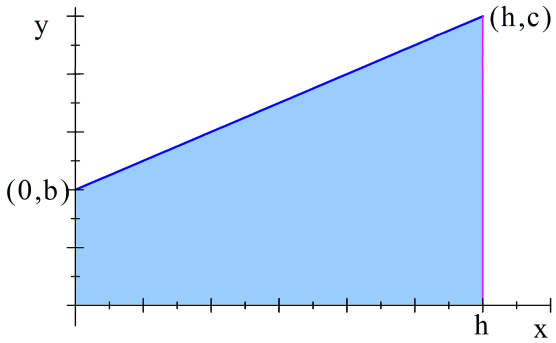
Somit muss der Grenzwert $\lim_{\varphi(Z)\to 0} S(f,Z,\xi)$ gleich $F(b) - F(a)$ sein, woraus (11.23) folgt. ■

Mit Hilfe von der Newton-Leibniz-Formel kann man die Integrale $\int_a^b f(x)\,dx$ effektiv berechnen. Ist $f \geq 0$, so bestimmt man auf diese Weise den Flächeninhalt des Untergraphes von f.

Beispiel. 1. Betrachten wir die Funktion $f(x) = ax + b$ auf einem Intervall $[0,h]$ mit $h > 0$. Es gilt

$$\int_0^h (ax+b)\,dx = \left[\int (ax+b)\,dx\right]_0^h = \left[a\frac{x^2}{2} + bx\right]_0^h = a\frac{h^2}{2} + bh = \frac{ah+2b}{2}h = \frac{b+c}{2}h,$$

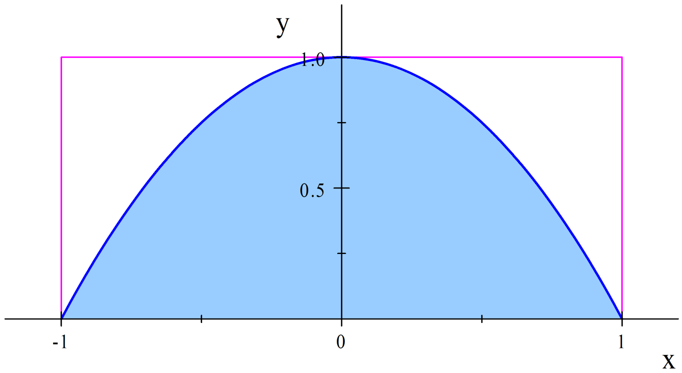
wobei $c = ah + b = f(h)$. Der Graph der Funktion $f(x) = ax + b$ ist eine Gerade zwischen den Punkten $(0, b)$ und (h, c). Im Fall $f \geq 0$ ist der Untergraph von f ein Trapez mit der Höhe h und den Grundseiten b and c. Somit erhalten wir: der Flächeninhalt von dem Trapez ist gleich $\frac{b+c}{2}h$.



2. Für die Funktion $f(x) = 1 - x^2$ erhalten wir

$$\int_{-1}^{1} \left(1 - x^2\right) dx = \left[\int \left(1 - x^2\right) dx\right]_{-1}^{1} = \left[x - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{4}{3}.$$

Geometrisch bedeutet dies, dass der Flächeninhalt zwischen der Parabel $y = 1 - x^2$ und der Achse x gleich $4/3$ ist.

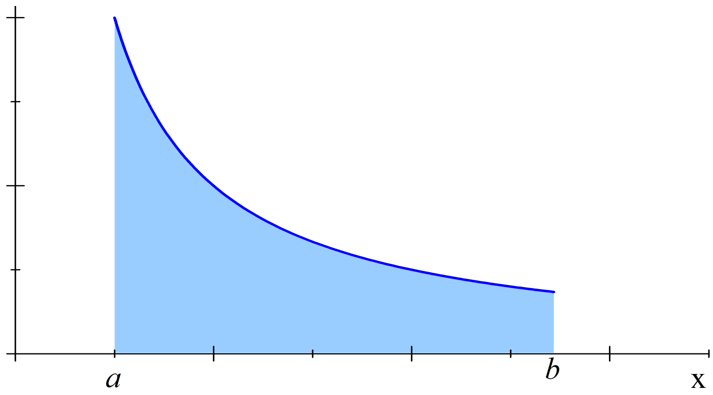


Insbesondere beträgt dieser Flächeninhalt genau $2/3$ von den Flächeninhalt von dem umgeschriebenen Rechteck $[-1, 1] \times [0, 1]$. Diese Regel von $\frac{2}{3}$ wurde erst von Archimedes entdeckt. Er konnte den Flächeninhalt unter der Parabel direkt als der Grenzwert von Riemann-Summen berechnen, ohne Newton-Leibniz-Formel zu wissen.

3. Sei $f(x) = \frac{1}{x}$. Für alle $0 < a < b$ erhalten wir

$$\int_a^b \frac{dx}{x} = \left[\int \frac{dx}{x}\right]_a^b = [\ln x]_a^b = \ln \frac{b}{a}. \tag{11.24}$$

Der Graph der Funktion $y = \frac{1}{x}$ ist eine Hyperbel, und der Flächeninhalt unter der Hyperbel auf $[a, b]$ ist gleich $\ln \frac{b}{a}$.



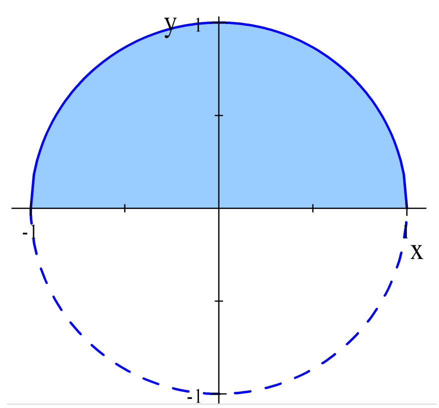
Insbesondere gilt

$$\int_1^e \frac{dx}{x} = \ln e = 1.$$

4. Der Graph der Funktion $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ auf dem Intervall $[-1,1]$ ist ein Halbkreis. Der Flächeninhalt des Untergraphes des Halbkreises ist nach (10.15) gleich

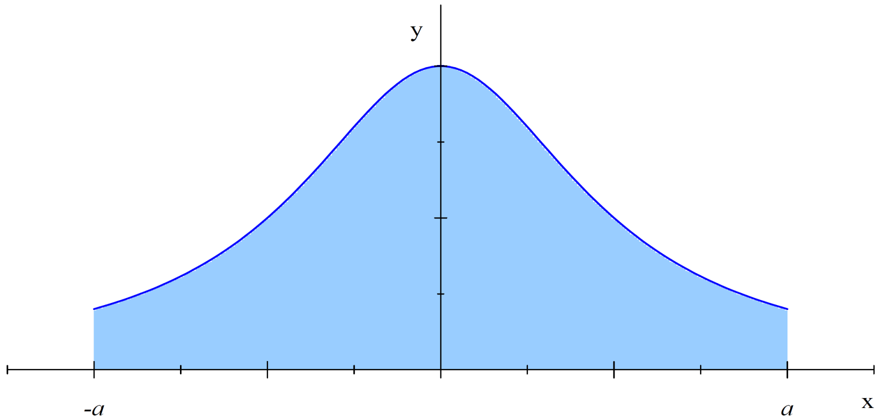
$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx &= \left[\int \sqrt{1-x^2}\,dx\right]_{-1}^{1} \\
&= \left[\frac{1}{2}\arcsin x + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}\right]_{-1}^{1} \\
&= \frac{1}{2}\left(\arcsin 1 - \arcsin(-1)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\pi/2 + \pi/2\right) \\
&= \pi/2,
\end{aligned}$$

wobei wir (10.15) benutzt haben.



5. Für die Funktion $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ und $a > 0$ haben wir

$$\int_{-a}^{a} \frac{dx}{1+x^2} = \left[\int \frac{dx}{1+x^2}\right]_{-a}^{a} = [\arctan x]_{-a}^{a} = 2\arctan a.$$



Insbesondere, der Flächeninhalt des Untergraphes von $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ auf $[-1, 1]$ ist gleich

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{1+x^2} = 2 \arctan 1 = \frac{\pi}{2}.$$

05.05.2021 **Vorlesung 7**

11.5 Linearität und partielle Integration

Satz 11.6 (Linearität vom bestimmten Integral) *Sind die Funktionen f und g integrierbar auf einem Intervall $[a, b]$, so ist auch $f + g$ integrierbar und*

$$\int_a^b (f+g)\, dx = \int_a^b f dx + \int_a^b g dx. \tag{11.25}$$

Auch für jedes $c \in \mathbb{R}$ ist cf integrierbar und

$$\int_a^b (cf)\, dx = c \int_a^b f dx. \tag{11.26}$$

Beweis. Seien $Z = \{x_k\}_{k=0}^n$ eine Zerlegung von $[a, b]$ und $\xi = \{\xi_k\}_{k=1}^n$ eine Folge von Zwischenstellen von Z. Dann

$$\begin{aligned} S(f+g, Z, \xi) &= \sum_{k=0}^{n} (f+g)(\xi_k)\, \Delta x_k \\ &= \sum_{k=0}^{n} f(\xi_k)\, \Delta x_k + \sum_{k=0}^{n} g(\xi_k)\, \Delta x_k \\ &= S(f, Z, \xi) + S(g, Z, \xi). \end{aligned}$$

Für $\varphi(Z) \to 0$ konvergiert die rechte Seite gegen

$$\int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx \ .$$

Somit ist $f+g$ Riemann-integrierbar und (11.25) gilt. Analog beweist man die Integrierbarkeit von cf und (11.26). ∎

Satz 11.7 (Partielle Integration im bestimmten Integral) *Für stetig differenzierbare Funktionen u, v auf einem Intervall $[a,b]$ gilt*

$$\int_a^b u\,dv = [uv]_a^b - \int_a^b v\,du. \tag{11.27}$$

Beweis. Da die Funktionen uv' und vu' stetig sind, so existieren die beiden Integrale

$$\int_a^b u\,dv = \int_a^b uv'dx \quad \text{und} \quad \int_a^b v\,du = \int_a^b vu'dx$$

(Satz 11.3). Nach der Produktregel gilt

$$(uv)' = uv' + vu'.$$

Nach der Linearität erhalten wir

$$\int_a^b (uv)'\,dx = \int_a^b uv'dx + \int_a^b vu'dx = \int_a^b u\,dv + \int_a^b v\,du.$$

Andererseits, nach dem Satz 11.5 gilt

$$\int_a^b (uv)'\,dx = [uv]_a^b\,,$$

woraus folgt

$$\int_a^b u\,dv + \int_a^b v\,du = [uv]_a^b\,,$$

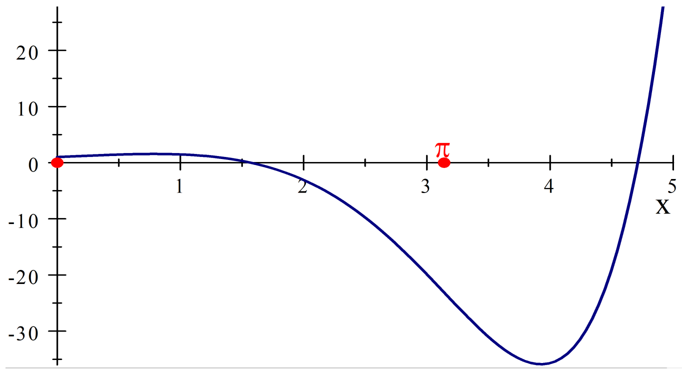
was äquivalent zu (11.27) ist. ∎

Beispiel. Bestimmen wir $\int_0^\pi e^x \cos x\,dx$. Da $e^x dx = de^x$, so erhalten wir nach (11.27) mit $u = \cos x$ und $v = e^x$:

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi e^x \cos x\,dx &= [e^x \cos x]_0^\pi - \int_0^\pi e^x d\cos x \\
&= -e^\pi - 1 + \int_0^\pi e^x \sin x\,dx \\
&= -(e^\pi + 1) + \int_0^\pi \sin x\,de^x \\
&= -(e^\pi + 1) + [e^x \sin x]_0^\pi - \int_0^\pi e^x \cos x\,dx,
\end{aligned}$$

woraus folgt

$$\int_0^\pi e^x \cos x \, dx = -\frac{e^\pi + 1}{2}.$$



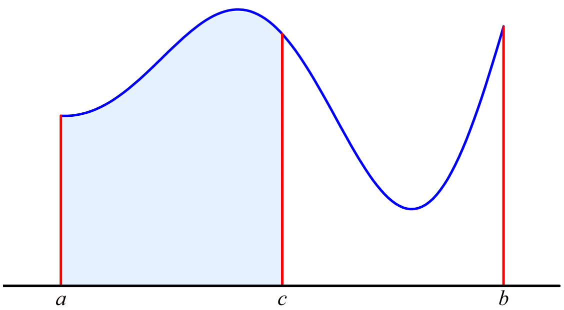
Funktion $e^x \cos x$

11.6 Additivität

Satz 11.8 (Additivität) *Sei f eine integrierbare Funktion auf einem Intervall $[a,b]$ mit $a < b$. Dann ist f für jedes $c \in (a,b)$ auf den Intervallen $[a,c]$ und $[c,b]$ integrierbar und es gilt*

$$\int_a^b f dx = \int_a^c f dx + \int_c^b f dx. \tag{11.28}$$

Im Fall $f \geq 0$ bedeutet (11.28) die Additivität von dem Flächeninhalt des Untergraphes von f bezüglich waagerechter Teilung.



Beweis. Seien X und Y beliebige Zerlegungen von $[a,c]$ bzw $[c,b]$. Dann ist $Z = X \cup Y$ eine Zerlegung von $[a,b]$ und es gilt

$$\varphi(Z) = \max(\varphi(X), \varphi(Y)),$$

so dass

$$\varphi(X) \to 0 \text{ und } \varphi(Y) \to 0 \Rightarrow \varphi(Z) \to 0.$$

Offensichtlich gelten auch die Identitäten

$$S^*(f,Z) = S^*(f,X) + S^*(f,Y) \tag{11.29}$$

und

$$S_*(f,Z) = S_*(f,X) + S_*(f,Y).$$

Da f auf $[a,b]$ integrierbar ist, so haben wir

$$\lim_{\varphi(Z)\to 0} (S^*(f,Z) - S_*(f,Z)) = 0. \tag{11.30}$$

Da

$$S^*(f,Z) - S_*(f,Z) = (S^*(f,X) - S_*(f,X)) + (S^*(f,Y) - S_*(f,Y)),$$

daraus folgt, dass

$$\lim_{\varphi(X)\to 0} (S^*(f,X) - S_*(f,X)) = 0 = \lim_{\varphi(Y)\to 0} (S^*(f,Y) - S_*(f,Y)).$$

Somit ist f integrierbar auf $[a,c]$ und $[c,b]$. Für $\varphi(X) \to 0$ und $\varphi(Y) \to 0$ erhalten wir aus (11.8) und (11.29)

$$\begin{aligned}\int_a^b f dx &= \lim_{\varphi(Z)\to 0} S^*(f,Z) = \lim_{\varphi(X)\to 0} S^*(f,X) + \lim_{\varphi(Y)\to 0} S^*(f,Y) \\ &= \int_a^c f dx + \int_c^b f dx,\end{aligned}$$

was zu beweisen war. ∎

Sei f eine integrierbare Funktion auf einem kompakten Intervall J. Es folgt aus dem Satz 11.8, dass f auch auf jedem kompakten Teilintervall von J integrierbar ist, d.h. $\int_a^b f(x)dx$ ist für alle $a, b \in J$ mit $a < b$ definiert. Definieren wir jetzt das Integral $\int_a^b f(x)dx$ auch für $a \geq b$ wie folgt.

Definition. Seien $a, b \in J$. Im Fall $a > b$ setzen wir

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx, \tag{11.31}$$

und im Fall $a = b$:

$$\int_a^a f(x)dx = 0. \tag{11.32}$$

Die Newton-Leibniz-Formel gilt dann für beliebige $a, b \in J$: ist f auf J integrierbar und ist F eine Stammfunktion von f auf J , so gilt für alle $a, b \in J$

$$\int_a^b f(x)dx = [F]_a^b = F(b) - F(a).$$

Im Fall $a < b$ wurde diese Identität im Satz 11.5 bewiesen. Im Fall $a = b$ sind die beiden Seiten gleich 0. Im Fall $a > b$ gilt

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx = -[F]_b^a = [F]_a^b.$$

Korollar 11.9 *Sei f eine integrierbare Funktion auf einem kompakten Intervall J. Dann für alle $a, b, c \in J$ gilt* (11.28)*, d.h.*

$$\int_a^b f dx = \int_a^c f dx + \int_c^b f dx. \tag{11.33}$$

Beweis. Für $c = a$ oder $c = b$ gilt (11.33) trivialerweise nach (11.32). Für $a = b$ ist (11.33) äquivalent zu

$$0 = \int_a^c f dx + \int_c^a f dx,$$

was nach (11.31) gilt. Seien jetzt a, b, c verschieden. Dann gibt es 6 Fälle wie folgt:

1. $a < c < b$
2. $a < b < c$
3. $b < a < c$
4. $b < c < a$
5. $c < a < b$
6. $c < b < a$

Im Fall $a < c < b$ gilt (11.33) nach Satz 11.8. Im Fall $a < b < c$ haben wir nach dem Satz 11.8

$$\int_a^c f dx = \int_a^b f dx + \int_b^c f dx,$$

woraus folgt

$$\int_a^b f dx = \int_a^c f dx - \int_b^c f dx = \int_a^c f dx + \int_c^b f dx.$$

Die anderen Fälle werden analog betrachtet. ■

11.7 Integration und Ungleichungen

Satz 11.10 *Seien f und g integrierbare Funktionen auch einem Intervall $[a, b]$, $a < b$.*

(a) (Monotonie) *Gilt $f \leq g$ auf $[a, b]$ so gilt auch*

$$\int_a^b f dx \leq \int_a^b g dx. \tag{11.34}$$

(b) (LM-Ungleichung) *Es gilt*

$$(b-a) \inf_{[a,b]} f \leq \int_a^b f dx \leq (b-a) \sup_{[a,b]} f. \tag{11.35}$$

Beweis. (a) Für die Riemann-Summen haben wir

$$S(f, Z, \xi) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \leq \sum_{k=1}^n g(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = S(g, Z, \xi).$$

Für $\varphi(Z) \to 0$ erhalten wir somit auch (11.34).

(a) Sei $M = \sup_{[a,b]} f$. Dann $f \le M$ auf $[a,b]$, und nach (a) erhalten wir

$$\int_a^b f dx \le \int_a^b M dx = M(b-a),$$

Die untere Abschätzung wird analog bewiesen. ■

Insbesondere erhalten wir aus (11.34):

$$f \le 0 \;\Rightarrow \int_a^b f dx \le 0 \quad \text{und} \quad f \ge 0 \;\Rightarrow \int_a^b f dx \ge 0.$$

Korollar 11.11 *Sei $a < b$ und sei f eine stetige Funktion auf $[a,b]$. Dann gilt*

$$\left|\int_a^b f dx\right| \le \int_a^b |f|\, dx. \tag{11.36}$$

Beweis. Nach dem Satz 11.3 sind f und $|f|$ integrierbar. Da

$$-|f| \le f \le |f|,$$

so erhalten wir nach dem Satz 11.10

$$-\int_a^b |f|\, dx \le \int_a^b f dx \le \int_a^b |f|\, dx,$$

woraus (11.36) folgt. ■

Bemerkung. Es gilt eine stärkere Aussage: ist f auf $[a,b]$ integrierbar so ist $|f|$ auch integrierbar und (11.36) gilt.

Satz 11.12 (Mittelwertsatz für Integration) *Ist f stetig auf $[a,b]$, $a < b$, so existiert ein $\xi \in [a,b]$ mit*

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a). \tag{11.37}$$

Beweis. Setzen wir

$$m = \inf_{[a,b]} f \quad \text{und} \quad M = \sup_{[a,b]} f .$$

Nach dem Extremwertsatz aus Analysis 1 (Satz 7.9) und Korollar 7.10 ist das Bild $f([a,b])$ gleich das Intervall $[m, M]$. Da nach (11.35)

$$m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f dx \le M,$$

so gibt es ein $\xi \in [a,b]$ mit

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f dx,$$

woraus (11.37) folgt. ■

11.8 Fundamentalsatz der Analysis, 2

Hauptsatz 11.13 (Fundamentalsatz der Analysis: Existenz der Stammfunktion) *Sei f eine stetige Funktion auf einem Intervall $J \subset \mathbb{R}$. Für jedes $c \in J$ ist die Funktion*

$$F(x) = \int_c^x f(t)\,dt, \quad x \in J,$$

eine Stammfunktion von f auf J. Insbesondere hat jede stetige Funktion eine Stammfunktion.

Somit wird auch der Satz 10.1 bewiesen.

Beweis. Da f stetig ist, so ist f nach dem Satz 11.3 integrierbar auf jedem kompakten Teilintervall von J so dass das Integral $\int_c^x f(t)\,dt$ wohldefiniert ist. Wir müssen beweisen, dass $F'(x) = f(x)$ für jedes $x \in J$, d.h.

$$\lim_{y \to x} \frac{F(y) - F(x)}{y - x} = f(x). \tag{11.38}$$

Nach der Additivität des Integrals gilt

$$\begin{aligned} F(y) - F(x) &= \int_c^y f(t)\,dt - \int_c^x f(t)\,dt \\ &= \int_x^c f(t)\,dt + \int_c^y f(t)\,dt \\ &= \int_x^y f(t)\,dt. \end{aligned}$$

Ist $y > x$ so gibt es nach dem Satz 11.12 ein $\xi \in [x, y]$ mit

$$\int_x^y f(t)\,dt = f(\xi)(y - x). \tag{11.39}$$

Ist $y < x$ so gibt es analog ein $\xi \in [y, x]$ mit

$$\int_y^x f(t)\,dt = f(\xi)(x - y)$$

was wieder äquivalent zu (11.39) ist. In den beiden Fällen erhalten wir ein $\xi = \xi(y)$ zwischen x und y mit (11.39), woraus folgt

$$F(y) - F(x) = f(\xi)(y - x)$$

und somit

$$\frac{F(y) - F(x)}{y - x} = f(\xi).$$

Da ξ zwischen x und y liegt, so gilt $\xi \to x$ für $y \to x$, und wir erhalten nach der Stetigkeit von f, dass

$$f(\xi) \to f(x) \quad \text{für } y \to x,$$

woraus (11.38) folgt. ∎

Die Sätze 11.5 und 11.13 ergeben folgendes.

Korollar 11.14 (Fundamentalsatz der Analysis I+II) *Für jede stetige Funktion f auf dem Intervall $[a,b]$ existiert eine Stammfunktion F auf $[a,b]$ und es gilt*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Die Existenz der Stammfunktion auf dem ganzen Intervall $[a,b]$ ist wichtig. Hier ist ein Gegenbeispiel, wie man falsches Ergebnis erhält:

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x} = \left[\int \frac{dx}{x}\right]_{-1}^1 = [\ln|x|]_{-1}^1 = 0.$$

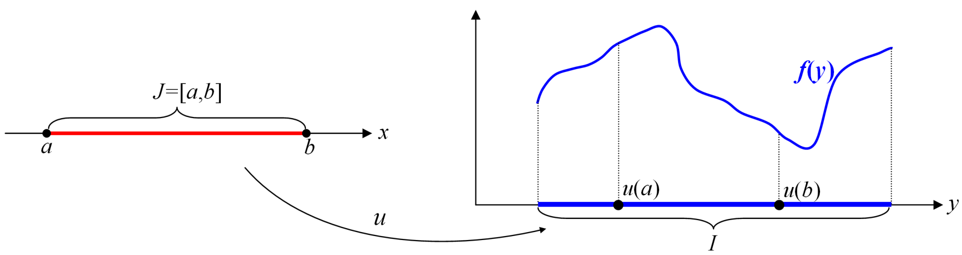
Warum ist diese Berechnung falsch? Die Stammfunktion $\ln|x|$ ist nicht auf dem ganzen Intervall $[-1,1]$ definiert wie die Newton-Leibniz-Formel anfordert, sondern auf zwei disjunkten Intervallen $(0,+\infty)$ und $(-\infty,0)$. Somit gilt diese Formel für $\int_a^b \frac{dx}{x}$ nur dann wenn entweder $[a,b] \subset (0,\infty)$ oder $[a,b] \subset (-\infty,0)$. Darüber hinaus ist die Funktion $\frac{1}{x}$ auf $[-1,1]$ nicht Riemann-integrierbar, da diese Funktion unbeschränkt ist.

11.9 Substitutionsregel

Satz 11.15 (Substitutionsregel im bestimmten Integral) *Seien f eine stetige Funktion auf einem Intervall I und $u: J \to I$ eine stetig differenzierbare Funktion auf einem Intervall $J = [a,b]$ mit $a < b$ so dass die Komposition $f(u(x))$ auf $[a,b]$ definiert ist. Dann gilt*

$$\boxed{\int_a^b f(u(x))\,du(x) = \int_{u(a)}^{u(b)} f(y)dy.} \tag{11.40}$$

Die Identität (11.40) lässt sich als eine Substitution $y = u(x)$ betrachten. Im Unterschied zur Substitutionsregel für unbestimmtes Integral muss man die Substitution auch in den Grenzen der Integration durchführen.



07.05.21 **Vorlesung 8**

Beweis. Da f auf I stetig ist, so hat f nach dem Satz 11.13 eine Stammfunktion F auf I, d.h. $F' = f$. Nach der Kettenregel gilt

$$F(u(x))' = F'(u(x))\,u'(x) = f(u(x))\,u'(x).$$

Nach der Newton-Leibniz-Formel des Satzes 11.5 gelten die Identitäten

$$\int_{u(a)}^{u(b)} f(y)dy = [F]_{u(a)}^{u(b)} = F\left(u\left(b\right)\right) - F\left(u\left(a\right)\right) \tag{11.41}$$

und

$$\int_a^b f\left(u(x)\right) du(x) = \int_a^b f\left(u(x)\right) u'(x)dx = \left[F\left(u(x)\right)\right]_a^b = F\left(u\left(b\right)\right) - F\left(u\left(a\right)\right). \tag{11.42}$$

Vergleichen von (11.41) und (11.42) ergibt (11.40). ■

Bemerkung. Der Satz 10.5 gilt auch für integrierbare Funktionen f, aber der Beweis in diesem Fall ist deutlich komplizierter.

Beispiel. 1. Bestimmen wir

$$\int_1^2 \frac{dx}{e^x - 1}.$$

Wir haben

$$\int_1^2 \frac{dx}{e^x - 1} = \int_1^2 \frac{e^x dx}{e^x\left(e^x - 1\right)} = \int_1^2 \frac{de^x}{e^x\left(e^x - 1\right)},$$

und die Substitution $y = u(x) = e^x$ ergibt

$$\begin{aligned}
\int_1^2 \frac{dx}{e^x - 1} &= \int_{u(1)}^{u(2)} \frac{dy}{y\left(y - 1\right)} \\
&= \int_e^{e^2} \left(\frac{1}{y - 1} - \frac{1}{y}\right) dy \\
&= \left[\ln\left(y - 1\right)\right]_e^{e^2} - \left[\ln y\right]_e^{e^2} \\
&= \ln\frac{e^2 - 1}{e - 1} - 1 = \ln\left(e + 1\right) - \ln e = \ln\left(1 + e^{-1}\right).
\end{aligned}$$

2. Bestimmen wir

$$\int_0^{5\pi} \left(2 + \cos x\right)^2 \sin x \, dx.$$

Wir erhalten mit Hilfe von der Substitution $y = u(x) = 2 + \cos x$:

$$\begin{aligned}
\int_0^{5\pi} \left(2 + \cos x\right)^2 \sin x \, dx &= -\int_0^{5\pi} \left(2 + \cos x\right)^2 d\left(2 + \cos x\right) \\
&= -\int_{u(0)}^{u(5\pi)} y^2 dy = -\int_3^1 y^2 dy \\
&= \int_1^3 y^2 dy = \left[\frac{y^3}{3}\right]_1^3 = 9 - \frac{1}{3} = \frac{26}{3}.
\end{aligned}$$

In diesem Beispiel ist die Substitution $y = u(x)$ nicht monoton (und muss nicht monoton sein).

Korollar 11.16 (Inverse Substitution) *Seien f eine stetige Funktion auf einem Intervall $I = [A, B]$ mit $A < B$ und $v : J \to I$ eine streng monotone stetig differenzierbare Funktion auf einem Intervall J mit $v(J) = I$. Dann gilt*

$$\boxed{\int_A^B f(x)dx = \int_{v^{-1}(A)}^{v^{-1}(B)} f(v(t))\,dv(t).} \tag{11.43}$$

Man betrachtet die Identität (11.43) als die inverse Substitution $x = v(t)$ im bestimmten Integral.

Beweis. Die inverse Funktion v^{-1} existiert auf I nach dem Satz 7.11 (Existenz der inversen Funktion). Die Komposition $f(v(t))$ ist wohldefiniert, da $v(t) \in I$.

Setzen wir $a = v^{-1}(A)$ und $b = v^{-1}(B)$. Die Funktion $v(t)$ ist entweder streng monoton steigend oder fallend. Sei v steigend, dann $a < b$ und $J = [a, b]$.

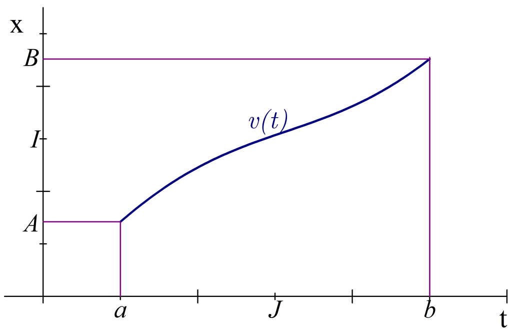


Figure 11.1: Substitution $x = v(t)$

Nach der Substitutionsregel (11.40) erhalten wir mit der Substitution $x = v(t)$

$$\int_{v^{-1}(A)}^{v^{-1}(B)} f(v(t))\,dv(t) = \int_a^b f(v(t))\,dv(t) = \int_{v(a)}^{v(b)} f(x)dx = \int_A^B f(x)dx,$$

was zu beweisen war. Sei jetzt v monoton fallend. In diesem Fall gilt $a > b$ und somit $J = [b, a]$. In diesem Fall vertauschen wir die Grenzen von Integral und erhalten

$$\int_a^b f(v(t))\,dv(t) = -\int_b^a f(v(t))\,dv(t) = -\int_{v(b)}^{v(a)} f(x)dx = \int_{v(a)}^{v(b)} f(x)dx = \int_A^B f(x)dx.$$

■

Beispiel. Bestimmen wir

$$\int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\,dx.$$

Verwenden wir die inverse Substitution $x = \sin t$ mit $t \in [0, \pi/2]$, d.h. $t = \arcsin x$.

Dann gilt

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx &= \int_{\arcsin(0)}^{\arcsin(1)} \sqrt{1-\sin^2 t}\,d\sin t \\
&= \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\,dt \\
&= \int_0^{\pi/2} \cos^2 t\,dt \\
&= \int_0^{\pi/2} \frac{1+\cos 2t}{2}dt \\
&= \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}dt + \frac{1}{4}\int_0^{\pi/2} \cos 2t\,d\,(2t) \\
&= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4}\left[\sin 2t\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}.
\end{aligned}$$

Natürlich erhält man die gleiche Antwort mit Hilfe von dem unbestimmten Integral und der Newton-Leibniz-Formel:

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx = \left[\frac{1}{2}\arcsin x + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}\right]_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

Beispiel. Bestimmen wir das Integral

$$\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{1+\tan x}.$$

Dafür verwenden wir die inverse Substitution $x = \arctan t$ wobei $t \in [0,1]$. Da $t = \tan x$, so erhalten wir

$$\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{1+\tan x} = \int_{\tan 0}^{\tan \pi/4} \frac{1}{1+t}d\arctan t = \int_0^1 \frac{dt}{(1+t)\,(1+t^2)}.$$

Die Partialbruchzerlegung des Integrands ist wie folgt:

$$\frac{1}{(1+t)\,(1+t^2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+t} + \frac{1-t}{t^2+1}\right).$$

So, bestimmen wir zuerst die folgenden Integrale:

$$\int_0^1 \frac{dt}{1+t} = \left[\ln(1+t)\right]_0^1 = \ln 2$$

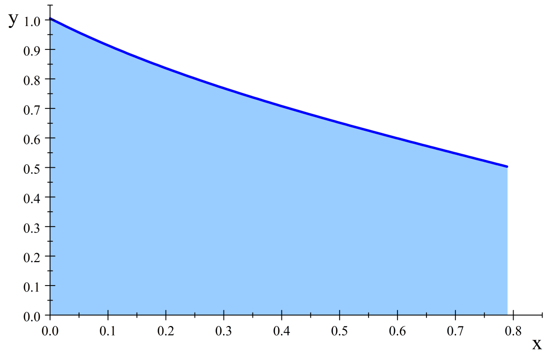
und

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{1-t}{t^2+1}dt &= \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} - \int_0^1 \frac{t\,dt}{t^2+1} \\
&= \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{d\,(t^2+1)}{t^2+1} \\
&= \left[\arctan t\right]_0^1 - \frac{1}{2}\left[\ln\left(t^2+1\right)\right]_0^1 \\
&= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2.
\end{aligned}$$

Somit erhalten wir

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{1+\tan x} &= \frac{1}{2}\int_0^1 \left(\frac{1}{1+t} + \frac{1-t}{t^2+1}\right) dt \\ &= \frac{1}{2}\left(\ln 2 + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2\right) = \frac{1}{4}\ln 2 + \frac{\pi}{8},\end{aligned}$$

so dass der Flächeninhalt des Untergraphes der Funktion $\frac{1}{1+\tan x}$ auf dem Intervall $[0, \pi/4]$ gleich $\frac{1}{4}\ln 2 + \frac{\pi}{8} \approx 0.566$ ist.



Der Graph der Funktion $\frac{1}{1+\tan x}$

11.10 Taylorformel mit Integralrestglied

Hauptsatz 11.17 *Sei f eine $(n+1)$-fach stetig differenzierbare Funktion auf einem Intervall J, wobei $n \in \mathbb{Z}_+$. Dann gilt für alle $a, x \in J$ die Identität*

$$f(x) = T_n(x) + \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(y)(x-y)^n}{n!} dy, \tag{11.44}$$

wobei $T_n(x)$ das Taylor-Polynom von f an der Stelle a ist, d.h. ,

$$T_n(x) = f(a) + f'(a)\frac{(x-a)}{1!} + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2!} + ... + f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!}.$$

Bemerkung. Die Taylorformel mit Lagrange-Restglied ergibt in diesem Fall

$$f(x) = T_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}, \tag{11.45}$$

wobei c ein Mittelpunkt zwischen a und x ist (Satz 9.3). Die Identität (11.45) lässt sich aus (11.44) herleiten.

Beweis. Induktion nach n. Induktionsanfang für $n = 0$. In diesem Fall gilt $T_0(x) = f(a)$, und (11.44) sieht wie folgt aus:

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(y)\, dy,$$

was nach dem Fundamentalsatz gilt.

Induktionsschritt von $n-1$ nach n. Nach der Induktionsvoraussetzung haben wir die Identität

$$f(x) = T_{n-1}(x) + \int_a^x \frac{f^{(n)}(y)(x-y)^{n-1}}{(n-1)!} dy \tag{11.46}$$

In der rechten Seite verwenden wir die partielle Integration. Dafür bemerken wir zuerst, dass bezüglich der Variable y

$$d(x-y)^n = -n(x-y)^{n-1} dy.$$

Dividieren durch $n!$ ergibt

$$\frac{(x-y)^{n-1}}{(n-1)!} dy = -d\frac{(x-y)^n}{n!}.$$

Einsetzen in die rechte Seite von (11.46) und Anwendung von partiellen Integration (11.27) mit

$$u(y) = f^{(n)}(y) \quad \text{und} \quad v(y) = \frac{(x-y)^n}{n!}$$

ergibt

$$\begin{aligned}
\int_a^x \frac{f^{(n)}(y)(x-y)^{n-1}}{(n-1)!} dy &= -\int_a^x f^{(n)}(y)\, d\frac{(x-y)^n}{n!} \\
&= -\left[f^{(n)}(y)\frac{(x-y)^n}{n!}\right]_{y=a}^{y=x} + \int_a^x \frac{(x-y)^n}{n!} f^{(n+1)}(y)\, dy \\
&= f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!} + \int_a^x \frac{(x-y)^n}{n!} f^{(n+1)}(y)\, dy.
\end{aligned}$$

Somit gilt die Identität

$$f(x) = T_{n-1}(x) + f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!} + \int_a^x \frac{(x-y)^n}{n!} f^{(n+1)}(y)\, dy.$$

Da

$$T_{n-1}(x) + f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!} = T_n(x),$$

so folgt daraus (11.44). ■

11.11 Länge von Kurve

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ definieren wir den Raum

$$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}}_{n \text{ mal}}.$$

Elemente von $\mathbb{R}^n$ sind die Folgen

$$x = \{x_k\}_{k=1}^n = (x_1, \ldots, x_n)$$

von n reellen Zahlen $x_1, x_2, ..., x_n$. Die Zahlen x_k heißen die Komponenten (oder Koordinaten) von x, die Folgen x heißen auch Punkte oder Vektoren von $\mathbb{R}^n$.

Die Menge $\mathbb{R}^n$ heißt der *n-dimensionale Koordinatenvektorraum.* Die Menge $\mathbb{R}^n$ ist auch ein linearer Raum mit den Operationen

$$(x_1, ..., x_n) + (y_1, ..., y_n) = (x_1 + y_1, ..., x_n + y_n)$$

und

$$c\,(x_1, ..., x_n) = (cx_1, ..., cx_n)\,, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Der physikalische Raum ist 3-dimensional, aber in Anwendungen braucht man auch höherdimensionale Räume die nicht unbedingt physikalisch sind. Zum Beispiel, die Folge $(x_1, ..., x_n)$ kann Ergebnisse von bestimmten Messungen darstellen, wo die Anzahl n beliebig gross sein kann.

Für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ definieren wir der Betrag $|x|$ von x (wird auch die *Norm* genannt) wie folgt:

$$|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}. \tag{11.47}$$

Zum Beispiel, die Elemente von $\mathbb{R}^2$ sind die Paare $x = (x_1, x_2)$, und der Betrag von x ist

$$|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2},$$

was mit dem Betrag der komplexen Zahl $x_1 + ix_2$ übereinstimmt. Für zwei Punkte $x, y \in \mathbb{R}^n$ heißt $|x - y|$ der *Abstand* zwischen x und y.

Sei J ein Intervall in $\mathbb{R}$. Jede Abbildung $\varphi : J \to \mathbb{R}^n$ hat der Form

$$\varphi(t) = (\varphi_1(t), ..., \varphi_n(t))\,, \quad t \in J,$$

wobei die Komponenten $\varphi_1(t), ..., \varphi_n(t)$ reellwertige Funktion von $t \in J$ sind.

Definition. Die Abbildung φ heißt stetig wenn alle Komponenten $\varphi_j(t)$ stetig sind, und stetig differenzierbar wenn alle Komponenten $\varphi_j(t)$ stetig differenzierbar sind. Im letzten Fall definieren wir die Ableitung φ' von φ mit

$$\varphi'(t) = (\varphi_1'(t), ..., \varphi_n'(t))\,,$$

so dass φ' auch eine Abbildung von J nach $\mathbb{R}^n$ ist.

Definition. Das Bild $K = \varphi(J)$ einer stetigen Abbildung $\varphi : J \to \mathbb{R}^n$ heißt *Kurve.* Die Abbildung φ heißt die *Parametrisierung* der Kurve K, und das Paar (K, φ) heißt *parametrisierte Kurve* oder *ein Weg.* Die Variable t heißt der Parameter.

Das Intervall J kann man als ein Zeitintervall betrachten und $\varphi(t)$ – als die Position eines bewegenden Körpers in $\mathbb{R}^n$ um Zeit t. Die Kurve $K = \varphi(J)$ ist die Spur des Körpers. Die Parametrisierung $\varphi(t)$ lässt sich als der Fahrplan der Bewegung des Körpers betrachten.

Definition. Seien $J = [\alpha, \beta]$ ein beschränktes abgeschlossenes Intervall mit $\alpha < \beta$ und $\varphi : J \to \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Parametrisierung. Definieren wir die *Länge* $L(K, \varphi)$ der parametrisierten Kurve (K, φ) mit

$$\boxed{L(K, \varphi) = \int_\alpha^\beta |\varphi'(t)|\, dt = \int_\alpha^\beta \sqrt{\varphi_1'(t)^2 + ... + \varphi_n'(t)^2} dt}. \tag{11.48}$$

Die Ableitung $\varphi'(t)$ ist der Geschwindigkeitsvektor des Körpers und der Betrag $|\varphi'(t)|$ ist die skalare Geschwindigkeit um Zeitpunkt t. Die Integration von $|\varphi'(t)|$ über $[\alpha, \beta]$ ergibt den ganzen zurückgelegten Weg des Körpers im Zeitintervall J, was genau die Länge der Spur $\varphi(J)$ ist.

12.05.21 Vorlesung 9

Beispiel. Fixieren wir zwei verschiedene Punkte $a, b \in \mathbb{R}^n$ und betrachten die Parametrisierung

$$\begin{aligned} \varphi &: [0,1] \to \mathbb{R}^n \\ \varphi(t) &= (1-t)\,a + tb \end{aligned}$$

Das Bild $K = \varphi(J)$ ist eine gerade Strecke zwischen a und b. Dann gilt

$$\varphi' = b - a$$

und

$$L(K, \varphi) = \int_0^1 |\varphi'(t)|\, dt = |b - a|\,.$$

Beispiel. Betrachten wir die Parametrisierung

$$\begin{aligned} \varphi &: [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2 \\ \varphi(t) &= (r\cos t, r\sin t)\,, \end{aligned}$$

wobei $r > 0$. Das Bild $K = \varphi(J)$ ist der Kreis in $\mathbb{R}^2$ von Radius r und Mittelpunkt 0. Da

$$\varphi' = (-r\sin t, r\cos t)$$

und

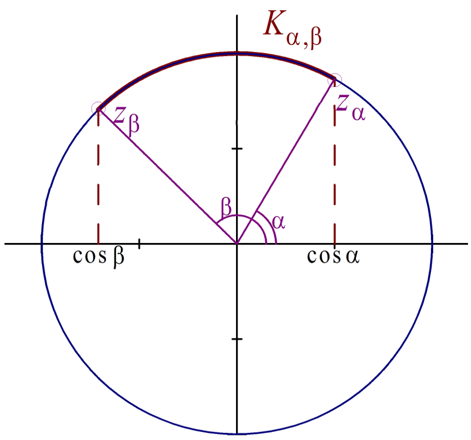
$$|\varphi'| = \sqrt{r^2\sin^2 t + r^2\cos^2 t} = r,$$

so erhalten wir

$$L(K, \varphi) = \int_0^{2\pi} |\varphi'(t)|\, dt = \int_0^{2\pi} r\, dt = 2\pi r.$$

Fixieren wir $0 \le \alpha \le \beta \le 2\pi$ und betrachten zwei Punkte $z_\alpha = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ und $z_\beta = r(\cos\beta + i\sin\beta)$ auf dem Kreis K. Sei $K_{\alpha,\beta}$ der Kreisbogen zwischen den Punkten z_α und z_β auf K, d.h. $K_{\alpha,\beta}$ ist eine Kurve mit der Parametrisierung

$$\begin{aligned} \varphi &: [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}^2 \\ \varphi(t) &= (r\cos t, r\sin t)\,, \end{aligned}$$



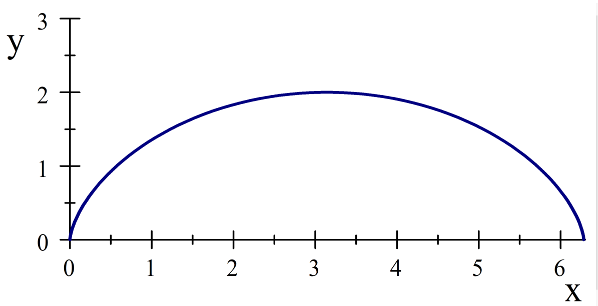
Der Bogen $K_{\alpha,\beta}$

Es folgt

$$L\left(K_{\alpha,\beta},\varphi\right) = \int_\alpha^\beta \left|\varphi'\left(t\right)\right| dt = \int_\alpha^\beta r\, dt = \left(\beta-\alpha\right) r.$$

Beispiel. Die *Zykloide* ist eine Kurve K mit der Parametrisierung

$$\begin{aligned} \varphi &: [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2 \\ \varphi\left(t\right) &= \left(t-\sin t,\ 1-\cos t\right). \end{aligned}$$



Die Zykloide

Dann gilt

$$\varphi'\left(t\right) = \left(1-\cos t, \sin t\right)$$

und

$$\left|\varphi'\right| = \sqrt{\left(1-\cos t\right)^2+\sin^2 t} = \sqrt{2-2\cos t} = 2\sin\frac{t}{2}.$$

Somit ist die Länge der Zykloide gleich

$$L\left(K,\varphi\right) = \int_0^{2\pi} 2\sin\frac{t}{2} dt = 4\int_0^\pi \sin s\ ds = -4\left[\cos s\right]_0^\pi = 8.$$

Beispiel. Betrachten wir den Graph

$$\Gamma = \{(x, y) : x \in [\alpha, \beta], \ y = f(x)\}$$

einer Funktion $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$. Der Graph lässt sich betrachten als eine Kurve mit Parametrisierung

$$\begin{aligned} \varphi &: [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^2 \\ \varphi(x) &= (x, f(x)) \end{aligned}$$

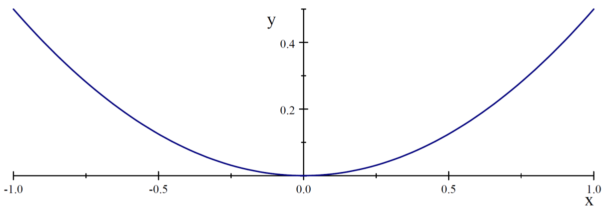
Ist f stetig differenzierbar, so erhalten wir

$$\varphi' = (1, f'(x)) \quad \text{und} \quad |\varphi'| = \sqrt{1 + f'(x)^2},$$

woraus folgt

$$\boxed{L(\Gamma, \varphi) = \int_\alpha^\beta \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx}. \tag{11.49}$$

Zum Beispiel, betrachten wir die Parabel $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ auf $[0, 1]$.



Die Parabel

Nach (11.49) erhalten wir die Länge der Parabel:

$$\begin{aligned} L &= \int_0^1 \sqrt{1 + x^2}\, dx = \left[\frac{1}{2} \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right) + \frac{1}{2} x \sqrt{x^2 + 1}\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2} \ln\left(1 + \sqrt{2}\right) + \frac{1}{2}\sqrt{2} \approx 1.148 \end{aligned}$$

Sei $\varphi : J \to \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Abbildung. Betrachten wir eine Substitution $t = u(s)$ wobei $u : I \to J$ eine stetig differenzierbare Funktion auf einem kompakten Intervall I ist. Somit ist die folgende Komposition definiert

$$\psi := \varphi \circ u : I \to \mathbb{R}^n,$$

die auch eine stetig differenzierbare Abbildung ist.

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "u"] \arrow[rr, bend right, "\psi = \varphi \circ u"'] & J \arrow[r, "\varphi"] & \mathbb{R}^n \end{tikzcd}$$

Ist u surjektiv, d.h. $u(I) = J$ so bestimmen φ und ψ die gleiche Kurve K, da

$$\psi(I) = (\varphi \circ u)(I) = \varphi(u(I)) = \varphi(J). \tag{11.50}$$

Somit erhalten wir eine Kurve K mit zwei Parametrisierungen φ und ψ, die zwei alternative Fahrpläne der Bewegung entlang der Kurve K darstellen. Der folgende Satz besagt, dass unter natürlichen Voraussetzungen die Längen $L(K,\varphi)$ und $L(K,\psi)$ übereinstimmen. In anderen Wörter, die Länge der Kurve ist unabhängig von dem Fahrplan.

Satz 11.18 *Sie die Funktion $u : I \to J$ stetig differenzierbar, monoton und surjektiv (d.h. $u(I) = J$). Dann bestimmen $\varphi : J \to \mathbb{R}^n$ und $\psi = \varphi \circ u : I \to \mathbb{R}^n$ die gleiche Kurve $K = \varphi(J) = \psi(I)$, und die parametrisierten Kurven (K,φ) und (K,ψ) haben die gleichen Längen, d.h.*

$$L(K,\varphi) = L(K,\psi). \tag{11.51}$$

Beweis. Die Identität $\psi(I) = \varphi(J)$ haben wir schon in (11.50) bewiesen. Beweisen wir (11.51). Die Funktion u ist monoton steigend oder fallend. Sei u monoton steigend, so dass $u'(s) \geq 0$ für alle $s \in I$. Für jedes $k = 1, ..., n$ haben wir nach der Kettenregel

$$\psi_k'(s) = (\varphi_k(u(s)))' = \varphi_k'(u(s))\, u'(s),$$

woraus folgt

$$\psi'(s) = \varphi'(u(s))\, u'(s)$$

und somit

$$|\psi'(s)| = |\varphi'(u(s))|\, |u'(s)| = |\varphi'(u(s))|\, u'(s),$$

wobei wir benutzt haben, dass $u'(s) \geq 0$.

Seien $I = [a,b]$ und $J = [\alpha,\beta]$ wobei $\alpha < \beta$ und $a < b$. Da $u : I \to J$ monoton steigend und surjektiv ist, so erhalten wir $u(a) = \alpha$ und $u(b) = \beta$. Nach der Definition der Länge (11.48) und der Substitutionsregel (11.40) erhalten wir

$$\begin{aligned} L(K,\psi) &= \int_a^b |\psi'(s)|\, ds = \int_a^b |\varphi'(u(s))|\, u'(s)\, ds = \int_a^b |\varphi'(u(s))|\, du(s) \ \ (\text{Substitution } t = u(s)) \\ &= \int_{u(a)}^{u(b)} |\varphi'(t)|\, dt = \int_\alpha^\beta |\varphi'(t)|\, dt = L(K,\varphi), \end{aligned}$$

was zu beweisen war. Der Fall von einer monoton fallenden Funktion u ist analog. ∎

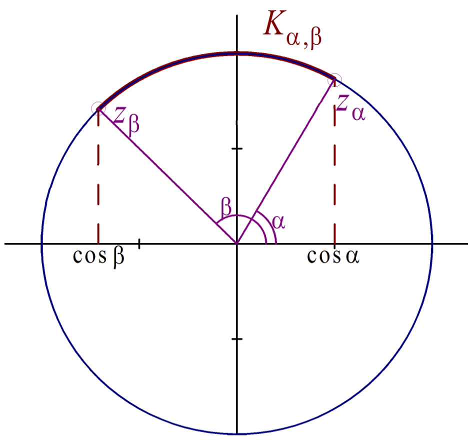
Beispiel. Betrachten wir den Kreisbogen $K_{\alpha,\beta}$ von Radius 1 mit der Parametrisierung

$$\begin{aligned} \varphi &: [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}^2 \\ \varphi(t) &= (\cos t, \sin t). \end{aligned}$$

Wir wissen schon, dass

$$L(K_{\alpha,\beta},\varphi) = \beta - \alpha.$$

Seien $0 < \alpha < \beta < \pi$.



Der Bogen $K_{\alpha,\beta}$

Auf dem Intervall $[0, \pi]$ ist $\cos t$ monoton fallend und hat die inverse Funktion arcsin auf $[-1, 1]$. Die Substitution $x = \cos t$ (was äquivalent zu $t = \arcsin x$) ergibt uns eine neue Parametrisierung

$$\begin{aligned} \psi &: [\cos\beta, \cos\alpha] \to \mathbb{R}^2 \\ \psi(x) &= (x, \sqrt{1-x^2}), \end{aligned}$$

so dass $K_{\alpha,\beta}$ der Graph der Funktion $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ auf $[\cos\beta, \cos\alpha]$ ist. Es gilt

$$\begin{aligned} L(K_{\alpha,\beta}, \psi) &= \int_{\cos\beta}^{\cos\alpha} \sqrt{1 + f'(x)^2} = \int_{\cos\beta}^{\cos\alpha} \sqrt{1 + \left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2} dx \\ &= \int_{\cos\beta}^{\cos\alpha} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = [\arcsin x]_{\cos\beta}^{\cos\alpha} \\ &= [\pi/2 - \arccos x]_{\cos\beta}^{\cos\alpha} = \beta - \alpha. \end{aligned}$$

Somit gilt $L(K_{\alpha,\beta}, \varphi) = L(K_{\alpha,\beta}, \psi)$ wie erwartet.

11.12 * Wallis-Produkt

Zwei Folgen $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ und $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ von positiven reellen Zahlen heißen *äquivalent* wenn

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1.$$

Schreibweise: $a_n \sim b_n$ für $n \to \infty$. Diese Relation heißt *Äquivalenz* oder *asymptotische Identität*. Sie besitzt die folgenden Eigenschaften:

1. $a_n \sim a_n$ (Reflexivität)

2. $a_n \sim b_n$ impliziert $b_n \sim a_n$ (Symmetrie)

3. $a_n \sim b_n$ und $b_n \sim c_n$ implizieren $a_n \sim c_n$ (Transitivität).

Satz 11.19 *Es gelten die Äquivalenzen*

$$\int_0^\pi \sin^n x\,dx \sim \sqrt{\frac{2\pi}{n}} \quad \text{für } n \to \infty \tag{11.52}$$

und

$$\frac{(2^n n!)^2}{(2n)!} \sim \sqrt{\pi n} \quad \text{für } n \to \infty \tag{11.53}$$

(Wallis-Produkt).

Die äquivalenten Formulierungen von (11.53):

$$\frac{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (2n)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)} \sim \sqrt{\pi n}$$

und

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 2n)^2}{(1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1))^2\, n} = \pi.$$

Beweis. Bezeichnen wir für $n \in \mathbb{Z}_+$

$$I_n = \int_0^\pi \sin^n x\,dx.$$

Wir beweisen Eigenschaften von I_n in einer Reihenfolge von Schritten.

(a) $I_{n-1} \geq I_n > 0$. Da für $0 < x < \pi$ gilt $0 < \sin x \leq 1$, so folgt es

$$0 < \sin^n x \leq \sin^{n-1} x,$$

woraus $0 < I_n \leq I_{n-1}$ folgt.

(b) $I_0 = \pi$ und $I_1 = 2$, da

$$I_0 = \int_0^\pi dx = \pi \quad \text{und} \quad I_1 = \int_0^\pi \sin x\,dx = -\left[\cos x\right]_0^\pi = 2.$$

(c) $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$ für $n \geq 2$, da

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_0^\pi \sin^n x\,dx = -\int_0^\pi \sin^{n-1} x\,d\cos x \\
&= -\left[\sin^{n-1} x \cos x\right]_0^\pi + \int_0^\pi \cos x\,d\sin^{n-1} x \\
&= (n-1)\int_0^\pi \cos^2 x \sin^{n-2} x\,dx \\
&= (n-1)\int_0^\pi \left(1-\sin^2 x\right)\sin^{n-2} x\,dx \\
&= (n-1)\left(I_{n-2} - I_n\right),
\end{aligned}$$

woraus $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$ folgt.

(d) $\lim_{n\to\infty}\frac{I_n}{I_{n-1}}=1$. In der Tat folgt es aus (c) und (a), dass

$$\frac{n-1}{n}=\frac{I_n}{I_{n-2}}\leq\frac{I_n}{I_{n-1}}\leq 1.$$

Da $\frac{n-1}{n}\to 1$, so erhalten wir $\frac{I_n}{I_{n-1}}\to 1$ für $n\to\infty$.

(e) Für alle $k\in\mathbb{Z}_+$ gelten die Identitäten:

$$I_{2k+1}=2\frac{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot(2k)}{3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2k+1)}\quad\text{und}\quad I_{2k}=\pi\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2k-1)}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot(2k)}\ . \tag{11.54}$$

Induktion nach k. Für $k=0$ gelten (11.54) nach (b).

Induktionsschritt von $k-1$ nach k. Angenommen

$$I_{2k-1}=2\frac{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot(2k-2)}{3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2k-1)},$$

so erhalten wir nach (c)

$$I_{2k+1}=\frac{2k}{2k+1}I_{2k-1}=2\frac{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot(2k-2)\cdot(2k)}{3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2k-1)\cdot(2k+1)}.$$

Analog beweist man die zweite Identität in (11.54).

(f) $I_{n-1}I_n=\frac{2\pi}{n}$. Es folgt aus ($e$), dass für $n=2k+1$

$$I_{n-1}I_n=I_{2k}I_{2k+1}=\pi\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2k-1)}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot(2k)}\cdot 2\frac{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot(2k)}{3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2k+1)}=\frac{2\pi}{2k+1}=\frac{2\pi}{n}.$$

Im Fall $n=2k$ erhalten wir analog

$$I_{n-1}I_n=I_{2k-1}I_{2k}=2\frac{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot(2k-2)}{3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2k-1)}\cdot\pi\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2k-1)}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot(2k)}=\frac{2\pi}{2k}=\frac{2\pi}{n}.$$

(g) Jetzt beweisen wir (11.52), d.h. $I_n\sim\sqrt{\frac{2\pi}{n}}$. Nach ($f$) haben wir

$$I_n^2=I_nI_{n-1}\frac{I_n}{I_{n-1}}=\frac{2\pi}{n}\frac{I_n}{I_{n-1}},$$

woraus folgt nach (d)

$$\frac{I_n^2}{2\pi/n}=\frac{I_n}{I_{n-1}}\to 1\ \text{ für } n\to\infty,$$

und somit $I_n^2\sim\frac{2\pi}{n}$, was äquivalent zu (11.52) ist.

(h) Beweisen wir (11.53). Für $n=2k+1$ haben wir nach (e) und (g)

$$2\frac{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot(2k)}{3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2k+1)}\sim\sqrt{\frac{2\pi}{2k+1}}\ \text{ für } k\to\infty,$$

woraus folgt

$$\frac{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot(2k)}{3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2k-1)}\sim\sqrt{\frac{\pi}{2}(2k+1)}\sim\sqrt{\pi k}.$$

Die linke Seite ist gleich

$$\frac{(2\cdot 4\cdot\ldots\cdot(2k))^2}{3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2k-1)\cdot 2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2k}=\frac{\left(2^kk!\right)^2}{(2k)!},$$

woraus (11.53) folgt. ■

11.13 * Stirling-Formel

Hauptsatz 11.20 *Es gilt*

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \text{ für } n \to \infty. \tag{11.55}$$

Beweis. Die asymptotische Identität (11.55) ist äquivalent zu

$$\frac{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n}{n!} \to 1 \text{ für } n \to \infty,$$

d.h. zu

$$\ln \frac{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n}{n!} \to 0 \text{ für } n \to \infty,$$

was äquivalent zu

$$\left(\frac{1}{2}\ln n + n \ln \frac{n}{e}\right) - (\ln 1 + \ln 2 + ... + \ln n) \to \ln \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \text{ für } n \to \infty$$

ist. Zunächst beweisen wir, dass der Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty}\left(n \ln \frac{n}{e} - \left(\ln 2 + \ln 3 + ... + \ln (n-1) + \frac{1}{2}\ln n\right)\right) \tag{11.56}$$

existiert und endlich ist. Danach bestimmen wir den Grenzwert.

Betrachten wir die folgende Funktion $f(x)$ auf $[1, \infty)$:

1. $f(n) = \ln n$ für alle $n \in \mathbb{N}$
2. für $x \in [n, n+1]$ ist $f(x)$ eine lineare Funktion, d.h.

$$f(x) = (n+1-x)\ln n + (x-n)\ln(n+1).$$

Da $\ln x$ konkav ist, so gilt

$$f(x) \le \ln x \text{ für alle } x \ge 1.$$

Setzen wir

$$a_n := \int_1^n (\ln x - f(x))\, dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Es folgt, dass die Folge $\{a_n\}_{n\in N}$ nicht negative und monoton steigend ist. Es gilt

$$\int_1^n \ln x \, dx = n \ln n - n + 1 = n \ln \frac{n}{e} + 1$$

und

$$\begin{aligned}\int_1^n f(x)\, dx &= \sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1} f(x)\, dx = \sum_{k=1}^{n-1}\frac{f(k)+f(k+1)}{2} \\ &= \ln 2 + \ln 3 + ... + \ln(n-1) + \frac{1}{2}\ln n\,.\end{aligned}$$

Somit erhalten wir

$$a_n = \int_1^n \ln x\,dx - \int_1^n f(x)\,dx = n\ln\frac{n}{e} + 1 - \left(\ln 2 + \ln 3 + ... + \ln(n-1) + \frac{1}{2}\ln n\right).$$

Somit ist der Grenzwert (11.56) gleich $\lim a_n + 1$. Da die Folge $\{a_n\}$ monoton steigend ist, so existiert der Grenzwert $\lim a_n$. Es bleibt noch zu zeigen, dass $\lim a_n$ endlich ist. Es gilt

$$\begin{aligned}
a_n &= \sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1}(\ln x - f(x))\,dx \\
&\le \sum_{k=1}^{\infty}\int_k^{k+1}(\ln x - f(x))\,dx \\
&= \sum_{k=1}^{\infty}\left((k+1)\ln\frac{k+1}{e} - k\ln\frac{k}{e} - \frac{\ln k + \ln(k+1)}{2}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty}\left((k+1)\ln(k+1) - k\ln k - \frac{1}{2}\ln k - \frac{1}{2}\ln(k+1) - 1\right) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty}\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)(\ln(k+1) - \ln k) - 1\right) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty}\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) - 1\right).
\end{aligned}$$

Die Taylorformel ergibt

$$\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = \frac{1}{k} - \frac{1}{2k^2} + \frac{1}{3k^3} + o\left(\frac{1}{k^3}\right) \text{ für } k\to\infty,$$

woraus folgt

$$\begin{aligned}
\left(k+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) - 1 &= \left(k+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{2k^2} + \frac{1}{3k^3} + o\left(\frac{1}{k^3}\right)\right) - 1 \\
&= \left(1 - \frac{1}{2k} + \frac{1}{3k^2}\right) + \left(\frac{1}{2k} - \frac{1}{4k^2}\right) - 1 + o\left(\frac{1}{k^2}\right) \\
&= \frac{1}{12k^2} + o\left(\frac{1}{k^2}\right) \\
&\sim \frac{1}{12k^2} \text{ as } k\to\infty.
\end{aligned}$$

Somit ist die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) - 1\right)$$

konvergent da sie äquivalent zur konvergenten Reihe $\sum\frac{1}{k^2}$ ist. Somit ist die Folge $\{a_n\}$ beschränkt und $\lim a_n$ ist endlich.

Folglich der Grenzwert (11.56) existiert und ist endlich. Es folgt, dass auch der Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n}{n!}$$

existiert und eine positive Zahl ist, sei $1/c$ wobei $c > 0$. Dann gilt

$$n! \sim c\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n. \tag{11.57}$$

Um c zu bestimmen, berechnen wir

$$\frac{(2^n n!)^2}{(2n)!} \sim \frac{\left(2^n c\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\right)^2}{c\sqrt{2n}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}} = \frac{c^2 2^{2n} n\, n^{2n} e^{-2n}}{c\sqrt{2n}\, 2^{2n} n^{2n} e^{-2n}} = c\sqrt{\frac{n}{2}}.$$

Andererseits es gilt nach dem Satz 11.19

$$\frac{(2^n n!)^2}{(2n)!} \sim \sqrt{\pi n},$$

woraus folgt

$$c\sqrt{\frac{n}{2}} \sim \sqrt{\pi n},$$

und somit $c = \sqrt{2\pi}$. Einsetzen c in (11.57) ergibt (11.55). ∎

Chapter 12

Konvergenz von Integralen

12.1 Uneigentliches Riemann-Integral

Um das Riemann-Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ definieren zu können, muss die Funktion f auf dem abgeschlossenen beschränkten Intervall $[a,b]$ definiert sein. In diesem Abschnitt wird diese Definition auf anderen Typen von Intervallen erweitert.

Definition. Sei f eine Funktion auf einem beliebigen Intervall J. Die Funktion f heißt *lokal integrierbar auf* J wenn f auf jedem abgeschlossen beschränkten Intervall $I \subset J$ Riemann-integrierbar ist.

Es folgt aus dem Satz 11.3, dass alle stetige Funktionen und alle monotone Funktionen auf J lokal integrierbar sind.

Definition. Sei f eine lokal integrierbare Funktion auf einem rechtsoffenen Intervall $[a,b)$ mit $-\infty < a < b \leq +\infty$. Dann definieren wir das *uneigentliche* Riemann-Integral von f mit

$$\int_a^{b-} f(x)\,dx := \lim_{c\to b-} \int_a^c f(x)\,dx, \tag{12.1}$$

vorausgesetzt, dass der Grenzwert existiert als Element von $\overline{\mathbb{R}}$. Die Notation $c \to b-$ bedeutet, dass $c < b$ und $c \to b$; insbesondere ist das Riemann-Integral $\int_a^c f(x)\,dx$ wohldefiniert.

Ist der Grenzwert in (12.1) endlich, so sagt man, dass das Integral $\int_a^{b-} f(x)\,dx$ an der Grenze b konvergiert.

Ist der Grenzwert unendlich, so sagt man, dass das Integral an der Grenze b bestimmt divergiert.

Existiert der Grenzwert nicht, so sagt man, dass das Integral an b unbestimmt divergiert. Im letzten Fall ist der Wert des Ausdrucks $\int_a^{b-} f(x)\,dx$ nicht definiert.

Die Grenze b für das uneigentliche Integral in (12.1) heißt *kritisch*.

Normalerweise benutzt man für uneigentliches Riemann-Integral die einfachere Notation

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{b-} f(x)\,dx.$$

Definition. Sei f eine lokal integrierbare Funktion auf einem linksoffenen Intervall $(a,b]$

mit $-\infty \leq a < b < +\infty$. Dann definieren wir das uneigentliche Riemann-Integral mit

$$\int_{a+}^{b} f(x)\,dx = \lim_{c \to a+} \int_{c}^{b} f(x)\,dx, \tag{12.2}$$

vorausgesetzt, dass der Grenzwert existiert. Die Notation $c \to a+$ bedeutet, dass $c > a$ und $c \to a$. Die Grenze a für das uneigentliche Integral (12.2) heißt kritisch.

Man definiert analog die Begriffe von Konvergenz, bestimmte Divergenz und unbestimmte Divergenz, und benutzt die einfachere Notation

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx = \int_{a+}^{b} f(x)\,dx.$$

Beispiel. 1. Betrachten wir das uneigentliche Integral $\int_0^1 \ln x\,dx$ wobei die kritische Grenze 0 ist. Es gilt für $c \in (0,1)$

$$\int_{c}^{1} \ln x\,dx = [x(\ln x - 1)]_c^1 = -1 - c(\ln c - 1) = -1 + c - c\ln c.$$

Da $c \ln c \to 0$ für $c \to 0$, so erhalten wir

$$\int_{0}^{1} \ln x\,dx = \lim_{c \to 0+} \int_{c}^{1} \ln x\,dx = -1.$$

Somit ist das Integral an der Grenze 0 konvergent.

2. Betrachten wir das uneigentliche Integral $\int_1^{+\infty} x^p dx$, wobei $p \in \mathbb{R}$ und die kritische Grenze $+\infty$ ist. Im Fall $p \neq -1$ haben wir für jedes $c \in (1, +\infty)$

$$\int_{1}^{c} x^p dx = \left[\int x^p dx\right]_1^c = \left[\frac{x^{p+1}}{p+1}\right]_1^c = \frac{c^{p+1}}{p+1} - \frac{1}{p+1}.$$

Im Fall $p > -1$ gilt $c^{p+1} \to +\infty$ für $c \to +\infty$, woraus folgt

$$\int_{1}^{+\infty} x^p dx = +\infty,$$

d.h. das Integral an $+\infty$ bestimmt divergent ist.

Im Fall $p < -1$ gilt $c^{p+1} \to 0$ für $c \to +\infty$, woraus folgt

$$\int_{1}^{+\infty} x^p dx = -\frac{1}{p+1},$$

d.h. das Integral an $+\infty$ konvergent ist.

Im Fall $p = -1$ haben wir

$$\int_{1}^{c} \frac{dx}{x} = [\ln x]_1^c = \ln c \to +\infty \text{ für } c \to +\infty,$$

woraus folgt

$$\int_{1}^{+\infty} x^{-1} dx = +\infty.$$

Somit ist das Integral $\int_1^{+\infty} x^p dx$ konvergent für $p < -1$ und bestimmt divergent für $p \geq -1$.

3. Betrachten wir das uneigentliche Integral $\int_0^{+\infty} \sin x\, dx$. Für jedes $1 < c < \infty$ gilt

$$\int_0^c \sin x\, dx = -\left[\cos x\right]_0^c = 1 - \cos c.$$

Aber der Grenzwert $\lim_{c\to\infty} \cos c$ existiert nicht. Somit beschließen wir, dass $\int_0^{+\infty} \sin x\, dx$ an $+\infty$ unbestimmt divergiert und keinen Wert hat.

Sei f eine Riemann-integrierbare Funktion f auf einem kompakten Intervall $[a,b]$. Dann gibt es drei Begriffe von dem Integral $\int_a^b f(x)\, dx$: eigentliches (normales) Riemann-Integral, das uneigentliche Integral mit der kritischen Grenze a und das uneigentliche Integral mit der kritischen Grenze b. Diese drei Werte von Integral stimmen überein wie es im nächsten Satz besagt wird.

Satz 12.1 *Sei f eine Riemann-integrierbare Funktion auf einem kompakten Intervall $[a,b]$. Dann ist f auf $[a,b]$ auch lokal integrierbar und es gelten die Identitäten*

$$\int_a^{b-} f(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx = \int_{a+}^b f(x)\, dx. \tag{12.3}$$

19.05.21 Vorlesung 10

Beweis. Nach dem Satz 11.8 ist f integrierbar auch auf den Intervallen $[a,c]$ und $[c,b]$ für jedes $c \in [a,b]$. Es folgt, dass f auf jedem Intervall $[c_1,c_2] \subset [a,b]$ integrierbar ist und somit auf $[a,b]$ lokal integrierbar ist.

Betrachten wir die Funktion

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$$

und zuerst zeigen, dass F auf $[a,b]$ stetig ist. Für beliebige $x, y \in [a,b]$ haben wir

$$F(x) - F(y) = \int_a^x f(t)\, dt - \int_a^y f(t)\, dt = \int_y^x f(t)\, dt.$$

Sei $x > y$. Dann erhalten wir nach der LM-Ungleichung:

$$|F(x) - F(y)| = \left|\int_y^x f(t)\, dt\right| \leq \int_y^x |f(t)|\, dt \leq M|x-y|$$

wobei

$$M = \sup_{[a,b]} f < \infty$$

(da f integrierbar auf $[a,b]$, so ist M endlich nach dem Korollar 11.2). Analog beweist man die Ungleichung

$$|F(x) - F(y)| \leq M|x-y|$$

im Fall $x < y$, woraus die Stetigkeit von F auf $[a,b]$ folgt.

Dann erhalten wir

$$\int_a^{b-} f(x)\,dx = \lim_{c\to b-}\int_a^c f(x)\,dx = \lim_{c\to b-} F(c) = F(b) = \int_a^b f(x)\,dx,$$

was die erste Identität in (12.3) beweist. Die zweite Identität lässt sich analog beweisen. ■

Die Eigenschaften von eigentlichem Integral lassen sich zum uneigentlichen Integral verallgemeinern. Erweitern wir die Notation $[F]_a^b$ zum Fall wenn F auf $[a,b)$ definiert ist wie folgt:

$$[F]_a^b = [F]_a^{b-} = F(b-) - F(a)\,, \tag{12.4}$$

wobei

$$F(b-) = \lim_{x\to b-} F(x)\,,$$

vorausgesetzt, dass der Limes existiert, endlich oder unendlich.

Ist F auf $(a,b]$ definiert, so setzen wir analog

$$[F]_a^b = [F]_{a+}^b = F(b) - F(a+)$$

wobei

$$F(a+) = \lim_{x\to a+} F(x)\,.$$

Satz 12.2 (Newton-Leibniz-Formel für uneigentliches Integral) *Sei $f(x)$ eine lokal integrierbare Funktion auf einem halboffenen Intervall $J=[a,b)$ oder $J=(a,b]$. Sei F eine Stammfunktion von f auf J. Dann gilt*

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F]_a^b\,,$$

vorausgesetzt, dass die rechte Seite wohldefiniert ist.

Beweis. Betrachten wir den Fall $J=[a,b)$. Nach Definition von dem uneigentlichen Integral und Newton-Leibniz-Formel für eigentliches Integral gilt

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &= \int_a^{b-} f(x)\,dx \\ &= \lim_{c\to b-}\int_a^c f(x)\,dx \\ &= \lim_{c\to b-}\left(F(c)-F(a)\right) \\ &= F(b-)-F(a) = [F]_a^b\,.\end{aligned}$$

Der Fall $J=(a,b]$ ist analog. ■

Satz 12.3 (Partielle Integration) *Seien u und v stetig differenzierbare Funktion auf einem Intervall $J=[a,b)$ oder $J=(a,b]$. Dann gilt*

$$\int_a^b u\,dv = [uv]_a^b - \int_a^b v\,du \tag{12.5}$$

vorausgesetzt, dass die rechte Seite wohldefiniert ist d.h. der Wert $[uv]_a^b$ und das uneigentliche Integral $\int_a^b v\,du$ existieren und deren Differenz wohldefiniert ist.

Beweis. Sei $J = [a, b)$. Für jedes $c \in (a, b)$ sind die Funktionen u, v auf $[a, c]$ stetig differenzierbar. Somit gilt es nach dem Satz 11.7

$$\int_a^c u dv = [uv]_a^c - \int_a^c v du.$$

Für $c \to b-$ erhalten wir (12.5). Der Fall $J = (a, b]$ ist analog. ■

Satz 12.4 (Substitutionsregel) *Sei f eine stetige Funktion auf einem Intervall I. Sei $u : J \to I$ eine stetig differenzierbare Funktion auf einem Intervall $J = [a, b)$. Nehmen wir an, dass der Wert $u(b-)$ existiert. Dann gilt*

$$\int_a^{b-} f(u(x))\, du(x) = \int_{u(a)}^{u(b-)} f(y)\, dy, \tag{12.6}$$

vorausgesetzt, dass mindestens eines von zwei Integralen wohldefiniert ist.

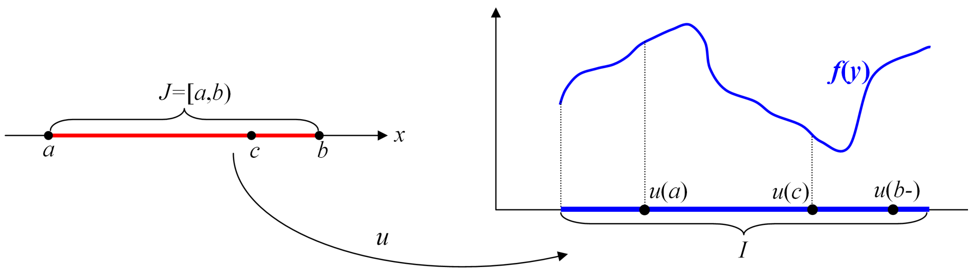
Im Fall $J = (a, b]$ gilt analog

$$\int_{a+}^{b} f(u(x))\, du(x) = \int_{u(a+)}^{u(b)} f(y)\, dy, \tag{12.7}$$

vorausgesetzt, dass $u(a+)$ und mindestens eines von zwei Integralen wohldefiniert ist.

Beweis. Sei $J = [a, b)$. Für jedes $c \in (a, b)$ haben wir $u(c) \in I$ und

$$\int_a^c f(u(x))\, du(x) = \int_{u(a)}^{u(c)} f(y)\, dy.$$



Es folgt, dass

$$\lim_{c \to b-} \int_a^c f(u(x))\, du(x) = \lim_{c \to b-} \int_{u(a)}^{u(c)} f(y)\, dy, \tag{12.8}$$

vorausgesetzt, dass mindestens einer von zwei Grenzwerten in $\overline{\mathbb{R}}$ existiert. Nach Definition des uneigentlichen Integrals gilt

$$\lim_{c \to b-} \int_a^c f(u(x))\, du(x) = \int_a^{b-} f(u(x))\, du(x).$$

Für $c \to b-$ erhalten wir $u(c) \to u(b-)$. Da $u(c) \in I$, so liegt $u(b-)$ im Abschluss von I. Liegt $u(b-)$ in I so gilt

$$\lim_{c \to b-} \int_{u(a)}^{u(c)} f(y)\, dy = \int_{u(a)}^{u(b-)} f(y)\, dy, \tag{12.9}$$

da das Integral $\int_{u(a)}^{t} f(y)\, dy$ stetig in $t \in I$ ist. Ist $u(b-)$ eine (linke oder rechte) Grenze von I, so gilt (12.9) nach der Definition des uneigentlichen Integrals. Somit folgt (12.6) aus (12.8).

Der Fall $J = (a, b]$ ist analog. ∎

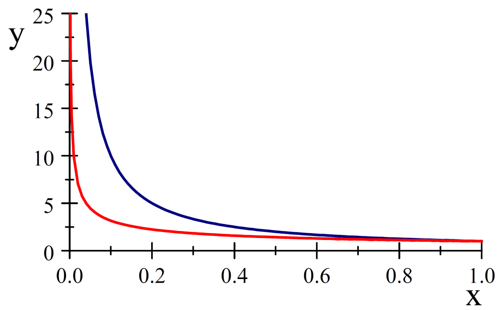
Analog formuliert und beweist man die weiteren Eigenschaften von Integral, wie Linearität und Monotonie.

Beispiel. 1. Bestimmen wir $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$. Hier ist 0 die kritische Grenze. Nach Newton-Leibniz-Formel erhalten wir

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \left[\int x^{-1/2} dx\right]_0^1 = \left[2x^{1/2}\right]_0^1 = 2.$$

Analog erhalten wir

$$\int_0^1 \frac{dx}{x} = \left[\int \frac{dx}{x}\right]_0^1 = [\ln x]_0^1 = \ln 1 - \ln(0+) = +\infty.$$

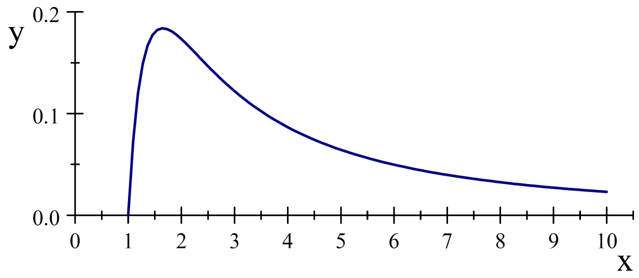


Funktionen $\frac{1}{x}$ und $\frac{1}{\sqrt{x}}$

2. Bestimmen $\int_1^{+\infty} x^{-2} \ln x\, dx$, wo die kritische Grenze $+\infty$ ist. Wir erhalten mit Hilfe von der partiellen Integration

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} x^{-2} \ln x\, dx &= -\int_1^{+\infty} \ln x\, d\frac{1}{x} = -\left[\frac{1}{x} \ln x\right]_1^{+\infty} + \int_1^{+\infty} \frac{1}{x} d \ln x \\ &= \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = \left[\int x^{-2} dx\right]_1^{+\infty} = -\left[x^{-1}\right]_1^{+\infty} = -(0-1) = 1, \end{aligned}$$

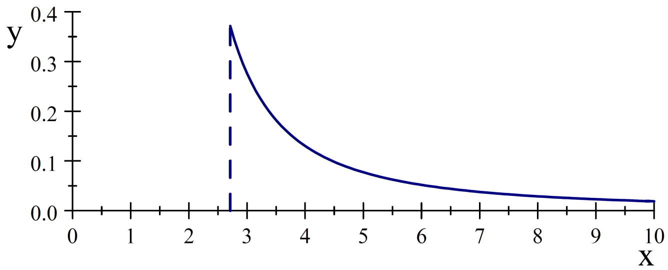
wo wir benutzt haben, das $\frac{\ln x}{x} \to 0$ für $x \to +\infty$.



Funktion $x^{-2} \ln x$ auf $[1, +\infty)$

3. Bestimmen wir $\int_e^{+\infty} \frac{1}{x \ln^2 x} dx$ mit der kritischen Grenze $+\infty$. Mit Hilfe von Substitution $y = u(x) = \ln x$ erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_e^{+\infty} \frac{1}{x \ln^2 x} dx &= \int_e^{+\infty} \frac{d \ln x}{\ln^2 x} \\ &= \int_{u(e)}^{u(+\infty)} \frac{dy}{y^2} = \left[\int y^{-2} dy \right]_1^{+\infty} = - \left[y^{-1} \right]_1^{+\infty} = 1. \end{aligned}$$



Funktion $\frac{1}{x \ln^2 x}$ auf $[e, +\infty)$

Satz 12.5 (Additivität) *Sei f eine lokal integrierbare Funktion auf einem Intervall $J = [a, b)$ oder $J = (a, b]$. Für jedes $c \in (a, b)$ gilt die Identität*

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx,$$

vorausgesetzt, dass der Ausdruck mindestens von einer Seite wohldefiniert ist.

Beweis. Sei $J = [a, b)$. Für alle $a < c < c' < b$ ist f auf $[a, c]$ und $[a, c']$ integrierbar. Es gilt nach dem Satz 11.8 die Identität

$$\int_a^{c'} f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^{c'} f(x)\, dx.$$

Für $c' \to b-$ erhalten wir

$$\int_a^{b-} f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^{b-} f(x)\, dx,$$

was zu beweisen war. Der Fall $J = (a, b]$ ist analog. ■

Betrachten wir jetzt uneigentliches Integral mit den beiden kritischen Grenzen.

Definition. Sei f eine lokal integrierbare Funktion auf einem offenen Intervall (a, b) mit $-\infty \leq a < b \leq +\infty$. Definieren wir das uneigentliche Integral mit zwei kritischen Grenzen a, b wie folgt:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{a+}^{b-} f(x)\,dx := \int_{a+}^{c} f(x)\,dx + \int_c^{b-} f(x)\,dx, \tag{12.10}$$

wobei $c \in (a, b)$, vorausgesetzt, dass die beiden Integrale in der rechten Seite existieren als uneigentliche Integrale und deren Summe auch wohldefiniert ist.

Behauptung. *Der Wert von $\int_a^b f(x)\,dx$ in (12.10) ist unabhängig von der Wahl von $c \in (a, b)$.*

Beweis. Sei c' noch ein Punkt in (a, b), z.B. $c' > c$. Nach dem Satz 12.5 gilt

$$\begin{aligned}\int_a^{c'} f dx + \int_{c'}^b f dx &= \left(\int_a^c f dx + \int_c^{c'} f dx\right) + \left(\int_c^b f dx - \int_c^{c'} f dx\right) \\ &= \int_a^c f dx + \int_c^b f dx,\end{aligned}$$

was zu beweisen war. ■

Alle Eigenschaften von uneigentlichen Integralen gelten auch für den Fall von zwei kritischen Grenzen. In diesem Fall wird die Notation $[F]_a^b$ noch weiter verallgemeinert wie folgt:

$$[F]_a^b = [F]_{a+}^{b-} = F(b-) - F(a+), \tag{12.11}$$

vorausgesetzt, dass die beiden Werte $F(b-)$ und $F(a+)$ existiert und deren Differenz auch wohldefiniert ist. Bemerken wir, dass $[F]_a^b$ nicht definiert ist falls die rechte Seite von (12.11) ein unbestimmter Ausdruck der Form $\infty - \infty$ ist.

Zum Beispiel, beweisen wir die Newton-Leibniz-Formel in diesem Fall.

Satz 12.6 (Newton-Leibniz-Formel für uneigentliches Integral mit zwei kritischen Grenzen) *Seien $f(x)$ eine lokal integrierbare Funktion auf (a, b) mit $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ und F eine Stammfunktion von f auf (a, b). Dann gilt*

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F]_a^b\,,$$

vorausgesetzt, dass die rechte Seite wohldefiniert ist.

Beweis. Es folgt aus der Definition (12.10) und dem Satz 12.2, dass für $c \in (a, b)$

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &= \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \\ &= (F(c) - F(a+)) + (F(b-) - F(c)) \\ &= F(b-) - F(a+)\,,\end{aligned}$$

was zu beweisen war. ■

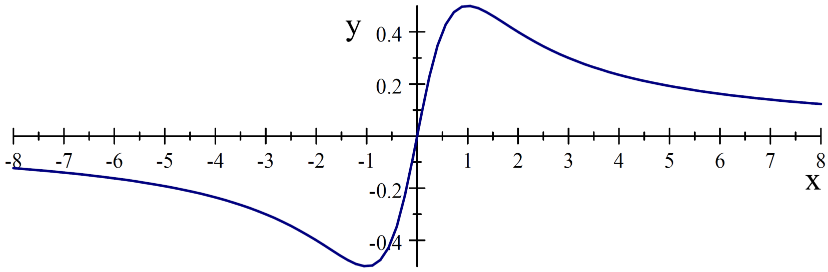
Beispiel. 1. Betrachten wir $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2} dx$, wobei die beiden Grenzen $\pm\infty$ kritisch sind. Da

$$\int \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{d\left(1+x^2\right)}{1+x^2} = \frac{1}{2} \ln\left(1+x^2\right) + C,$$

so erhalten wir nach der Newton-Leibniz-Formel

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\,dx}{1+x^2} = \frac{1}{2} \left[\ln\left(1+x^2\right)\right]_{-\infty}^{+\infty} = +\infty - (+\infty),$$

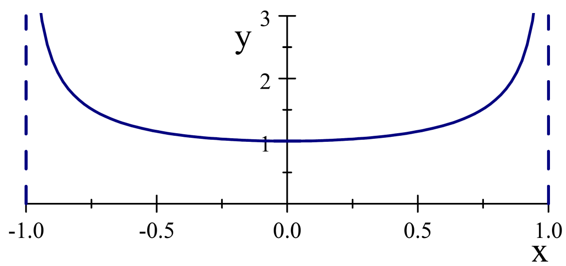
was unbestimmter Ausdruck ist. Somit ist das Integral nicht wohldefiniert.



Funktion $\frac{x}{1+x^2}$

2. Bestimmen wir $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$. Die Funktion $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ist stetig auf $(-1, 1)$ aber nicht an ± 1 definiert, so dass die beiden Grenzen ± 1 kritisch sind. Nach de Newton-Leibniz-Formel erhalten wir

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \left[\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\right]_{-1}^{1} = [\arcsin x]_{-1}^{1} = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi.$$



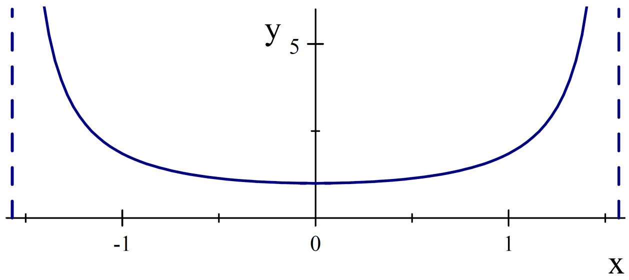
Funktion $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

3. Bestimmen wir $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{dx}{\cos x}$. Die Funktion $\frac{1}{\cos x}$ ist stetig auf $(-\pi/2, \pi/2)$ aber nicht an $\pm\pi/2$ definiert, so dass die beiden Grenzen $\pm\pi/2$ kritisch sind. Nach Aufgabe 34 gilt

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right) + C,$$

woraus folgt

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{dx}{\cos x} = \left[\frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right)\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{1}{2}\left(\ln(+\infty) - \ln 0\right) = \frac{1}{2}\left(+\infty - (-\infty)\right) = +\infty.$$



Funktion $\frac{1}{\cos x}$ auf $(-\pi/2, \pi/2)$

21.05.21 **Vorlesung 11**

12.2 Konvergenzkriterien von uneigentlichen Integralen

Wir fangen mit der folgenden Beobachtung an.

Satz 12.7 *Sei f eine nichtnegative lokal integrierbare Funktion auf einem Intervall (a, b) mit $-\infty \leq a < b \leq +\infty$. Dann ist das uneigentliche Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ entweder konvergent oder bestimmt divergent, und es gilt*

$$\int_a^b f(x)\,dx \in [0, +\infty].$$

In anderen Wörter, es gibt nur zwei Möglichkeiten:

1. entweder das Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ konvergiert und $\int_a^b f(x)\,dx \in [0, +\infty)$;

2. oder das Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ bestimmt divergiert und $\int_a^b f(x)\,dx = +\infty$.

Der Satz 12.7 ähnelt die folgende Eigenschaft von den Reihen (Satz 5.1): für jede nichtnegative Folge $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ entweder konvergent oder bestimmt divergent, und ihre Summe liegt in $[0, +\infty]$.

Beweis. Fixieren wir ein $c \in (a, b)$ und betrachten die Funktion

$$F(x) = \int_c^x f(t)\,dt, \quad x \in (a, b).$$

Die Funktion $F(x)$ ist monoton steigend, da $f \geq 0$ und für alle $y > x$ aus (a, b) gilt

$$F(y) - F(x) = \int_c^y f(t)\,dt - \int_c^x f(t)\,dt = \int_x^y f(t)\,dt \geq 0.$$

Somit existieren die Grenzwerte

$$F(b-) = \lim_{x \to b-} F(x) = \lim_{x \to b-} \int_c^x f(t)\,dt$$

und

$$F(a+) = \lim_{x \to a+} F(x) = \lim_{x \to a+} \int_c^x f(t)\,dt.$$

Bemerken wir, dass $F(b-) \in [0, +\infty]$ da $F(b-) \geq F(c) = 0$ und analog $F(a+) \in [-\infty, 0]$. Folglich ist die Differenz

$$F(b-) - F(a+)$$

wohldefiniert und hat einen Wert in $[0, +\infty]$. Es gilt nach Definition der uneigentlichen Integrale, dass

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(t)\,dt &= \int_{a+}^{b-} f(t)\,dt \\
&= \int_{a+}^{c} f(t)\,dt + \int_c^{b-} f(t)\,dt \\
&= \lim_{x \to a+} \int_x^c f(t)\,dt + \lim_{x \to b-} \int_c^x f(t)\,dt \\
&= F(b-) - F(a+) \in [0, +\infty]\,.
\end{aligned} \tag{12.12}$$

■

Der folgende Satz etabliert eine direkte Beziehung zwischen Konvergenz von Reihen und Integralen.

Satz 12.8 (Integralkriterium für Konvergenz von Reihen) *Sei $f(x)$ eine nichtnegative monoton fallende Funktion auf $[m, +\infty)$, wobei $m \in \mathbb{Z}$. Dann gilt die Äquivalenz*

$$\int_m^{+\infty} f(x)\,dx < \infty \iff \sum_{k=m}^{\infty} f(k) < \infty. \tag{12.13}$$

Beweis. Da f nichtnegativ und lokal integrierbar ist, so existieren $\int_m^{+\infty} f(x)\,dx$ und $\sum_{k=m}^{\infty} f(k)$ als Elemente von $[0, +\infty]$. Wir beweisen, dass die beiden Werte gleichzeitig entweder endlich oder unendlich sind.

Fixieren wir ein $n > m$ und betrachten die folgende Zerlegung des Integrals $[m, n]$:

$$Z = \{m, m+1, ..., n\} = \{k\}_{k=m}^{n}\,.$$

Da $f(x)$ monoton fallend ist, so gilt auf jedem Intervall $[k-1, k] \subset [m, n]$

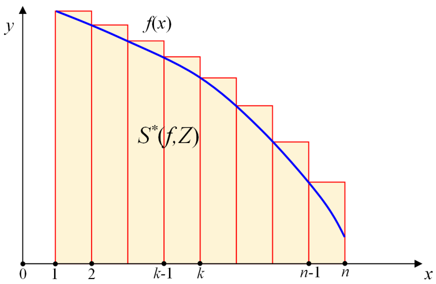
$$\sup_{[k-1,k]} f = f(k-1) \text{ und } \inf_{[k-1,k]} f = f(k)\,.$$

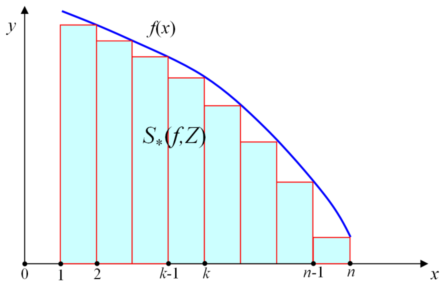
Bestimmen wir die Darboux-Summen dieser Zerlegung:

$$S_*(f, Z) = \sum_{k=m+1}^{n} (\inf_{[k-1,k]} f)(k - (k-1)) = \sum_{k=m+1}^{n} f(k) = f(m+1) + ... + f(n)$$

und

$$S^*(f, Z) = \sum_{k=m+1}^{n} (\sup_{[k-1,k]} f)(k - (k-1)) = \sum_{k=m+1}^{n} f(k-1) = \sum_{l=m}^{n-1} f(l) = f(m) + ... + f(n-1)$$





Da nach dem Satz 11.1 immer gilt

$$S_*(f,Z) \leq \int_m^n f(x)\,dx \leq S^*(f,Z),$$

so erhalten wir

$$\sum_{k=m+1}^{n} f(k) \leq \int_m^n f(x)\,dx \leq \sum_{k=m}^{n-1} f(k) \tag{12.14}$$

Für $n \to \infty$ ergeben diese Ungleichungen, dass

$$\sum_{k=m+1}^{\infty} f(k) \leq \int_m^\infty f(x)\,dx \leq \sum_{k=m}^{\infty} f(k). \tag{12.15}$$

Gilt $\sum_{k=m}^{\infty} f(k) < \infty$ so folgt es aus der rechten Seite von (12.15) dass auch $\int_m^\infty f(x)\,dx < \infty$. Gilt $\int_m^\infty f(x)\,dx < \infty$ so ergibt die linke Seite von (12.15) dass $\sum_{k=m+1}^{\infty} f(k) < \infty$ und somit auch $\sum_{k=m}^{\infty} f(k) < \infty$, woraus for Äquivalenz (12.13) folgt. $\blacksquare$

Beispiel. Untersuchen wir die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ wobei $p \in \mathbb{R}$. Im Fall $p \leq 0$ konvergiert die Folge $\left\{\frac{1}{n^p}\right\}$ gegen 0 nicht, und somit ist die Reihe divergent. Sei $p > 0$. Die Funktion $f(x) = \frac{1}{x^p}$ ist dann monoton fallend auf $[1, +\infty)$. Nach dem Satz 12.8 gilt die Äquivalenz

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} < \infty \iff \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} < \infty. \tag{12.16}$$

Wir haben früher schon gesehen, dass das Integral in (12.16) genau dann konvergiert wenn $p > 1$. Es folgt, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ genau dann konvergiert wenn $p > 1$.

Definition. Sei f eine lokal integrierbare Funktion auf (a, b). Das uneigentliche Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ heißt *absolut konvergent* wenn $\int_a^b |f(x)|\,dx$ konvergent ist, d.h. wenn

$$\int_a^b |f(x)|\,dx < +\infty.$$

Bemerkung. Nach der Aufgabe 52, ist f auf einem Intervall $[\alpha, \beta]$ integrierbar, so ist $|f|$ auch auf $[\alpha, \beta]$ integrierbar und es gilt

$$\left|\int_\alpha^\beta f(x)\,dx\right| \leq \int_\alpha^\beta |f(x)|\,dx \tag{12.17}$$

(für stetige Funktionen wurde (12.17) in Korollar 11.11 bewiesen). Es folgt daraus, dass für jede lokal integrierbare Funktion f auf (a,b) auch $|f|$ lokal integrierbar ist. Da $|f| \geq 0$, so existiert das Integral $\int_a^b |f(x)|\,dx$ nach dem Satz 12.7.

Satz 12.9 *Sei f eine lokal integrierbare Funktion auf (a,b). Ist das Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ absolut konvergent, so ist es auch konvergent und es gilt*

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx. \tag{12.18}$$

Beweis. Wählen wir ein $c \in (a,b)$ und setzen für alle $x \in (a,b)$

$$F(x) = \int_c^x f(t)\,dt \quad \text{und} \quad G(x) = \int_c^x |f(t)|\,dt.$$

Da $|f| \geq 0$, so ist $G(x)$ monoton steigend, die beiden Grenzwerte $G(a+)$ und $G(b-)$ existieren und es gilt

$$\int_a^b |f(t)|\,dt = G(b-) - G(a+) \tag{12.19}$$

(siehe (12.12) im Beweis des Satzes 12.7). Da $\int_a^b |f(t)|\,dt$ konvergent ist, so sind die Werte $G(b-)$ und $G(a+)$ endlich.

Beweisen wir dass auch der Grenzwert $F(b-) = \lim_{x\to b-} F(x)$ existiert und endlich ist. Es reicht folgendes zu zeigen: für jede Folge $x_n \to b-$ ist die Folge $\{F(x_n)\}$ konvergent[1]. Dafür zeigen wir, dass $\{F(x_n)\}$ eine Cauchy-Folge ist. In der Tat für $x_n > x_m$ erhalten wir

$$\begin{aligned} |F(x_n) - F(x_m)| &= \left|\int_c^{x_n} f(t)\,dt - \int_c^{x_m} f(t)\,dt\right| \\ &= \left|\int_{x_m}^{x_n} f(t)\,dt\right| \\ &\leq \int_{x_m}^{x_n} |f(t)|\,dt = G(x_n) - G(x_m), \end{aligned} \tag{12.20}$$

wo wir (12.17) benutzt haben. Im Fall $x_n \leq x_m$ erhalten wir eine ähnliche Ungleichung

$$|F(x_n) - F(x_m)| \leq G(x_m) - G(x_n),$$

woraus folgt, dass in den beiden Fällen

$$|F(x_n) - F(x_m)| \leq |G(x_n) - G(x_m)|.$$

[1] Der Satz 7.1 aus Analysis 1 besagt: gilt $F(x_n) \to \alpha$ für jede Folge $x_n \to b-$ so gilt auch $F(x) \to \alpha$ für $x \to b-$. Wenn die Folge $\{F(x_n)\}$ konvergent für alle Folgen $x_n \to b-$ ist, so stimmen alle Grenzwerte $\lim F(x_n)$ überein, so dass d.o.g. Satz verwendbar ist und die Existenz von $\lim_{x\to b-} F(x)$ ergibt. In der Tat, gilt $\lim F(x_n) \neq \lim F(y_n)$ für zwei Folgen $x_n \to b-$ und $y_n \to b-$ so hat die Folge $F(z_n)$ für die gemischte Folge

$$z_n = \begin{cases} x_n, n \text{ gerade} \\ y_n, n \text{ ungerade} \end{cases}$$

keinen Grenzwert, obwohl $z_n \to b-$.

Da $G(x_n) - G(x_m) \to 0$ für $n, m \to \infty$, so folgt es $|F(x_n) - F(x_m)| \to 0$. Somit gibt es einen endlichen Grenzwert $F(b-)$. Gleiches gilt für $F(a+)$, woraus folgt

$$\begin{aligned} \int_a^b f(t)\,dt &= \int_{a+}^c f(t)\,dt + \int_c^{b-} f(t)\,dt \\ &= \int_c^{b-} f(t)\,dt - \int_c^{a+} f(t)\,dt \\ &= F(b-) - F(a+), \end{aligned} \tag{12.21}$$

so dass das uneigentliches Integral $\int_a^b f(t)\,dt$ konvergiert.

Um die Ungleichung (12.18) zu beweisen, bemerken wir, dass nach (12.20) für alle $a < x < y < b$ gilt

$$|F(y) - F(x)| \leq G(y) - G(x),$$

woraus folgt für $x \to a+$ und $y \to b-$, dass

$$|F(b-) - F(a+)| \leq G(b-) - G(a+).$$

Einsetzen in (12.19) und (12.21) ergibt (12.18). ■

Definition. Seien $f(x)$ und $g(x)$ zwei Funktionen auf (a, b), die auf (a, b) nicht verschwinden. Man sagt, dass $f(x)$ äquivalent zu $g(x)$ für $x \to b-$ ist und schreibt

$$f(x) \sim g(x) \text{ für } x \to b-,$$

wenn

$$\frac{f(x)}{g(x)} \to 1 \text{ für } x \to b-.$$

Analog definiert man die Äquivalenz

$$f(x) \sim g(x) \text{ für } x \to a+$$

die genau dann gilt wenn

$$\frac{f(x)}{g(x)} \to 1 \text{ für } x \to a+.$$

Zum Beispiel, es gilt $\sin x \sim x$ für $x \to 0+$ (und $x \to 0-$) da $\frac{\sin x}{x} \to 1$.

Lemma 12.10 *(a) Die Relation $f \sim g$ für $x \to b-$ ist eine Äquivalenzrelation.*

(b) Gelten $f_1 \sim g_1$ und $f_2 \sim g_2$ für $x \to b-$ so gelten auch $f_1 f_2 \sim g_1 g_2$ und $\frac{f_1}{f_2} \sim \frac{g_1}{g_2}$ für $x \to b-$.

(c) Die Äquivalenz $f \sim g$ gilt genau dann wenn $f(x) = g(x) + o(g(x))$ für $x \to b-$.

Beweis. (a) Nach Definition, soll eine Äquivalenzrelation reflexiv, symmetrisch und transitiv sein.

1. (Reflexivität) Es gilt $f \sim f$ da $\frac{f}{f} = 1 \to 1$.

2. (Symmetrie) $f \sim g$ impliziert $g \sim f$ da

$$\frac{g}{f} = \frac{1}{f/g} \to \frac{1}{1} = 1 \text{ für } x \to b- .$$

3. (Transitivität) $f \sim g$ und $g \sim h$ ergeben $f \sim h$, da

$$\frac{f}{h} = \frac{f}{g}\frac{g}{h} \to 1 \cdot 1 = 1 \text{ für } x \to b- .$$

(b) Die Äquivalenz $f_1 f_2 \sim g_1 g_2$ folgt aus

$$\frac{f_1 f_2}{g_1 g_2} = \frac{f_1}{g_1}\frac{f_2}{g_2} \to 1 \cdot 1 = 1 \text{ für } x \to b-$$

und $\frac{f_1}{f_2} \sim \frac{g_1}{g_2}$ folgt aus

$$\frac{f_1}{f_2} \Big/ \frac{g_1}{g_2} = \frac{f_1}{g_1}\frac{g_2}{f_2} \to 1 \text{ für } x \to b- .$$

(c) Wir haben

$$\frac{f}{g} = \frac{f-g}{g} + 1,$$

woraus folgt, dass $\frac{f}{g} \to 1$ genau dann gilt wenn $\frac{f-g}{g} \to 0$, d.h. $f - g = o(g)$ und $f = g + o(g)$. ∎

Beispiel. 1. Es gilt

$$x^2 + x \sim x^2 \quad \text{für } x \to +\infty$$

da

$$\frac{x^2 + x}{x^2} = 1 + \frac{1}{x} \to 1 \text{ für } x \to +\infty.$$

Andererseits, wir haben

$$x^2 + x \sim x \quad \text{für } x \to 0$$

da

$$\frac{x^2 + x}{x} = x + 1 \to 1 \quad \text{für } x \to 0.$$

2. Es gilt

$$\ln(1 + x) \sim x \text{ für } x \to 0$$

da nach der Taylorformel

$$\ln(1 + x) = x + o(x) .$$

Es folgt, dass für $x \to 0$

$$\left(x^2 + x\right) \ln(1 + x) \sim x \cdot x = x^2.$$

26.05.21 Vorlesung 12

Definieren wir das Landau-Symbol O.

Definition. Seien f, g zwei Funktionen auf (a, b) und $g(x) > 0$. Man schreibt

$$f(x) = O(g(x)) \text{ für } x \to b-$$

und sagt "$f(x)$ ist groß O von $g(x)$ für $x \to b-$" wenn es ein $c \in (a, b)$ und ein $C > 0$ gibt mit

$$|f(x)| \leq C g(x) \quad \text{für alle } x \in (c, b).$$

Äquivalente Definition:

$$f(x) = O(g(x)) \text{ für } x \to b \iff \limsup_{x \to b-} \frac{|f(x)|}{g(x)} < +\infty$$

Die Äquivalenz $f \sim g$ impliziert offensichtlich $f = O(g)$.

Beispiel. Wir haben

$$x^2 \cos x + x\sqrt{x} = O\left(x^2\right) \quad \text{für } x \to +\infty,$$

da für $x > 1$

$$\frac{|x^2 \cos x + x\sqrt{x}|}{x^2} \leq |\cos x| + \frac{1}{\sqrt{x}} \leq 2.$$

Satz 12.11 *Seien $f(x)$ und $g(x)$ lokal integrierbare Funktionen auf $[a, b)$. Sei g positiv auch diesem Intervall.*

(a) (Majorantenkriterium) *Nehmen wir an, dass*

$$f(x) = O(g(x)) \textit{ für } x \to b- \tag{12.22}$$

und

$$\int_a^b g(x)\, dx < \infty.$$

Dann ist das Integral $\int_a^b f(x)\, dx$ absolut konvergent.

(b) (Vergleichskriterium) *Sei auch f positiv. Gilt*

$$f(x) \sim g(x) \textit{ für } x \to b-$$

so sind die Integrale $\int_a^b f(x)\, dx$ und $\int_a^b g(x)\, dx$ gleichzeitig konvergent oder bestimmt divergent.

Die Funktion g aus der Bedingung (12.22) heißt eine *Majorante* von f. Die ähnliche Aussage gilt für Funktionen auf $(a, b]$.

Beweis. (a) Da $f(x) = O(g(x))$ für $x \to b$, so existieren $C > 0$ and $c \in (a, b)$ mit

$$|f(x)| \leq C g(x) \quad \text{für alle } c \leq x < b. \tag{12.23}$$

Wir haben
$$\int_a^b |f(x)|\,dx = \int_a^c |f(x)|\,dx + \int_c^b |f(x)|\,dx.$$
Die Funktion f ist auf $[a,c]$ integrierbar, so dass das Integral $\int_a^c |f(x)|\,dx$ eigentlich ist. Nach (12.23) schätzen wir das zweite Integral wie folgt ab:
$$\int_c^b |f(x)|\,dx \le C\int_c^b g(x)\,dx < +\infty.$$
Daraus folgt $\int_a^b |f(x)|\,dx < \infty$ d.h. das Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ absolut konvergent ist.

(b) Da f und g positiv sind, so ist jedes Integral $\int_a^b f(x)\,dx$, $\int_a^b g(x)\,dx$ konvergent oder bestimmt divergent. Die Relation $f(x) \sim g(x)$ ergibt $f(x) = O(g(x))$ und somit nach (a)
$$\int_a^b g(x)\,dx < +\infty \implies \int_a^b f(x)\,dx < +\infty.$$
Die umgekehrte Implikation folgt analog aus $g(x) \sim f(x)$. ∎

Beispiel. 1. Untersuchen wir die Konvergenz von
$$\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{1+x^4}}$$
an der kritischen Grenze $+\infty$. Wir haben
$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+x^4}} = \frac{\sqrt{x}}{x^2\sqrt{x^{-4}+1}} \sim \frac{\sqrt{x}}{x^2} = x^{-3/2} \text{ für } x \to +\infty,$$
d.h. $f(x) \sim x^{-3/2}$ für $x \to +\infty$. Da
$$\int_1^{+\infty} x^{-3/2}dx < +\infty,$$
so beschließen wir nach dem Satz 12.11, dass auch
$$\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{1+x^4}} < +\infty.$$

2. Untersuchen wir die Konvergenz von $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2}dx$. Da $|\sin x| \le 1$ und somit
$$\frac{\sin x}{x^2} = O\left(x^{-2}\right) \text{ für } x \to +\infty,$$
und $\int_1^{\infty} x^{-2}dx < +\infty$, so ist das Integral $\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x^2}dx$ absolut konvergent.

3. Untersuchen wir die Konvergenz von
$$\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{\cos x - \cos a}} \tag{12.24}$$
wobei $0 < a < \pi/2$. Die kritische Grenze ist a wo der Nenner verschwindet. Nach der Differenzierbarkeit von $\cos x$ gilt es für $x \to a$
$$\cos x - \cos a = -(\sin a)(x-a) + o(x-a) \sim (\sin a)(a-x),$$

(siehe (9.2)), woraus folgt

$$\sqrt{\cos x - \cos a} \sim \sqrt{(\sin a)(a - x)} \quad \text{für } x \to a$$

und somit

$$\frac{1}{\sqrt{\cos x - \cos a}} \sim \frac{1}{\sqrt{\sin a}\sqrt{a - x}} \quad \text{für } x \to a$$

Mit Hilfe von Substitution $y = a - x$ erhalten wir

$$\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a - x}} = -\int_a^0 \frac{dy}{\sqrt{y}} = \int_0^a \frac{dy}{\sqrt{y}} = [2\sqrt{y}]_0^a = 2\sqrt{a} < \infty,$$

woraus folgt, dass das Integral (12.24) absolut konvergent ist.

12.3 Bedingte Konvergenz

Definition. Sei f eine lokal integrierbare Funktion auf einem Intervall (a, b). Das uneigentliche Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ heißt *bedingt konvergent* falls es konvergent aber nicht absolut konvergent ist.

Der nächste Satz liefert zwei Kriterien für Konvergenz ohne absolute Konvergenz zu benutzen.

Satz 12.12 *Seien f und g stetige Funktionen auf $[a, +\infty)$. Sei $g(x)$ zusätzlich stetig differenzierbar und monoton auf $[a, +\infty)$. Dann das Integral*

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,g(x)\,dx \tag{12.25}$$

konvergiert falls eine von den folgenden zwei Bedingungen erfüllt ist:

(a) (Abel-Kriterium) *Das Integral $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ ist konvergent und $g(x)$ ist beschränkt.*

(b) (Dirichlet-Kriterium) *Die Stammfunktion $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ ist auf $[a, +\infty)$ beschränkt und $g(x) \to 0$ für $x \to +\infty$.*

Beweis. Partielle Integration ergibt

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,g(x)\,dx = \int_a^{+\infty} g(x)\,dF(x) = [Fg]_a^{+\infty} - \int_a^{+\infty} F(x)\,g'(x)\,dx. \tag{12.26}$$

Wir zeigen, dass die beiden Glieder am rechts endlich sind, woraus die Konvergenz von dem Integral (12.25) folgen wird.

Zunächst beweisen wir, dass der Wert des Ausdrucks $[Fg]_a^{+\infty}$ endlich ist, d.h. $Fg(+\infty)$ endlich ist. Im Fall (a) ergibt die Konvergenz von $\int_a^{+\infty} f dx$, dass $F(x)$ konvergent für $x \to +\infty$ ist, während $g(x)$ auch konvergent für $x \to +\infty$ ist, da g monoton und beschränkt ist. Es folgt, dass der Grenzwert

$$Fg(+\infty) = \lim_{x\to+\infty} F(x) \lim_{x\to+\infty} g(x)$$

existiert und endlich ist.

Im Fall (b) ist $F(x)$ beschränkt und $g(x) \to 0$ für $x \to +\infty$, woraus folgt

$$Fg(+\infty) = \lim_{x \to +\infty} (Fg)(x) = 0. \tag{12.27}$$

Jetzt beweisen wir, dass das Integral $\int_a^\infty F(x) g'(x) \, dx$ absolut konvergent ist. Die Funktion F ist in den beiden Fällen (a) und (b) beschränkt. Im Fall (b) ist es eine Voraussetzung, während im Fall (a) folgt es aus der Konvergenz von $F(x)$ für $x \to +\infty$. Sei C eine obere Schranke von $|F|$, d.h. $|F(x)| \leq C$ für alle $x \in [a, \infty)$. Dann gilt

$$\int_a^\infty |F(x) g'(x)| \, dx \leq C \int_a^\infty |g'(x)| \, dx. \tag{12.28}$$

Die Funktion g ist monoton, woraus folgt, dass entweder immer $g'(x) \geq 0$ oder immer $g'(x) \leq 0$ ist. Angenommen, dass $g'(x) \geq 0$ (der Fall $g'(x) \leq 0$ ist dann analog), so erhalten wir

$$\int_a^\infty |g'(x)| \, dx = \int_a^\infty g'(x) \, dx = g(+\infty) - g(a) < \infty. \tag{12.29}$$

Somit erhalten wir, dass

$$\int_a^\infty |F(x) g'(x)| \, dx < \infty,$$

was zu beweisen war. ■

Bemerkung. Im Fall (b) folgt es aus (12.27), (12.26), (12.28) und (12.29) dass

$$\left| \int_a^{+\infty} f(x) g(x) \, dx \right| \leq \sup_{[a,\infty)} |F| \, |g(a)|. \tag{12.30}$$

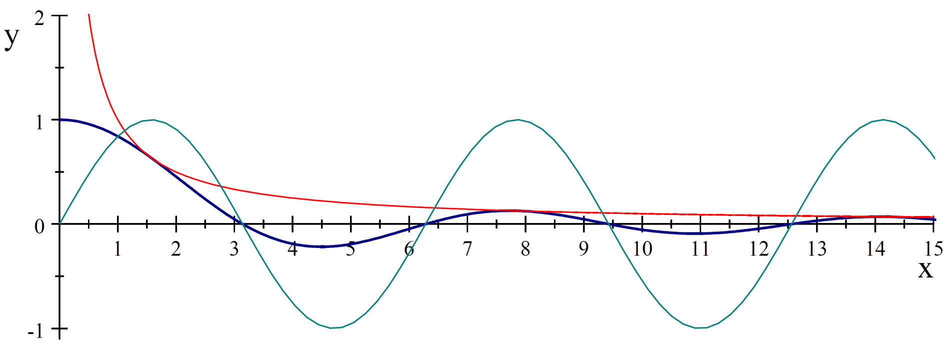
Beispiel. 1. Zeigen wir, dass das Integral

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x} dx$$

konvergent ist. Dafür betrachten wir die Funktionen $f(x) = \sin x$ und $g(x) = x^{-1}$. Die Stammfunktion

$$F(x) = \int_a^x f(t) \, dt = \int_a^x \sin t \, dt = -\cos x + \cos a$$

ist offensichtlich beschränkt, während $g(x)$ monoton fallend ist und $g(x) \to 0$ für $x \to +\infty$. Nach dem Dirichlet-Kriterium ist das Integral $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ konvergent.



Die Funktionen $\sin x$, $\frac{1}{x}$ und $\frac{\sin x}{x}$

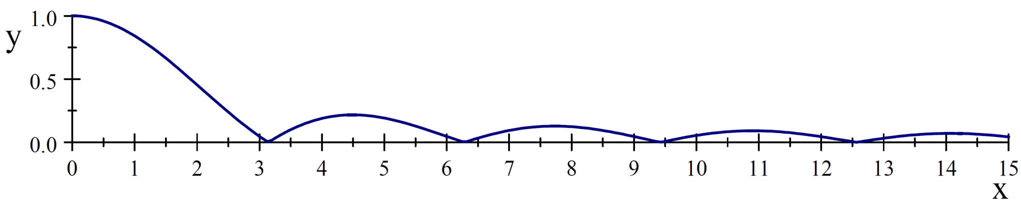
Das Integral $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ heißt *Dirichlet-Integral*. Es ist auch konvergent, da die Funktion $\frac{\sin x}{x}$ den Grenzwert 1 für $x \to 0$ hat und somit ist auf $[0,1]$ stetig und integrierbar. Es ist möglich zu beweisen, dass

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

(siehe Abschnitt 12.5 unterhalb).

Zeigen wir, dass $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}$ bedingt konvergent ist, d.h.

$$\int_1^\infty \frac{|\sin x|}{x} dx = +\infty. \tag{12.31}$$



Die Funktion $\frac{|\sin x|}{x}$

Die Nullstellen von $\sin x$ auf $[1, \infty)$ sind $x_n = \pi n$ für $n \in \mathbb{N}$. Wir haben

$$\begin{aligned} \int_{x_n}^{x_{n+1}} \frac{|\sin x|}{x} dx &\geq \frac{1}{x_{n+1}} \int_{x_n}^{x_{n+1}} |\sin x| \, dx \\ &\geq \frac{1}{x_{n+1}} \left| \int_{x_n}^{x_{n+1}} \sin x \, dx \right| \\ &= \frac{1}{x_{n+1}} \left| [-\cos x]_{x_n}^{x_{n+1}} \right| \\ &= \frac{2}{\pi (n+1)}, \end{aligned}$$

wobei wir benutzt haben dass

$$\cos x_n = \cos \pi n = (-1)^n$$

und somit

$$|\cos x_{n+1} - \cos x_n| = 2.$$

Es folgt, dass

$$\int_1^\infty \frac{|\sin x|}{x} dx \geq \sum_{n=1}^\infty \int_{x_n}^{x_{n+1}} \frac{|\sin x|}{x} dx \geq \sum_{n=1}^\infty \frac{2}{\pi (n+1)} = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n+1} = \infty,$$

woraus (12.31) folgt.

2. Zeigen wir, dass das Integral

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x} \arctan x \, dx$$

konvergiert. Setzen wir $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ und $g(x) = \arctan x$. Die Funktion g ist beschränkt und monoton steigend, während $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ konvergent ist, wie wir oberhalb bewiesen haben. Nach dem Abel-Kriterium ist das gegebene Integral konvergent.

12.4 Gammafunktion

Definition. Definieren wir die *Gammafunktion* $\Gamma(\alpha)$ für jedes $\alpha > 0$ mit

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx. \tag{12.32}$$

Lemma 12.13 *Das Integral* (12.32) *konvergiert für alle* $\alpha > 0$.

Beweis. Die beiden Grenzen 0 und $+\infty$ sind kritisch (genauer zu sagen, 0 ist kritisch nur wenn $\alpha < 1$). Setzen wir

$$f(x) = x^{\alpha-1} e^{-x}$$

und beweisen, dass

$$\int_0^1 f(x)\,dx < +\infty \text{ und } \int_1^{+\infty} f(x)\,dx < +\infty,$$

woraus die Konvergenz von (12.32) folgen wird.

Da $f(\alpha) \leq x^{\alpha-1}$ und

$$\int_0^1 x^{\alpha-1} dx = \left[\frac{x^\alpha}{\alpha}\right]_0^1 = \frac{1}{\alpha} < \infty,$$

So erhalten wir nach dem Majorantenkriterium dass auch $\int_0^1 f(x)\,dx < \infty$.

Beweisen wir jetzt die Konvergenz des zweiten Integral. Dafür beweisen wir die folgende Ungleichung

$$x^{\alpha-1} \leq C e^{\frac{1}{2}x} \text{ für alle } x \geq 1, \tag{12.33}$$

wobei $C = C(\alpha)$. Wir haben

$$e^{\frac{1}{2}x} = 1 + x/2 + \frac{(x/2)^2}{2!} + ... + \frac{1}{n!}(x/2)^n + ...$$

Es gilt für alle $x \geq 0$ und alle $n \in \mathbb{N}$

$$e^{\frac{1}{2}x} \geq \frac{1}{n!}(x/2)^n = \frac{1}{2^n n!} x^n.$$

Wählen wir $n > \alpha - 1$ und erhalten, für alle $x \geq 1$,

$$e^{\frac{1}{2}x} \geq \frac{1}{2^n n!} x^{\alpha-1}$$

so dass (12.33) mit $C = n!2^n$ gilt. Es folgt, dass für alle $x \geq 1$

$$f(x) = x^{\alpha-1}e^{-x} \leq Ce^{\frac{1}{2}x}e^{-x} = Ce^{-\frac{1}{2}x},$$

d.h.

$$f(x) = O(e^{-\frac{1}{2}x}) \text{ für } x \to +\infty.$$

Da

$$\int_1^\infty e^{-\frac{1}{2}x}dx = \left[-2e^{-\frac{1}{2}x}\right]_1^\infty = 2e^{-1/2} < \infty,$$

so erhalten wir nach dem Majorantenkriterium dass auch $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx < \infty$. ■

Lemma 12.14 *Für alle $\alpha > 0$ gilt*

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha). \tag{12.34}$$

Beweis. Die partielle Integration ergibt

$$\begin{aligned}
\Gamma(\alpha+1) &= \int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x}dx \\
&= -\int_0^{+\infty} x^\alpha de^{-x} \\
&= -\left[x^\alpha e^{-x}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-x}dx^\alpha \\
&= \int_0^{+\infty} \alpha x^{\alpha-1}e^{-x}dx = \alpha\Gamma(\alpha).
\end{aligned}$$

■

Bemerken wir, dass

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-x}dx = \left[-e^{-x}\right]_0^\infty = 1.$$

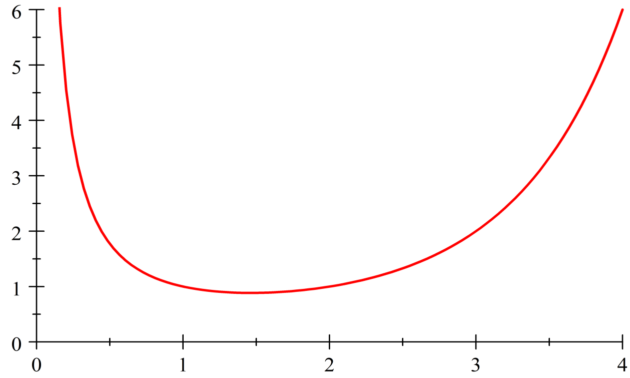
Nach Lemma (12.14) erhalten wir

$$\begin{aligned}
\Gamma(2) &= 1\cdot\Gamma(1) = 1 \\
\Gamma(3) &= 2\cdot\Gamma(2) = 1\cdot 2 \\
\Gamma(4) &= 3\cdot\Gamma(3) = 1\cdot 2\cdot 3
\end{aligned}$$

usw. Per Induktion nach n erhalten wir dass für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

Der Graph von $\Gamma(\alpha)$ ist da.



Gammafunktion

28.05.21 Vorlesung 13

12.5 Dirichlet-Integral

Wir beweisen hier den folgenden Satz.

Satz 12.15 *Es gilt*

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}. \tag{12.35}$$

Das Integral in der linken Seite heißt das *Dirichlet-Integral.*

Beweis. Wir wissen schon, dass das Integral (12.35) konvergiert. Somit reicht es zu beweisen, dass

$$\int_0^{\pi n} \frac{\sin x}{x} dx \to \frac{\pi}{2} \text{ für } n \to +\infty, \ n \in \mathbb{N}. \tag{12.36}$$

Betrachten wir zunächst das folgende Integral für jedes $n \in \mathbb{Z}_+$

$$u_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x} dx$$

und zeigen, dass alle u_n gleich sind. Mit Hilfe von der Identität

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

erhalten wir für jedes $n \geq 1$

$$\begin{aligned} u_n - u_{n-1} &= \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2n+1)x - \sin(2n-1)x}{\sin x} dx \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{2\sin x\, \cos 2nx}{\sin x} dx \\ &= 2\int_0^{\pi/2} \cos 2nx\, dx \qquad (y = 2nx) \\ &= \frac{1}{n}\int_0^{n\pi} \cos y\, dy = \frac{1}{n}\left[\sin y\right]_0^{n\pi} = 0. \end{aligned}$$

Es folgt, dass für alle $n \in \mathbb{Z}_+$

$$u_n = u_0 = \int_0^{\pi/2} dx = \frac{\pi}{2}. \tag{12.37}$$

Somit erhalten wir

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{1}{2}(u_n + u_{n-1}) \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2n+1)x + \sin(2n-1)x}{\sin x} dx \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2nx \cos x}{\sin x} dx \\ &= \int_0^{\pi/2} \sin 2nx \cot x\, dx. \end{aligned}$$

so dass
$$\int_0^{\pi/2} \sin 2nx \cot x \, dx = \frac{\pi}{2}. \tag{12.38}$$
Mit Hilfe von Substitution $x = 2ny$ erhalten wir
$$\int_0^{\pi n} \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2ny}{2ny} d\left(2ny\right) = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2nx}{x} dx,$$
woraus folgt mit Hilfe von (12.38) und partieller Integration
$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi n} \frac{\sin x}{x} dx - \frac{\pi}{2} &= \int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2nx}{x} dx - \int_0^{\pi/2} \sin 2nx \cot x \, dx \\
&= \int_0^{\pi/2} \sin 2nx \left(\frac{1}{x} - \cot x\right) dx \\
&= -\frac{1}{2n} \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1}{x} - \cot x\right) d \cos 2nx \\
&= -\frac{1}{2n} \left[\cos 2nx \left(\frac{1}{x} - \cot x\right)\right]_0^{\pi/2} + \frac{1}{2n} \int_0^{\pi/2} \cos 2nx \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}\right) dx.
\end{aligned} \tag{12.39}$$
d.h.
$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi n} \frac{\sin x}{x} dx - \frac{\pi}{2} &= -\frac{1}{2n} \left[\cos 2nx \left(\frac{1}{x} - \cot x\right)\right]_0^{\pi/2} \\
&\quad + \frac{1}{2n} \int_0^{\pi/2} \cos 2nx \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}\right) dx.
\end{aligned} \tag{12.40}$$
Wir müssen beweisen, dass der Grenzwert der linken Seite für $n \to \infty$ gleich 0 ist. Dafür zeigen wir, dass die rechte Seite gegen 0 für $n \to \infty$ konvergiert.

Zuerst bestimmen wir den Grenzwert
$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x} - \cot x\right)$$
Wir haben
$$\frac{1}{x} - \cot x = \frac{1}{x} - \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\sin x - x \cos x}{x \sin x}.$$
Es gilt
$$x \sin x \sim x^2 \quad \text{für } x \to 0$$
und
$$\begin{aligned}
\sin x - x \cos x &= \left(x - \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right)\right) - x\left(1 - \frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right)\right) \\
&= x - \frac{x^3}{6} - x + \frac{x^3}{2} + o\left(x^3\right) \\
&= \frac{x^3}{3} + o\left(x^3\right) \sim \frac{x^3}{3},
\end{aligned}$$

woraus folgt
$$\frac{1}{x} - \cot x \sim \frac{x^3/3}{x^2} = \frac{x}{3} \quad \text{für } x \to 0$$
und somit
$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \cot x\right) = 0.$$
Wir erhalten
$$\left[\cos 2nx \left(\frac{1}{x} - \cot x\right)\right]_0^{\pi/2} = \frac{\cos \pi n}{\pi/2} = \pm\frac{2}{\pi},$$
woraus folgt
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n}\left[\cos 2nx \left(\frac{1}{x} - \cot x\right)\right]_0^{\pi/2} = 0. \tag{12.41}$$
Da auf $(0, \pi/2]$ gilt $0 < \sin x \le x$, so erhalten wir
$$\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} \ge 0$$
woraus folgt
$$\begin{aligned} \left|\frac{1}{2n}\int_0^{\pi/2} \cos 2nx \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}\right) dx\right| &\le \frac{1}{2n}\int_0^{\pi/2} |\cos 2nx| \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}\right) dx \\ &\le \frac{1}{2n}\int_0^{\pi/2} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}\right) dx. \end{aligned}$$
Bemerken wir, dass für $x \to 0$
$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} &= \frac{x^2 - \sin^2 x}{x^2 \sin^2 x} \\ &= \frac{(x - \sin x)(x + \sin x)}{x^2 \sin^2 x} \\ &\sim \frac{x^3/6 \cdot 2x}{x^4} = \frac{1}{3}, \end{aligned}$$
woraus folgt, dass
$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{3}$$
und somit die Funktion $\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}$ auf $[0, \pi/2]$ integrierbar ist. Es folgt, dass
$$\frac{1}{2n}\int_0^{\pi/2} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}\right) dx \to 0 \quad \text{für } n \to \infty$$
und somit auch
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n}\int_0^{\pi/2} \cos 2nx \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}\right) dx = 0. \tag{12.42}$$
Aus (12.40), (12.41) und (12.42) erhalten wir (12.36). ∎

Bemerkung. Der Beweis des Satzes 12.15 basiert auf den Eigenschaften der Funktion

$$f(x) = \frac{1}{x} - \cot x, \quad x \in (0, \pi/2].$$

Wir haben folgendes gezeigt: diese Funktion hat den Grenzwert 0 für $x \to 0+$ und ihre Ableitung

$$f'(x) = \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}$$

ist positiv und hat den Grenzwert $\frac{1}{3}$ für $x \to 0+$. Wir erweitern f auf das Intervall $[0, \pi/2]$ indem wir $f(0) = 0$ setzen. Dann ist f stetig differenzierbar auf $[0, \pi/2]$.

Für jede stetig differenzierbare Funktion f auf einem Intervall $[a, b]$ und für jedes $m \in \mathbb{N}$ erhalten wir mit Hilfe von partieller Integration

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x) \sin mx \, dx &= -\frac{1}{m} \int_a^b f(x) \, d \cos mx \\
&= -\frac{1}{m} [f(x) \cos mx]_a^b + \frac{1}{m} \int_a^b f'(x) \cos mx \, dx.
\end{aligned}$$

Da $|\cos mx| \leq 1$, so erhalten wir

$$\left| [f(x) \cos mx]_a^b \right| \leq 2 \max_{[a,b]} |f|$$

und

$$\left| \int_a^b f'(x) \cos mx \, dx \right| \leq (b - a) \max_{[a,b]} |f'|,$$

woraus folgt

$$\boxed{\lim_{m \to \infty} \int_a^b f(x) \sin mx \, dx = 0}. \tag{12.43}$$

Einsetzen von (12.43) in (12.39) mit $m = 2n$ und $[a, b] = [0, \pi/2]$ ergibt

$$\int_0^{\pi n} \frac{\sin x}{x} dx - \frac{\pi}{2} \to 0 \quad \text{für } n \to \infty,$$

was den Satz 12.15 beweist.

Die Identität (12.43) heißt *Lemma von Riemann.* Wir haben es für stetig differenzierbare Funktionen f bewiesen, aber es gilt auch für alle Riemann-integrierbare Funktionen f auf $[a, b]$ (siehe Aufgabe 94).

12.6 * Alternative Definition von Elementarfunktionen

Wir geben hier eine alternative Definition von allen elementaren Funktionen mit Hilfe von Integralen. Dafür muss man die Differential- und Integralrechnung zuerst ohne Exponentialfunktion und ohne trigonometrische Funktionen entwickeln.

Mit Hilfe von Integral definieren wir zunächst die logarithmische Funktion: für alle $x > 0$

$$\ln x := \int_1^x \frac{dt}{t}. \tag{12.44}$$

Insbesondere gilt $\ln 1 = 0$. Es folgt, dass $(\ln x)' = \frac{1}{x}$. Mit Hilfe von Definition (12.44) beweist man leicht die Identität

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b \tag{12.45}$$

für alle $a, b > 0$ (siehe auch Aufgabe 47). Wir haben

$$\ln(ab) = \int_1^{ab} \frac{dx}{x} = \int_1^a \frac{dx}{x} + \int_a^{ab} \frac{dx}{x} = \ln a + \int_a^{ab} \frac{dx}{x}.$$

Die Substitution $y = x/a$ im zweiten Integral ergibt

$$\int_a^{ab} \frac{dx}{x} = \int_a^{ab} \frac{d(x/a)}{x/a} = \int_1^b \frac{dy}{y} = \ln b,$$

woraus (12.45) folgt.

Die Funktion ln ist auf $(0, +\infty)$ definiert, ist differenzierbar und somit stetig, und ist streng monoton steigend. Beweisen wir, dass

$$\ln(0, +\infty) = \mathbb{R}$$

so dass die inverse Funktion $\ln^{-1}$ auf $\mathbb{R}$ definiert ist. Dafür reicht es zu beweisen, dass

$$\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty \quad \text{und} \quad \lim_{x \to 0} \ln x = -\infty.$$

In der Tat gilt nach dem Satz 12.8

$$\lim_{x \to +\infty} \ln x = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = +\infty,$$

da $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty$. Es folgt, dass

$$\lim_{x \to 0} \ln x = \lim_{y \to +\infty} \ln \frac{1}{y} = -\lim_{y \to +\infty} \ln y = -\infty.$$

Somit ist die inverse Funktion $\ln^{-1}$ auf $\mathbb{R}$ definiert und nimmt die Werte in $(0, +\infty)$ an. Diese Funktion heißt die Exponentialfunktion und wird mit exp bezeichnet, d.h.

$$\exp := \ln^{-1}.$$

Es folgt, dass für $y = \exp(x)$

$$(\exp(x))' = \frac{1}{(\ln y)'} = \frac{1}{1/y} = y = \exp(x).$$

Setzen wir

$$e := \exp(1),$$

d.h. die Zahl e die folgende Identität erfüllt:

$$\int_1^e \frac{dt}{t} = 1.$$

Beweisen wir die Haupteigenschaft: für alle $x, y \in \mathbb{R}$

$$\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y). \tag{12.46}$$

In der Tat ist (12.46) äquivalent zu

$$\ln(\exp(x+y)) = \ln[\exp(x)\exp(y)].$$

Da die linke Seite gleich $x+y$ ist und die rechte Seite nach (12.45) gleich

$$\ln\exp(x) + \ln\exp(y) = x+y$$

ist, so erhalten wir die o.g. Identität.

Jetzt definieren wir arctan für alle $x \in \mathbb{R}$ durch

$$\arctan x := \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}.$$

Es folgt, dass

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}.$$

Die Funktion $\arctan x$ ist somit streng monoton steigend. Die Bildmenge dieser Funktion ist

$$\arctan(\mathbb{R}) = (-\tau, \tau)$$

wobei

$$\tau := \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}.$$

Insbesondere hat arctan die inverse Funktion, die auf dem Intervall $(-\tau, \tau)$ definiert ist. In der Tat gilt $\tau < 2$ da

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{dt}{1+t^2} &= \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} + \int_1^\infty \frac{dt}{1+t^2} \\ &< 1 + \int_1^\infty \frac{dt}{t^2} = 1+1 = 2. \end{aligned}$$

Setzen wir

$$\tan := \arctan^{-1},$$

so dass der Definitionsbereich von tan gleich $(-\tau, \tau)$ ist. Es folgt, dass für $y = \tan x$

$$(\tan x)' = \frac{1}{(\arctan y)'} = 1 + y^2 = 1 + \tan^2 x.$$

Definieren wir für alle $x \in [-1, 1]$

$$\arcsin x := \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}.$$

Auf $(-1,1)$ ist $\arcsin x$ differenzierbar und

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Die Funktion $\arcsin x$ ist somit streng monoton steigend auf $(-1,1)$. Es ist klar, dass $\arcsin 0 = 0$. Beweisen wir, dass $\arcsin 1 < \infty$:

$$\begin{aligned}\arcsin 1 &= \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t)(1+t)}} \quad \text{(Substitution } \ s = 1-t) \\ &= \int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{s(2-s)}} \leq \int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{s}} = \left[2\sqrt{s}\right]_0^1 = 2 < \infty.\end{aligned}$$

Wir definieren die Zahl π durch

$$\frac{\pi}{2} := \arcsin 1 = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Somit ist $\arcsin x$ eine stetige streng monotone steigende Funktion auf $[-1,1]$ mit dem Bildmenge $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$. Definieren wir die inverse Funktion auf $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ mit den Werten in $[-1,1]$:

$$\sin := \arcsin^{-1}.$$

Es folgt, dass für $y = \sin x$

$$(\sin x)' = \frac{1}{(\arcsin y)'} = \sqrt{1-y^2} = \sqrt{1-\sin^2 x}.$$

Bemerken wir, dass

$$\tau = \int_0^\infty \frac{ds}{1+s^2} = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \pi/2,$$

da die Substitution

$$s = \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}, \quad ds = \frac{dt}{(1-t^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad t = \frac{s}{\sqrt{1+s^2}} \tag{12.47}$$

ergibt

$$\int_0^\infty \frac{ds}{1+s^2} = \int_0^1 \left(1-t^2\right) \frac{dt}{(1-t^2)^{\frac{3}{2}}} = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}.$$

Somit ist $\tan x$ auf $(-\pi/2,\pi/2)$ definiert.

Definieren wir für alle $x \in [-1,1]$

$$\arccos x := \int_x^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}.$$

Diese Funktion has die Bildmenge $[0,\pi]$ da

$$\arccos 1 = 0$$

und

$$\arccos(-1) = \int_{-1}^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = 2\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \pi.$$

Offensichtlich gilt

$$\arccos x+\arcsin x=\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}+\int_x^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=\frac{\pi}{2},$$

und somit

$$(\arccos x)'=-(\arcsin x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Setzen wir

$$\cos=\arccos^{-1},$$

so dass $\cos x$ auf $[0,\pi]$ definiert ist mit den Werten in $[-1,1]$.

Es gilt für $y=\cos x$

$$(\cos x)'=\frac{1}{(\arccos y)'}=-\sqrt{1-y^2}=-\sqrt{1-\cos^2 x}.$$

Beweisen wir für alle $x\in[0,\pi/2]$ die Identität

$$\sin^2 x+\cos^2 x=1 \tag{12.48}$$

Setzen wir $a=\cos x$ und $b=\sin x$ so dass

$$\int_0^b \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=x=\int_a^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}.$$

Wir müssen beweisen, dass $a^2+b^2=1$. Die Substitution

$$u=t^2,\quad du=2tdt$$

ergibt

$$\begin{aligned}\int_0^b \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} &= \int_0^{b^2}\frac{du}{2\sqrt{u(1-u)}}\\ \int_a^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} &= \int_{a^2}^1 \frac{du}{2\sqrt{u(1-u)}}=\int_0^{1-a^2}\frac{dv}{2\sqrt{v(1-v)}}\end{aligned}$$

wobei $v=1-u$. Es folgt $b^2=1-a^2$ und somit $a^2+b^2=1$.

Es folgt, dass

$$(\sin x)'=\cos x\quad\text{und}\quad(\cos x)'=-\sin x.$$

Beweisen wir jetzt, dass für alle $x\in[0,\pi/2)$ gilt

$$\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}.$$

Setzen wir $a=\cos x$, $b=\sin x$, $c=\tan x$ so dass

$$\int_0^b \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=\int_a^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=\int_0^c \frac{ds^2}{1+s^2}.$$

Wir müssen beweisen, dass $c = \frac{b}{a}$. Die gleiche Substitution (12.47) ergibt

$$\int_0^c \frac{ds}{1+s^2} = \int_0^{\frac{c}{\sqrt{1+c^2}}} \left(1-t^2\right) \frac{dt}{\left(1-t^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \int_0^{\frac{c}{\sqrt{1+c^2}}} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}.$$

Es folgt $\frac{c}{\sqrt{1+c^2}} = b$ und somit $c = \frac{b}{\sqrt{1-b^2}} = \frac{b}{a}$.

Somit erhalten wir

$$(\tan x)' = 1 + \tan^2 x = 1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Um die Potenzreihen für die elementaren Funktionen zu bestimmen, benutzt man die Taylorformel mit einer Abschätzung des Restgliedes (siehe Abschnitt 13.6 unterhalb). Man erhält

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!},$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!},$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}.$$

Die Funktion $\exp(x)$ wurde bisher für $x \in \mathbb{R}$ definiert, $\sin x$ – für $x \in [-\pi/2, \pi/2]$ und $\cos x$ – für $x \in [0, \pi]$. Diese Potenzreihen lassen uns die Funktionen $\exp(x)$, $\cos x$ und $\sin x$ auf alle $x \in \mathbb{C}$ fortsetzen. Allerdings muss man noch beweisen, dass die Haupteigenschaft (12.46) für alle $x, y \in \mathbb{C}$ gilt.

Es folgt aus den obigen Potenzreihen, dass für alle $x \in \mathbb{C}$ gilt

$$\exp(ix) = \cos x + i \sin x.$$

Insbesondere gilt

$$\exp\left(i\frac{\pi}{2}\right) = \cos\frac{\pi}{2} + i \sin\frac{\pi}{2} = i$$

und

$$\exp(i\pi) = -1, \quad \exp(i2\pi) = 1,$$

woraus auch die Periodizität von exp, sin und cos folgt.

Chapter 13

Konvergenz von Funktionenreihen

13.1 Funktionenfolgen

Seien J eine beliebige Menge und $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine Folge von reellwertigen (oder komplexwertigen) Funktionen auf J.

Definition. Man sagt, dass die Folge $\{f_n\}$ gegen eine Funktion f *punktweise auf* J konvergiert wenn für jedes $x \in J$ gilt $f_n(x) \to f(x)$ für $n \to \infty$, d.h.

$$\forall x \in J \quad |f_n(x) - f(x)| \to 0 \text{ für } n \to \infty. \tag{13.1}$$

Die punktweise Konvergenz bezeichnet man mit $f_n \to f$.

Für jede Funktion $f : J \to \mathbb{R}$ definieren wir die sup-Norm von f auf J mit

$$\|f\|_J := \sup_{x \in J} |f(x)| \qquad (= \sup |f(J)|).$$

Man benutzt auch die einfachere Notation $\|f\| = \|f\|_J$ wenn J fixiert ist.

Definition. Man sagt, dass $\{f_n\}$ gegen f *gleichmäßig auf* J konvergiert wenn

$$\|f_n - f\|_J \to 0 \text{ für } n \to \infty.$$

Die gleichmäßige Konvergenz bezeichnet man mit $f_n \rightrightarrows f$.

Die gleichmäßige Konvergenz ist offensichtlich eine stärkere Bedingung als die punktweise Konvergenz, da sie äquivalent zu

$$\sup_J |f_n - f| \to 0$$

ist, woraus (13.1) folgt.

Die Umkehrung gilt nicht: es gibt punktweise konvergente Folgen die nicht gleichmäßig konvergent sind.

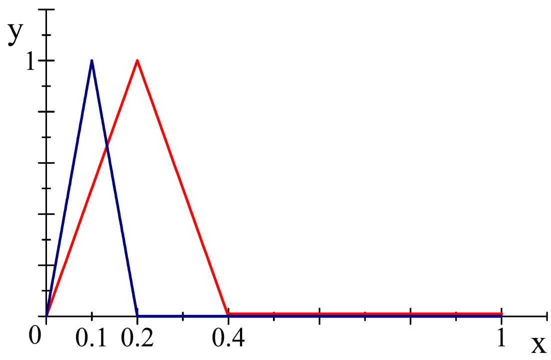
Beispiel. 1. Betrachten wir auf $J = (0, +\infty)$ die Funktionen

$$f_n(x) = \frac{x}{n}.$$

Für jedes $x \in J$ gilt offensichtlich $f_n(x) \to 0$ für $n \to \infty$ so dass $f_n \to 0$, aber $f_n \not\rightrightarrows 0$ da $\|f_n\|_J = \infty$.

2. Betrachten wir auf $J = [0, 1]$ die Funktionen

$$f_n(x) = \begin{cases} nx, & 0 \le x \le \frac{1}{n} \\ 2 - nx, & \frac{1}{n} \le x \le \frac{2}{n}, \\ 0, & \frac{2}{n} \le x \le 1. \end{cases}$$



Die Graphen von f_5 und f_{10}

Zeigen wir, dass $f_n(x) \to 0$ für jedes $x \in [0, 1]$. Für $x = 0$ ist es offensichtlich, da $f_n(0) = 0$. Für $x > 0$ gilt $x > 2/n$ für hinreichend große n, woraus $f_n(x) = 0$ folgt. Andererseits, da $\|f_n\|_J = \sup_{[0,1]} f_n = 1$, so sehen wir, dass $f_n \not\rightrightarrows 0$.

Die gleichmäßige Konvergenz ist wichtig da sie die Stetigkeit von Funktionen bewahrt.

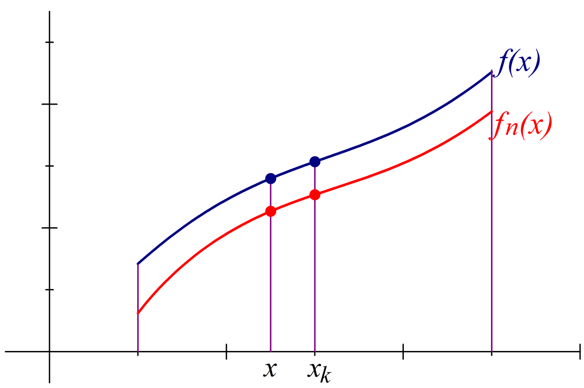
Satz 13.1 *Sei $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von stetigen Funktionen auf einem Intervall $J \subset \mathbb{R}$. Gilt $f_n \rightrightarrows f$ auf J so ist f auch stetig auf J.*

Beweis. Fixieren wir einen Punkt $x \in J$ und beweisen, dass f in x stetig ist. Dafür reicht es zu beweisen, dass für jede Folge $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ aus J mit $x_k \to x$ gilt $f(x_k) \to f(x)$, d.h.

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ gilt } |f(x_k) - f(x)| < \varepsilon \text{ für fast alle } k.$$

Bemerken wir, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ nach der Dreiecksungleichung gilt

$$|f(x_k) - f(x)| \le |f(x_k) - f_n(x_k)| + |f_n(x_k) - f_n(x)| + |f_n(x) - f(x)|. \tag{13.2}$$



Da $\|f_n - f\|_J \to 0$ für $n \to \infty$, so gibt es n mit

$$\|f_n - f\|_J < \varepsilon/3,$$

woraus folgt, dass

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/3 \quad \text{und} \quad |f_n(x_k) - f(x_k)| < \varepsilon/3 \quad \text{für alle } k.$$

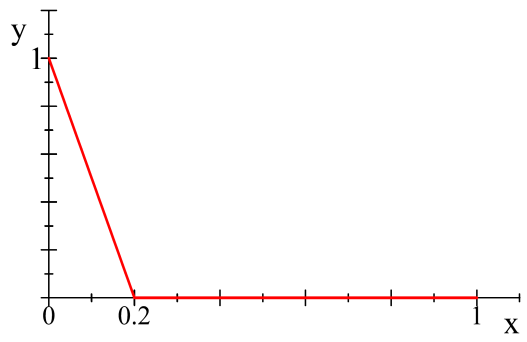
Da f_n stetig ist, so gilt

$$|f_n(x_k) - f_n(x)| < \varepsilon/3 \quad \text{für fast alle } k.$$

Einsetzen in (13.2) ergibt $|f(x_k) - f(x)| < \varepsilon$ für fast alle k, was zu beweisen war. ∎

Beispiel. Die punktweise Konvergenz bewahrt die Stetigkeit nicht. Betrachten wir zum Beispiel die Funktionen

$$g_n(x) = \begin{cases} 1 - nx, & 0 \le x \le \frac{1}{n}, \\ 0, & \frac{1}{n} \le x \le 1. \end{cases}$$



Der Graph von g_5

Offensichtlich ist g_n stetig auf $[0,1]$. Für $n \to \infty$ erhalten wir $g_n(x) \to 0$ für $x > 0$ und $g_n(0) \to 1$, d.h. $g_n \to g$ wobei

$$g(x) = \begin{cases} 1, & x = 0, \\ 0, & 0 < x \le 1. \end{cases}$$

Es ist klar, dass g unstetig an 0 ist.

13.2 Gleichmäßige Konvergenz von Funktionenreihen

Sei $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ eine Folge von reellwertigen (oder komplexwertigen) Funktionen auf einer Menge J. Betrachten wir die Funktionenreihe $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ und ihre Partialsummen

$$F_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x).$$

Definition. Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ konvergiert auf J *punktweise* bzw *gleichmäßig* wenn die Folge $\{F_n\}$ von Partialsummen *punktweise* bzw *gleichmäßig* auf J konvergiert.

Die folgende Aussage gibt ein hilfreiches Kriterium für gleichmäßige Konvergenz von Funktionenreihen an.

Satz 13.2 (Weierstraßsches Majorantenkriterium; auch Weierstraßscher M-*Test*) *Sei* $\{f_k\}$ *eine Funktionenfolge auf* J *mit*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_J < \infty.$$

Dann konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ *auf* J *absolut und gleichmäßig.*

Somit folgt die gleichmäßige Konvergenz von einer Funktionenreihe aus der Konvergenz einer numerischen Reihe.

Beweis. Für jedes $x \in J$ gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_J < \infty$$

so dass die Reihe $\sum f_k(x)$ absolut konvergent für jedes $x \in J$ ist. Insbesondere ist diese Reihe punktweise konvergent. Setzen wir

$$F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \quad \text{und} \quad F_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$$

und beweisen, dass $F_n \rightrightarrows F$ für $n \to \infty$. Für jedes $x \in J$ gilt

$$|F(x) - F_n(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)\right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \|f_k\|_J.$$

Da die rechte Seite unabhängig von $x \in J$ ist, so erhalten wir

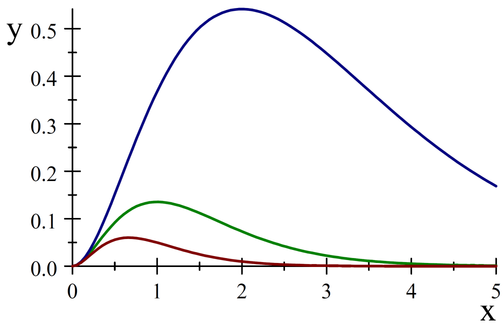
$$\|F - F_n\|_J = \sup_{x \in J} |F(x) - F_n(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \|f_k\|_J.$$

Da die rechte Seite für $n \to \infty$ gegen 0 konvergiert, so erhalten wir, dass $\|F - F_n\|_J \to 0$ und somit $F_n \rightrightarrows F$, was zu beweisen war. ■

Beispiel. Beweisen wir, dass die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} x^2 e^{-kx}$$

gleichmäßig auf $[0, +\infty)$ konvergiert. Die Funktion $f_k(x) = x^2 e^{-kx}$ ist positive für $x > 0$, verschwindet in $x = 0$ und konvergiert gegen 0 für $x \to +\infty$. Es folgt, dass f_k eine Maximumstelle auf $[0, \infty)$ hat.



Funktionen $f_k(x) = x^2 e^{-kx}$ für $k = 1, 2, 3$

An der Maximumstelle x von f_k gilt $f_k'(x) = 0$, was äquivalent zu $(\ln f_k)' = 0$, d.h. zu

$$\begin{aligned}(2\ln x - kx)' &= 0,\\ \frac{2}{x} - k &= 0,\end{aligned}$$

woraus folgt $x = \frac{2}{k}$. Somit erhalten wir

$$\|f_k\|_{[0,\infty)} = \max_{[0,\infty)} f_k = f_k\left(\frac{2}{k}\right) = \left(\frac{2}{k}\right)^2 e^{-2} = \frac{4e^{-2}}{k^2}.$$

Da die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ konvergiert, so erhalten wir nach dem Majorantenkriterium dass die Funktionenreihe $\sum_{k=1}^{\infty} x^2 e^{-kx}$ absolut und gleichmäßig auf $[0, +\infty)$ konvergiert.

Definition. Sei $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ eine Folge von Funktionen auf einem Intervall J. Die Folge $\{f_k\}$ konvergiert auf J *lokal gleichmäßig*, wenn diese Folge auf jedem abgeschlossenen beschränkten Intervall $I \subset J$ gleichmäßig konvergiert. Konvergiert $\{f_k\}$ lokal gleichmäßig gegen f, so schreibt man $f_k \overset{loc}{\rightrightarrows} f$.

Analog konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ auf J lokal gleichmäßig wenn diese Reihe auf jedem abgeschlossenen beschränkten Intervall $I \subset J$ gleichmäßig konvergiert.

Offensichtlich impliziert eine lokal gleichmäßige Konvergenz $f_k \overset{loc}{\rightrightarrows} f$ auf J die punktweise Konvergenz $f_k \to f$ da es für jedes $x \in J$ ein kompaktes Intervall I mit $x \in I \subset J$ gibt. Konvergiert die Folge $\{f_k\}$ gleichmäßig auf J gegen f, so konvergiert $\{f_k\}$ gegen f auch lokal gleichmäßig, da für jedes Teilintervall $I \subset J$ gilt

$$\|f_k - f\|_I \leq \|f_k - f\|_J .$$

Somit haben wir die folgende Beziehung zwischen den Typen von Konvergenz:

$$f_k \rightrightarrows f \quad \Longrightarrow \quad f_k \overset{loc}{\rightrightarrows} f \quad \Longrightarrow \quad f_k \to f.$$

Korollar 13.3 *Sei $\{f_k\}$ eine Folge von stetigen Funktionen auf einem Intervall J. Konvergiert die Folge $\{f_k\}$ lokal gleichmäßig auf J, so ist der Grenzwert $f(x) = \lim f_k(x)$ stetig auf J. Die ähnliche Eigenschaft gilt auch für die Reihen: die Summe einer lokal gleichmäßig konvergenten Reihe von stetigen Funktionen ist stetig.*

Beweis. Auf jedem abgeschlossenen beschränkten Intervall $I \subset J$ gilt nach Voraussetzung $f_k \rightrightarrows f$. Nach dem Satz 13.1 ist f stetig auf I. Da I ein beliebiges kompaktes Teilintervall von J ist, so ist f stetig auch auf J. Die Aussage für die Reihen folgt, da die Partialsummen stetig und lokal gleichmäßig konvergent sind. ■

02.06.21 **Vorlesung 14**

Beispiel. Zeigen wir, dass die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ auf $J = (-1, 1)$ lokal gleichmäßig konvergiert. Jedes abgeschlossene beschränkte Intervall $I \subset J$ liegt in einem Intervall der Form $[-a, a]$ mit $0 < a < 1$, woraus folgt

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left\|x^k\right\|_I \leq \sum_{k=0}^{\infty} \left\|x^k\right\|_{[-a,a]} = \sum_{k=0}^{\infty} a^k < \infty.$$

Nach dem Majorantenkriterium konvergiert die Reihe auf I absolut und gleichmäßig und somit lokal gleichmäßig auf J. Zeigen wir, dass die Konvergenz der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ auf $(-1, 1)$ nicht gleichmäßig ist. Die Summe der Reihe ist

$$f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$$

und die Partialsumme ist

$$f_n(x) := \sum_{k=0}^{n} x^k = 1 + x + ... + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1-x}.$$

Es folgt

$$f(x) - f_n(x) = \frac{x^{n+1}}{1-x}$$

und

$$\|f - f_n\|_J = \sup_{x \in (-1,1)} \left|\frac{x^{n+1}}{1-x}\right| = \infty.$$

Wir beschließen, dass $f_n \not\rightrightarrows f$ auf $(-1, 1)$.

13.3 Potenzreihen

Definition. Eine *Potenzreihe* ist eine Reihe der Form

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \tag{13.3}$$

mit Koeffizienten $c_k \in \mathbb{R}$. Die Menge von allen $x \in \mathbb{R}$ wo die Reihe konvergiert, ist der Definitionsbereich der Summe der Reihe.

Satz 13.4 *Sei die Potenzreihe (13.3) für ein $x = x_0 \neq 0$ konvergent. Dann konvergiert die Potenzreihe absolut und lokal gleichmäßig auf dem Intervall $(-s, s)$ mit $s = |x_0|$. Folglich ist die Summe $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ eine stetige Funktion auf $(-s, s)$.*

Beweis. Wir beweisen, dass für jedes $0 < r < s$ die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ auf $[-r, r]$ absolut und gleichmäßig konvergiert. Für jedes $x \in [-r, r]$ gilt

$$\left|c_k x^k\right| = \left|c_k x_0^k \left(\frac{x}{x_0}\right)^k\right| \leq \left|c_k x_0^k\right| \left(\frac{r}{s}\right)^k.$$

Die Konvergenz von $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x_0^k$ impliziert, dass $c_k x_0^k \to 0$ für $k \to \infty$. Insbesondere ist die Folge $\left\{c_k x_0^k\right\}$ beschränkt, zum Beispiel, $\left|c_k x_0^k\right| \leq C$ für alle k und eine Konstante C. Es folgt, dass

$$\left\|c_k x^k\right\|_{[-r,r]} \leq C \left(\frac{r}{s}\right)^k.$$

Da $\frac{r}{s} < 1$ und somit die geometrische Reihe $\sum_k \left(\frac{r}{s}\right)^k$ konvergiert, so beschließen wir nach dem M-Test, dass die Potenzreihe $\sum_k c_k x^k$ absolut und gleichmäßig auf $[-r, r]$ konvergiert. Somit konvergiert diese Reihe absolut und lokal gleichmäßig auf $(-s, s)$. Die zweite Aussage folgt aus dem Korollar 13.3. ■

Definition. Der Wert

$$R := \sup\left\{|x| : \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \text{ konvergiert}\right\} \in [0, +\infty] \tag{13.4}$$

heißt der *Konvergenzradius* der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$. Das Intervall $(-R, R)$ heißt das *Konvergenzintervall* der Reihe.

Korollar 13.5 *Sei R der Konvergenzradius der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$. Dann konvergiert diese Reihe lokal gleichmäßig auf $(-R, R)$ und ihre Summe $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ ist eine stetige Funktion auf $(-R, R)$. Der Definitionsbereich der Reihe ist eines von den Intervallen*

$$(-R, R), [-R, R], (-R, R], \ [-R, R). \tag{13.5}$$

Beweis. Für jedes $r \in (0, R)$ konvergiert die Reihe für ein x mit $r < |x| < R$ (nach Definition (13.4) von R). Nach dem Satz 13.4 konvergiert die Reihe lokal gleichmäßig auf $(-s, s)$ mit $s = |x|$ und somit gleichmäßig auf $[-r, r]$. Da $r < R$ beliebig ist, so konvergiert die Reihe lokal gleichmäßig auf $(-R, R)$. Nach dem Satz 13.3 ist die Summe $f(x)$ stetig auf $(-R, R)$.

Andererseits, für jedes x außerhalb $[-R, R]$ divergiert die Reihe einfach nach (13.4). An den Grenzpunkten R und $-R$ kann die Reihe sowohl konvergent als auch divergent sein. Der Definitionsbereich der Summe $f(x)$ ist somit eines von den Intervallen (13.5). ■

Satz 13.6 *Für den Konvergenzradius der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ gilt die folgende Formel von* Cauchy-Hadamard*:*

$$R = \frac{1}{\limsup_{k\to\infty} |c_k|^{1/k}}. \tag{13.6}$$

Bemerkung. Es gibt eine andere Formel für den Konvergenzradius:

$$R = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{c_k}{c_{k+1}} \right|$$

aber unter der Voraussetzungen dass alle $c_k \neq 0$ und dass der Grenzwert existiert (siehe Aufgabe 75). Die Formel (13.6) von Cauchy-Hadamard hingegen gilt immer ohne zusätzliche Voraussetzungen.

Beweis. Wir benutzen die folgende Eigenschaft von lim sup: gilt für eine Folge $\{a_k\}$

$$\limsup_{k\to\infty} a_k < c$$

so gilt $a_k < c$ für fast alle k. In der Tat, liegt im $[c, +\infty)$ unendlich viele Glieder der Folge $\{a_k\}$ so gibt es im $[c, +\infty]$ einen Häufungspunkt der Folge, was unmöglich ist, dass der größte Häufungspunkt der Folge $\{a_n\}$ gleich $\limsup_{n\to\infty} a_n$ ist was kleiner als c ist.

Definieren wir R mit (13.6) und beweisen, dass die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ für $|x| < R$ konvergiert und für $|x| > R$ divergiert. Dann erhalten wir dass R der Konvergenzradius ist. Sei zuerst $0 < |x| < R$ (der Fall $x = 0$ ist trivial). Es folgt, dass

$$\limsup_{k\to\infty} |c_k|^{1/k} = \frac{1}{R} < \frac{1}{|x|}.$$

Offensichtlich gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit

$$\limsup_{k\to\infty} |c_k|^{1/k} < \frac{1-\varepsilon}{|x|},$$

woraus folgt, dass

$$|c_k|^{1/k} < \frac{1-\varepsilon}{|x|} \quad \text{für fast alle } k.$$

Somit gilt

$$\left|c_k x^k\right| < (1-\varepsilon)^k \quad \text{für fast alle } k.$$

Da die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} (1-\varepsilon)^k$ konvergiert, so konvergiert auch $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$.

Beweisen wir jetzt, dass für $|x| > R$ die Reihe divergiert. Es gilt dann

$$\limsup_{k\to\infty} |c_k|^{1/k} > \frac{1}{|x|},$$

und somit gibt es eine Teilfolge $\{c_{k_i}\}$ mit

$$\lim_{i\to\infty} |c_{k_i}|^{1/k_i} > \frac{1}{|x|}.$$

Daraus folgt, dass

$$|c_{k_i}|^{1/k_i} > \frac{1}{|x|} \quad \text{für fast alle } i$$

und somit

$$\left|c_{k_i} x^{k_i}\right| > 1 \quad \text{für fast alle } i.$$

Folglich ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ divergent nach dem Trivialkriterium (Satz 5.4). ■

Beispiel. Die Potenzreihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$$

ist konvergent für $x = -1$ als Leibniz-Reihe. Nach dem Satz 13.4 konvergiert sie lokal gleichmäßig auf $(-1, 1)$. Für $|x| > 1$ gilt $\frac{|x|^k}{k} \to \infty$ so dass die Reihe divergiert. Somit ist das Konvergenzradius gleich 1 und das Konvergenzintervall ist $(-1, 1)$. Das Gleiche folgt auch aus (13.6) da

$$R = \frac{1}{\limsup_{k\to\infty} (1/k)^{1/k}} = 1.$$

Der Definitionsbereich der Reihe ist $[-1, 1)$, da die Reihe an $x = -1$ konvergiert und an $x = 1$ divergiert (als harmonische Reihe).

Nach dem Korollar 13.5 ist die Summe $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ stetig auf dem Konvergenzintervall $(-R, R)$. Ist $f(x)$ auch am Grenzpunkt $x = R$ oder $x = -R$ definiert, so entsteht die Frage, ob f an diesem Grenzpunkt auch stetig ist. Die Antwort ist positiv und wird im folgenden Satz gegeben.

Satz 13.7 (Satz von Abel) *Die Funktion $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ ist stetig in jedem Punkt $x = x_0$ wo die Reihe konvergiert (d.h. im ganzen Definitionsbereich).*

Beweis. Liegt x_0 im Konvergenzintervall $(-R, R)$, so gilt die Aussage nach dem Korollar 13.5. Es bleibt den Fall $x_0 = \pm R$ zu betrachten. Im Fall $x_0 = 0$ gibt es nichts zu beweisen, so sei $x_0 \neq 0$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass $x_0 = 1$ da sonst x/x_0 in x umbenennen. Auch ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, dass $f(1) = 0$ da sonst c_0 ändern. Unter diesen Voraussetzungen beweisen, dass $f(x)$ stetig auf $[0, 1]$ ist, insbesondere an der Grenze $x = 1$.

Wir benutzen die *abelsche partielle Summation* um die Reihe $\sum c_k x_k$ umzuformen. Bezeichnen wir für jedes $n \in \mathbb{Z}_+$

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} c_k = c_0 + c_1 + ... + c_n$$

und $s_{-1} = 0$, so dass für alle $k \in \mathbb{Z}_+$ gilt

$$c_k = s_k - s_{k-1}.$$

Da

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \sum_{k=0}^{\infty} c_k = f(1) = 0,$$

so ist die Folge $\{s_n\}$ konvergent und somit beschränkt. Nach dem Majorantenkriterium für numerische Reihen (Satz 5.5) konvergiert die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} s_k x^k$$

für alle $x \in (-1,1)$. Es gilt somit für alle $x \in (-1,1)$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} (s_k - s_{k-1}) x^k = \sum_{k=0}^{\infty} s_k x^k - \sum_{k=0}^{\infty} s_{k-1} x^k.$$

Da das Glied $s_{k-1}x^k$ für $k = 0$ verschwindet, so lässt sich der Index k in der letzten Summe von $k = 1$ anfangen. Zudem umbenennen wir in dieser Summe $k-1$ in k und somit erhalten

$$\sum_{k=0}^{\infty} s_{k-1} x^k = \sum_{k=1}^{\infty} s_{k-1} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} s_k x^{k+1},$$

woraus folgt

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} s_k x^k - \sum_{k=0}^{\infty} s_k x^{k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} s_k \left(x^k - x^{k+1}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (1-x) s_k x^k. \end{aligned} \tag{13.7}$$

Diese Identität wurde für $x \in (-1,1)$ beweisen, aber für $x = 1$ gilt (13.7) auch da $f(1) = 0$. Beweisen wir, dass die Reihe (13.7) gleichmäßig gegen $f(x)$ auf $[0,1]$ konvergiert, woraus die Stetigkeit von f auf $[0,1]$ folgen wird. Die Partialsummen dieser Reihe sind

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (1-x) s_k x^k, \tag{13.8}$$

und für alle $x \in [0,1)$ gilt

$$\begin{aligned} |f(x) - f_n(x)| &= \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} (1-x) s_k x^k \right| \le \sup_{k>n} |s_k| (1-x) \sum_{k=n+1}^{\infty} x^k \\ &\le \sup_{k>n} |s_k| (1-x) \frac{1}{1-x} \\ &= \sup_{k>n} |s_k|. \end{aligned}$$

Für $x = 1$ gilt diese Ungleichung auch, da $f(1) = f_n(1) = 0$ (siehe (13.8)). Somit erhalten wir für alle $x \in [0,1]$

$$|f(x) - f_n(x)| \le \sup_{k>n} |s_k|,$$

woraus folgt

$$\|f - f_n\|_{[0,1]} = \sup_{[0,1]} |f - f_n| \le \sup_{k>n} |s_k|.$$

Da $s_n \to 0$ für $n \to \infty$, so gilt auch[1] $\sup_{k>n} |s_k| \to 0$ und somit

$$\|f - f_n\|_{[0,1]} \to 0 \text{ für } n \to \infty$$

[1] Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein N mit

$$|s_k| < \varepsilon \text{ für alle } k > N.$$

d.h. die gleichmäßige Konvergenz $f_n \rightrightarrows f$ auf $[0,1]$. Nach dem Satz 13.1 ist f auf $[0,1]$ stetig. ■

Beispiel. Es gilt die folgende Identität für alle $x \in (-1,1)$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + ... = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \tag{13.9}$$

(siehe Aufgabe 79). Die Potenzreihe (13.9) hat den Konvergenzradius 1, aber konvergiert auch am Grenzpunkt $x = 1$, was aus dem Leibniz-Kriterium folgt, da die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ alternierend ist und die Glieder monoton fallend sind. Nach dem Satz 13.7 ist die Summe der Reihe (13.9) stetig an $x = 1$. Da $\arctan x$ auch stetig an $x = 1$ ist, so erhalten wir, dass die Identität (13.9) auch für $x = 1$ gilt (und analog für $x = -1$). Da $\arctan 1 = \pi/4$, so erhalten wir die Identität

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + ... = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}.$$

04.06.21 Vorlesung 15

13.4 Integrations unter gleichmäßiger Konvergenz

Satz 13.8 *Sei $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge von stetigen Funktionen auf einem beschränkten abgeschlossenen Intervall $[a,b]$. Konvergiert f_k gleichmäßig auf $[a,b]$ gegen eine Funktion f, so gilt*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{k\to\infty} \int_a^b f_k(x)\,dx. \tag{13.10}$$

Man kann auch schreiben

$$\int_a^b \lim_{k\to\infty} f_k(x)\,dx = \lim_{k\to\infty} \int_a^b f_k(x)\,dx$$

so dass die Operationen gleichmäßiger lim und $\int_a^b$ vertauschbar sind.

Beweis. Die Funktion f ist stetig nach dem Satz 13.1 und somit integrierbar. Es gilt

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f_k(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx \right| &= \left| \int_a^b (f_k - f)\,dx \right| \\ &\le \int_a^b |f_k - f|\,dx \\ &\le \sup_{[a,b]} |f_k - f|\,(b-a) = \|f_k - f\|_{[a,b]}\,(b-a), \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass für alle $n \ge N$

$$\sup_{k>n} |s_k| \le \sup_{k>N} |s_k| \le \varepsilon$$

und somit $\sup_{k>n} |s_k| \to 0$ für $n \to \infty$.

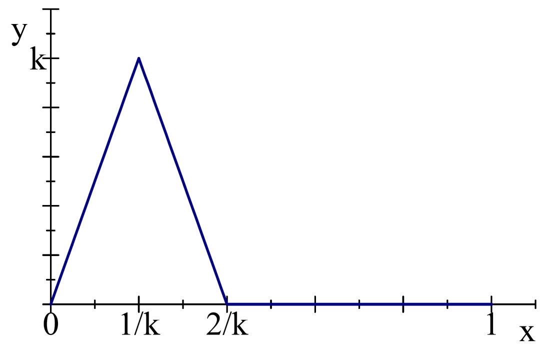
wobei wir die LM-Ungleichung des Satzes 11.10 verwendet haben. Da $f_k \rightrightarrows f$ und somit $\|f_k - f\|_{[a,b]} \to 0$, so erhalten wir

$$\left|\int_a^b f_k(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx\right| \to 0,$$

was äquivalent zu (13.10) ist. ■

Beispiel. Die Voraussetzung von der gleichmäßigen Konvergenz ist wichtig für den Satz 13.8. Die punktweise Konvergenz $f_k \to f$ ergibt die Konvergenz von den Integralen nicht. Zum Beispiel, betrachten wir die folgenden Funktionen auf $[0,1]$:

$$f_k(x) = \begin{cases} k^2 x, & 0 \le x \le \frac{1}{k}, \\ 2k - k^2 x, & \frac{1}{k} \le x \le \frac{2}{k}, \\ 0, & \frac{2}{k} \le x \le 1. \end{cases}$$



Der Graph von f_k

Es gilt die punktweise Konvergenz $f_k \to 0$ auf $[0,1]$, aber

$$\int_0^1 f_k(x)\,dx \ge \int_0^{1/k} f_k dx = \int_0^{1/k} k^2 x\,dx = k^2 \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{1/k} = \frac{1}{2}$$

und somit

$$\int_0^1 f_k(x)\,dx \not\to 0.$$

Korollar 13.9 *Sei $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge von stetigen auf $[a,b]$ Funktionen. Konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ gleichmäßig auf $[a,b]$, so gilt*

$$\int_a^b \left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)\right) dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b f_k(x)\,dx. \tag{13.11}$$

In anderen Wörtern, die Operationen $\int_a^b$ und $\sum_{k=1}^{\infty}$ über einer Funktionenreihe sind vertauschbar, vorausgesetzt, dass die Reihe gleichmäßig konvergiert. Noch eine Umformulierung von (13.11): eine Funktionenreihe lässt sich *gliedweise* Integrieren vorausgesetzt dass sie gleichmäßig konvergiert.

Beweis. Setzen wir

$$F_n = \sum_{k=1}^{n} f_k.$$

Da die Folge $\{F_n\}$ gleichmäßig auf $[a, b]$ konvergiert, so gilt nach dem Satz 13.8

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b f_k dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_a^b f_k dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b F_n dx \to \int_a^b \lim_{n\to\infty} F_n dx = \int_a^b \left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k \right) dx,$$

was zu beweisen war. ■

Korollar 13.10 *Sei die Potenzreihe* $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ *konvergent auf einem Intervall* $(-R, R)$ *(insbesondere kann* R *der Konvergenzradius sein). Dann gilt für alle* $x \in (-R, R)$

$$\int_0^x f(t)\, dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{k+1} x^{k+1}. \tag{13.12}$$

Beweis. Für $x = 0$ ist (13.12) trivial. Sei $x \in (0, R)$. Nach dem Satz 13.4 konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k$ gleichmäßig auf dem Intervall $[0, x]$. Nach dem Korollar 13.9 lässt sich die Identität

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k$$

auf dem Intervall $[0, x]$ gliedweise integrieren:

$$\int_0^x f(t)\, dt = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^x c_k t^k dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{k+1} x^{k+1},$$

was zu beweisen war. Analog betrachtet man den Fall $x < 0$. ■

Beispiel. Betrachten wir die geometrische Reihe

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k,$$

die für $x \in (-1, 1)$ konvergiert. Nach (13.12) erhalten wir für alle $x \in (-1, 1)$

$$\int_0^x \frac{dt}{1-t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{k+1} = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + ...$$

Andererseits gilt

$$\int_0^x \frac{dt}{1-t} = -\ln(1-x),$$

woraus folgt, dass für alle $x \in (-1, 1)$

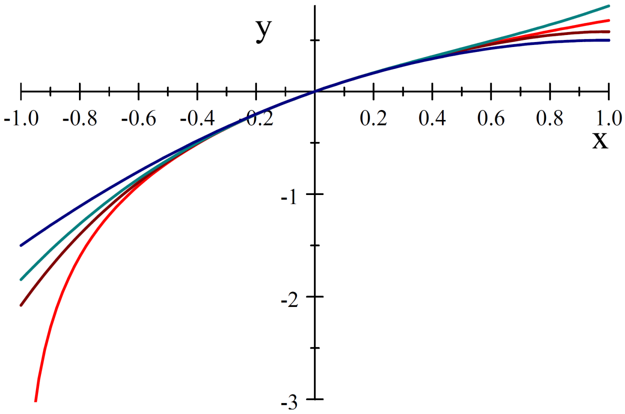
$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + ...$$

Der Wechsel von x nach $-x$ ergibt die folgende Identität

$$\boxed{\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k}}, \tag{13.13}$$

die für alle $x \in (-1,1)$ gilt. Der Konvergenzradius der Reihe (13.13) ist gleich 1 wie es aus der Formel von Cauchy-Hadamard (Satz 13.6) folgt.

Die Reihe in (13.13) heißt die *Taylorreihe* der Funktion $\ln(1+x)$. Die Partialsummen dieser Reihe sind die Taylor-Polynome $T_n(x)$ von $\ln(1+x)$ (Aufgabe 22(a)).



Die Funktion $\ln(1+x)$ (rot) und die Partialsummen $T_2(x)$, $T_3(x)$, $T_4(x)$

Für $x = 1$ stimmt die Reihe (13.13) mit der Leibniz-Reihe überein und ist somit konvergent. Nach dem Satz von Abel (Satz 13.7) ist die Summe der Reihe (13.13) stetig an $x = 1$. Da $\ln(1+x)$ auch an $x = 1$ stetig ist, so beschließen wir, dass (13.13) auch an $x = 1$ gilt, d.h.

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots .$$

An $x = -1$ divergiert die Reihe (13.13), und auch $\ln(1+x)$ ist nicht definiert.

13.5 Differenzieren unter gleichmäßiger Konvergenz

Satz 13.11 *Sei $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge von stetig differenzierbaren Funktionen auf einem Intervall $J \subset \mathbb{R}$. Nehmen wir an, dass*

- $f_k \to f$ *punktweise auf* J;
- $f_k' \overset{loc}{\rightrightarrows} g$ *auf* J.

Dann ist die Funktion f stetig differenzierbar und es gilt $f' = g$.

Äquivalente Formulierung: es gilt

$$\left(\lim_{k\to\infty} f_k\right)' = \lim_{k\to\infty} f_k',$$

vorausgesetzt, dass $\{f_k\}$ punktweise konvergiert und $\{f_k'\}$ lokal gleichmäßig konvergiert. In diesem Fall sind die Operationen lim und Ableitung vertauschbar.

Beweis. Fixieren wir ein $c \in J$. Nach der Newton-Leibniz-Formel haben wir für alle $x \in J$

$$f_k(x) - f_k(c) = \int_c^x f_k'(t)\,dt. \tag{13.14}$$

Da $f_k' \overset{loc}{\rightrightarrows} g$ auf J, so ist g stetig in J nach dem Satz 13.3. Da $f_k' \rightrightarrows g$ auf $[c,x]$ (oder $[x,c]$ im Fall $x < c$), so erhalten wir nach dem Satz 13.8

$$\int_c^x f_k'(t)\,dt \to \int_c^x g(t)\,dt \text{ as } k \to \infty.$$

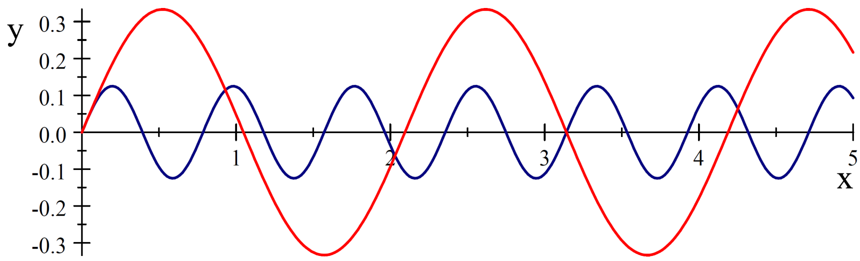
Es folgt aus (13.14) für $k \to \infty$, dass

$$f(x) - f(c) = \int_c^x g(t)\,dt.$$

Nach dem Satz 11.13 beschließen wir, dass $f' = g$, was zu beweisen war. ■

Bemerken wir folgendes: die Behauptung des Satzes 13.11 ist über die Ableitungen, aber der Beweis auf Integration basiert.

Beispiel. Die Konvergenz $f_k \rightrightarrows f$ allein ergibt $f_k' \to f'$ nicht. Zum Beispiel, die Folge $f_k = \frac{1}{k}\sin kx$ konvergiert gegen 0 gleichmäßig auf $\mathbb{R}$ aber $f_k' = \cos kx$ konvergiert nicht.



Funktionen $\frac{1}{3}\sin 3x$ und $\frac{1}{8}\sin 8x$

Korollar 13.12 *Sei $\{f_k\}$ eine Folge von stetig differenzierbaren Funktionen auf einem Intervall $J \subset \mathbb{R}$. Nehmen wir an, dass*

- *die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ ist auf J punktweise konvergent;*
- *die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} f_k'(x)$ ist auf J lokal gleichmäßig konvergent.*

Dann gilt

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k\right)' = \sum_{k=1}^{\infty} f_k'. \tag{13.15}$$

In anderen Wörtern: die Reihe lässt sich gliedweise ableiten vorausgesetzt dass sie punktweise konvergiert und die Reihe von Ableitungen lokal gleichmäßig konvergiert.

Beweis. Die Partialsummen $F_n = \sum_{k=1}^{n} f_k$ erfüllen alle Voraussetzungen des Satzes 13.11, woraus folgt

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k\right)' = \left(\lim_{n\to\infty} F_n\right)' = \lim_{n\to\infty} F_n' = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f_k' = \sum_{k=1}^{\infty} f_k',$$

was zu beweisen war. ■

Satz 13.13 *Sei $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ eine Potenzreihe mit dem Konvergenzradius $R > 0$. Dann ist die Funktion*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 ...$$

in $(-R, R)$ unendlich oft differenzierbar, es gilt in $(-R, R)$

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k k x^{k-1} = c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + ... \tag{13.16}$$

und der Konvergenzradius der Reihe (13.16) ist auch gleich R.

Die Identität (13.16) dass eine Potenzreihe sich im Konvergenzintervall *immer* gliedweise ableiten lässt.

Beweis. Sei R' der Konvergenzradius der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} c_k k x^{k-1}$. Nach der Formel von Cauchy-Hadamard (Satz 13.6) gilt

$$\frac{1}{R'} = \limsup_{k\to\infty} \left(k\,|c_k|\right)^{1/k} = \lim_{k\to\infty} k^{1/k} \limsup_{k\to\infty} |c_k|^{1/k} = \frac{1}{R},$$

da $k^{1/k} \to 1$ für $k \to \infty$. Somit erhalten wir $R' = R$. Insbesondere konvergiert die Reihe (13.16) lokal gleichmäßig in $(-R, R)$.

Nach dem Korollar 13.12 gilt für alle $x \in (-R, R)$

$$f'(x) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k\right)' = \sum_{k=0}^{\infty} \left(c_k x^k\right)' = \sum_{k=1}^{\infty} c_k k x^{k-1},$$

da $\sum_k c_k x^k$ punktweise konvergiert und $\sum_k c_k k x^{k-1}$ lokal gleichmäßig in $(-R, R)$ konvergiert. Somit ist f in $(-R, R)$ differenzierbar und es gilt (13.16).

Es bleibt noch zu beweisen, dass f unendlich oft differenzierbar ist. Dafür bemerken wir, dass die Reihe $f'(x) = \sum_k c_k k x^{k-1}$ mit dem Konvergenzradius R alle Voraussetzungen dieses Satzes erfüllt. Somit beschließen wir, dass f' in $(-R, R)$ differenzierbar ist,

$$f''(x) = \sum_{k=2}^{\infty} c_k k (k-1) x^{k-2} = 2c_2 + 3 \cdot 2c_3 x + 4 \cdot 3c_4 x^2 + ...$$

und der Konvergenzradius dieser Reihe gleich R ist. Per Induktion nach n erhalten wir, dass $f^{(n)}(x)$ in $(-R,R)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ existiert, und es gilt für alle $x \in (-R,R)$

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=n}^{\infty} c_k k(k-1)\ldots(k-n+1)\,x^{n-k}. \tag{13.17}$$

■

Beispiel. Betrachten wir die Identität

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$$

die für alle $x \in (-1,1)$ gilt. Ableiten davon ergibt

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1},$$

noch einmal Ableiten ergibt

$$\frac{2}{(1-x)^3} = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)\,x^{k-2},$$

usw. Alle diese Identitäten gelten auch für alle $x \in (-1,1)$.

13.6 Taylorreihe

Sei die Potenzreihe

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$$

konvergent in einem Intervall $(-R,R)$ mit $R > 0$. Nach dem Satz 13.13 ist f unendlich oft in $(-R,R)$ differenzierbar und es gilt für alle $x \in (-R,R)$

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=n}^{\infty} c_k k(k-1)\ldots(k-n+1)\,x^{n-k}.$$

Insbesondere für $x = 0$ gilt

$$f^n(0) = c_n n(n-1)\ldots(n-n+1) = c_n n!$$

und somit

$$\boxed{c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}}. \tag{13.18}$$

Umgekehrt, sei f eine unendlich oft differenzierbare Funktion auf einem Intervall J mit $0 \in J$. Betrachten wir die Reihe

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n} \tag{13.19}$$

und stellen die Frage ob diese Reihe gegen $f(x)$ konvergiert.

Definition. Die Reihe (13.19) heißt die *Taylorreihe* der Funktion f an der Stelle 0 (oder auch *Macklaurin-Reihe*).

Nach dem obigen Argument gilt folgendes: ist f die Summe einer konvergenten Potenzreihe, so konvergiert ihre Taylorreihe gegen f. Für allgemeine unendlich oft differenzierbare Funktion f muss ihre Taylorreihe *nicht* unbedingt gegen $f(x)$ konvergieren (oder überhaupt konvergieren).

Die Partialsummen der Taylorreihe (13.19) sind offensichtlich die Taylor-Polynome

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k.$$

Somit konvergiert die Reihe (13.19) gegen $f(x)$ genau dann, wenn

$$f(x) - T_n(x) \to 0 \text{ für } n \to \infty.$$

Um diese Bedingung überprüfen zu können, brauchen wir eine Abschätzung des Restgliedes $f(x) - T_n(x)$. Nach dem Satz 11.17 gilt die Darstellung

$$f(x) = T_n(x) + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt. \tag{13.20}$$

Die Funktion

$$\boxed{R_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt} \tag{13.21}$$

heißt das Integralrestglied.

Korollar 13.14 *Sei f unendlich oft differenzierbar auf einem Intervall J mit $0 \in J$. Sei $x \in J$. Die Identität*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \tag{13.22}$$

gilt genau dann wenn $R_n(x) \to 0$ für $n \to \infty$.

Beweis. Diese Aussage folgt offensichtlich aus (13.20) da $T_n(x)$ eine Partialsumme der Reihe (13.22) ist. ∎

Beispiel. Bestimmen wir die Taylorreihe für die Funktion $f(x) = e^x$. Da $f^{(n)}(x) = e^x$ und $f^{(n)}(0) = 1$, so erhalten wir nach (13.18) die Taylorreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Wir wissen, dass die Summe dieser Reihe für alle $x \in \mathbb{R}$ gleich e^x ist. Beweisen wir dies noch einmal, und zwar mit Hilfe von dem Korollar 13.14. Es gilt

$$R_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t dt.$$

Da $e^t \leq e^{|x|}$ und $|x-t| \leq |x|$, so erhalten wir nach der LM-Ungleichung

$$|R_n(x)| \leq e^{|x|} \frac{|x|^n}{n!} |x|.$$

Da $\frac{|x|^n}{n!} \to 0$, so erhalten wir $R_n(x) \to 0$ für $n \to \infty$, woraus folgt, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

09.06.21 Vorlesung 16

13.7 Binomische Reihe

Bestimmen wir die Taylorreihe für die Funktion

$$f(x) = (1+x)^p$$

wobei $p \in \mathbb{R}$. Der Definitionsbereich der Funktion f ist $x > -1$, wo die Funktion f unendlich oft differenzierbar ist. Im Fall $p > 0$ ist $f(x)$ auch an der Stelle $x = -1$ definiert und stetig.

Es gilt für $x > -1$

$$f'(x) = p(1+x)^{p-1}, \quad f''(x) = p(p-1)(1+x)^{p-2}, \quad ...$$

und

$$f^{(n)}(x) = p(p-1)...(p-n+1)(1+x)^{p-n}.$$

Insbesondere gilt

$$f^{(n)}(0) = p(p-1)...(p-n+1), \quad n \in \mathbb{N},$$

und $f(0) = 1$. Somit ist die Taylorreihe von f an der Stelle 0 wie folgt:

$$\sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(0) \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{p}{n} x^n, \tag{13.23}$$

wobei

$$\binom{p}{n} = \frac{p(p-1)...(p-n+1)}{n!} \text{ für } n \in \mathbb{N}$$

und

$$\binom{p}{0} = 1.$$

Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{p}{n} x^n$ heißt die *binomische Reihe.*

Bemerken wir, dass für $p \in \mathbb{N}$ und $0 \leq n \leq p$ gilt

$$\binom{p}{n} = \frac{p(p-1)...(p-n+1)}{n!} \frac{(p-n)!}{(p-n)!} = \frac{p!}{n!(p-n)!},$$

was mit der üblichen Definition von Binomialkoeffizienten übereinstimmt.

Satz 13.15 *Für jedes $p \in \mathbb{R}$ konvergiert die Taylorreihe (13.23) gegen $f(x)$ für alle $x \in (-1,1)$, d.h. es gilt*

$$\boxed{(1+x)^p = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{p}{n} x^n}. \tag{13.24}$$

Darüber hinaus, im Fall $p > 0$ konvergiert die binomische Reihe gegen $f(x)$ gleichmäßig auf $[-1,1]$.

Für jedes $p \in \mathbb{R}$ konvergiert die binomische Reihe gegen $(1+x)^p$ lokal gleichmäßig auf $(-1,1)$ wie es aus dem Korollar 13.5 folgt.

Die Identität (13.24) ist eine Verallgemeinerung des binomischen Lehrsatz. In der Tat, für $p \in \mathbb{N}$ gilt nach dem binomischen Lehrsatz für alle $x \in \mathbb{R}$

$$(1+x)^p = \sum_{n=0}^{p} \binom{p}{n} x^n,$$

was mit (13.24) übereinstimmt, da in diesem Fall alle Koeffizienten $\binom{p}{n}$ mit $n > p$ verschwinden. When $p \notin \mathbb{N} \cup \{0\}$, so kann man zeigen, dass der Konvergenzradius der binomischen Reihe gleich 1 ist (siehe Aufgabe 75).

Beweis. Um (13.24) zu beweisen, zeigen wir, dass für jedes $x \in (-1,1)$ gilt $R_n(x) \to 0$ für $n \to \infty$. Für $x = 0$ gibt nichts zu beweisen, so sei $x \neq 0$. Für die Funktion

$$f(t) = (1+t)^p$$

haben wir nach (13.21)

$$\begin{aligned} R_n(x) &= \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt \\ &= \frac{p(p-1)\ldots(p-n)}{n!} \int_0^x (x-t)^n (1+t)^{p-(n+1)}\, dt. \end{aligned}$$

Die Substitution $t = xs$ ergibt

$$\begin{aligned} \int_0^x (x-t)^n (1+t)^{p-(n+1)}\, dt &= \int_0^1 (x-xs)^n (1+xs)^{p-(n+1)}\, x\, ds \\ &= x^n \int_0^1 \frac{(1-s)^n}{(1+xs)^n} (1+xs)^{p-1}\, x\, ds. \end{aligned}$$

Da $1 + xs \geq 1 - s$ (da $x > -1$), so erhalten wir

$$\frac{(1-s)^n}{(1+xs)^n} \leq 1$$

und somit

$$\left| \int_0^1 \frac{(1-s)^n}{(1+xs)^n} (1+xs)^{p-1}\, x\, ds \right| \leq \int_0^1 (1+xs)^{p-1} |x|\, ds =: C < \infty$$

und

$$\left| \int_0^x (x-t)^n (1+t)^{p-(n+1)}\, dt \right| \leq C |x|^n.$$

Es folgt, dass

$$\begin{aligned}
|R_n(x)| &\leq C\left|\frac{p(p-1)\dots(p-n)}{n!}\right||x|^n \\
&= C|p|\left|\frac{(1-p)(2-p)\dots(n-p)}{1\cdot 2\cdot \dots \cdot n}\right||x|^n \\
&= C|p|\left|\left(1-\frac{p}{1}\right)x\left(1-\frac{p}{2}\right)x\dots\left(1-\frac{p}{n}\right)x\right| \\
&= C|p|\prod_{k=1}^{n}\left|1-\frac{p}{k}\right||x|.
\end{aligned}$$

Da $\frac{p}{k}\to 0$ für $k\to\infty$, so gibt es für jedes $\varepsilon>0$ ein $N\in\mathbb{N}$ so dass

$$\left|\frac{p}{k}\right|<\varepsilon \;\text{ für alle } k>N,$$

und somit

$$\left|1-\frac{p}{k}\right||x|<(1+\varepsilon)|x|=:q \;\text{ für alle } k>N.$$

Fixieren wir ein $x\in(-1,1)$ und wählen wir ein $\varepsilon>0$ so klein, dass $q<1$. Dann gilt es für alle $n>N$

$$\begin{aligned}
|R_n(x)| &\leq C|p|\left(\prod_{k=1}^{N}\left|1-\frac{p}{k}\right||x|\right)\left(\prod_{k=N+1}^{n}\left|1-\frac{p}{k}\right||x|\right) \\
&\leq C'q^{n-N},
\end{aligned}$$

woraus $R_n(x)\to 0$ folgt.

Sei jetzt $p>0$. In diesem Fall beweisen wir unterhalb, dass die binomische Reihe auf $[-1,1]$ gleichmäßig konvergiert. Dann ist die Summe dieser Reihe eine stetige Funktion auf $[-1,1]$. Da $(1+x)^p$ auch stetig auf $[-1,1]$ ist und die Identität

$$(1+x)^p=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{p}{n}x^n$$

für alle $x\in(-1,1)$ gilt, so gilt sie auch für alle $x\in[-1,1]$.

Da für alle $x\in[-1,1]$ gilt

$$\left|\binom{p}{n}x^n\right|\leq\left|\binom{p}{n}\right|=:c_n,$$

um die gleichmäßige Konvergenz der binomischen Reihe auf $[-1,1]$ zu beweisen, reicht es nach dem M-Test von Weierstraß zu zeigen, dass

$$\sum_{n=1}^{\infty}c_n<\infty.$$

Fixieren wir eine natürliche Zahl $m>p$ und bemerken dass für $n>m$

$$\begin{aligned}
c_n &= \left|\frac{p(p-1)\dots(p-n+1)}{1\cdot 2\cdot \dots \cdot n}\right| \\
&= \left|\frac{p(p-1)\dots(p-m+1)}{1\cdot 2\cdot \dots \cdot (m-1)}\frac{(p-m)(p-m-1)\dots(p-n+1)}{m\cdot(m+1)\dots\cdot(n-1)}\frac{1}{n}\right| \\
&= C\frac{(m-p)(m+1-p)\dots(n-1-p)}{m(m+1)\dots(n-1)}\frac{1}{n}
\end{aligned}$$

wobei
$$C=\left|\frac{p\,(p-1)\dots(p-m+1)}{1\cdot 2\cdot\dots\cdot(m-1)}\right|.$$
Es folgt
$$c_n=C\left(1-\frac{p}{m}\right)\left(1-\frac{p}{m+1}\right)\dots\left(1-\frac{p}{n-1}\right)\frac{1}{n},$$
wobei alle Faktoren positiv sind. Es gilt somit
$$\begin{aligned}\ln c_n &= \ln C+\ln\left(1-\frac{p}{m}\right)+\ln\left(1-\frac{p}{m+1}\right)+\dots+\ln\left(1-\frac{p}{n-1}\right)+\ln\frac{1}{n}\\ &= \ln C+\sum_{k=m}^{n-1}\ln\left(1-\frac{p}{k}\right)-\ln n.\end{aligned}$$
Es folgt aus der Aufgabe 12 (a) dass
$$\ln(1+t)\le t \text{ für alle } t>-1,$$
insbesondere
$$\ln\left(1-\frac{p}{k}\right)\le-\frac{p}{k}\quad\text{für alle } k\ge m.$$
Somit erhalten wir
$$\ln c_n\le\ln C-p\sum_{k=m}^{n-1}\frac{1}{k}-\ln n.$$
Nach der Ungleichung (12.14) aus dem Beweis von dem Integralkriterium gilt es für jede monoton fallende Funktion f auf $[m,\infty)$
$$\int_m^n f(x)\,dx\le\sum_{k=m}^{n-1}f(k)\,.$$
Für $f(x)=\frac{1}{x}$ erhalten wir
$$\sum_{k=m}^{n-1}\frac{1}{k}\ge\int_m^n\frac{dx}{x}=\ln n-\ln m$$
woraus folgt
$$\ln c_n\le\ln C-p\,(\ln n-\ln m)-\ln n=\ln C+p\ln m-(p+1)\ln n$$
und
$$c_n\le\frac{Cm^p}{n^{p+1}}\text{ für alle } n>m.$$
Da $p>0$, so gilt
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{p+1}}<\infty,$$
woraus folgt
$$\sum_{n=1}^{\infty}c_n<\infty,$$

was zu beweisen war. ■

Bemerkung. Die geometrische Reihe

$$\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$$

ist ein spezieller Fall der binomischen Reihe für $p=-1$, da

$$\binom{-1}{n}=\frac{(-1)(-2)\dots(-n)}{n!}=(-1)^n.$$

Der Definitionsbereich der geometrischen Reihe ist $(-1,1)$ und stimmt mit dem Konvergenzintervall überein.

13.8 Sätze von der majorisierten und monotonen Konvergenz

Satz 13.16 (Satz von der majorisierten Konvergenz) *Sei $\{f_k\}$ eine Folge von stetigen Funktionen auf einem Intervall (a,b) die lokal gleichmäßig auf (a,b) gegen f konvergiert. Sei g eine nichtnegative lokal integrierbare Funktion auf (a,b) mit*

$$\int_a^b g(x)\,dx<\infty. \tag{13.25}$$

Gilt für alle k

$$|f_k|\le g \quad \text{auf } (a,b) \tag{13.26}$$

so gilt

$$\int_a^b f_k(x)\,dx\to\int_a^b f(x)\,dx \quad \text{für } k\to\infty. \tag{13.27}$$

Die Funktion g mit (13.25)-(13.26) heißt *integrierbare Majorante* der Folge $\{f_k\}$.

Beweis. Wählen wir ein $c\in(a,b)$ und beweisen, dass

$$\int_a^c f_k(x)\,dx\to\int_a^c f(x)\,dx. \tag{13.28}$$

Analoge Eigenschaft gilt auch für Integration von c bis b, woraus (13.27) folgen wird.

Für jedes $a<t<c$ haben wir

$$\int_a^c f_k(x)\,dx=\int_a^t f_k(x)\,dx+\int_t^c f_k(x)\,dx.$$

Da $f_k\rightrightarrows f$ auf $[t,c]$, so auf $[t,c]$ gilt

$$\int_t^c f_k(x)\,dx\to\int_t^c f(x)\,dx \quad \text{für } k\to\infty. \tag{13.29}$$

Andererseits,

$$\left|\int_a^t f_k(x)\,dx\right| \le \int_a^t |f_k(x)|\,dx \le \int_a^t g(x)\,dx$$

und analog

$$\left|\int_a^t f(x)\,dx\right| \le \int_a^t g(x)\,dx$$

Somit haben wir

$$\begin{aligned}\int_a^c f_k(x)\,dx - \int_a^c f(x)\,dx &= \int_a^t f_k(x)\,dx - \int_a^t f(x)\,dx \\ &\quad + \int_t^c f_k(x)\,dx - \int_t^c f(x)\,dx\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\left|\int_a^c f_k(x)\,dx - \int_a^c f(x)\,dx\right| &\le \left|\int_a^t f_k(x)\,dx - \int_a^t f(x)\,dx\right| \\ &\quad + \left|\int_t^c f_k(x)\,dx - \int_t^c f(x)\,dx\right| \\ &\le 2\int_a^t g(x)\,dx + \left|\int_t^c f_k(x)\,dx - \int_t^c f(x)\,dx\right|.\end{aligned}$$

Es folgt aus (13.25), dass

$$\int_a^t g(x)\,dx \to 0 \text{ für } t \to a-.$$

Für jedes $\varepsilon > 0$ wählen wir t so nah an a dass

$$\int_a^t g(x)\,dx < \varepsilon/4.$$

Nach (13.29) gibt es $N \in \mathbb{N}$ so dass für alle $k \ge N$ gilt

$$\left|\int_t^c f_k(x)\,dx - \int_t^c f(x)\,dx\right| < \varepsilon/2.$$

Es folgt, dass

$$\left|\int_a^c f_k(x)\,dx - \int_a^c f(x)\,dx\right| < \varepsilon,$$

woraus (13.28) folgt. ■

Korollar 13.17 *Sei $\{f_k\}$ eine Folge von stetigen Funktionen auf einem Intervall (a,b). Angenommen seien die folgenden Bedingungen:*

(a) die Reihe $\sum_{k=1}^\infty f_k(x)$ konvergiert lokal gleichmäßig auf (a,b);

(b) es gilt $\sum_{k=1}^\infty |f_k(x)| \le g(x)$ wobei g eine lokal integrierbare nichtnegative Funktion auf (a,b) mit

$$\int_a^b g(x)\,dx < \infty.$$

Dann gilt

$$\int_a^b \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)\,dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b f_k(x)\,dx. \tag{13.30}$$

Beweis. Bezeichnen wird

$$F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \quad \text{und} \quad F_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x).$$

Es folgt, dass $F_n \overset{loc}{\rightrightarrows} F$ auf (a,b) und

$$|F_n(x)| \le g(x) \quad \forall x \in (a,b)$$

Nach dem Satz 13.16 gilt

$$\int_a^b F_n(x)\,dx \to \int_a^b F(x)\,dx,$$

woraus (13.30) folgt. ■

Der nächste Satz zeigt, dass gleichmäßige Konvergenz unter bestimmen Voraussetzungen aus punktweiser Konvergenz folgt.

Satz 13.18 (Satz von Dini) *Sei $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton steigende Folge von stetigen Funktionen auf einem kompakten Intervall J die punktweise gegen eine stetige Funktion f auf J konvergiert. Dann gilt auch die gleichmäßige Konvergenz $f_n \rightrightarrows f$ auf J.*

11.06.21 Vorlesung 17

Beweis. Bezeichnen wir $g_n = f - f_n$. Dann ist $\{g_n\}$ eine monoton fallende Folge von nichtnegativen stetigen Funktionen die auf J punktweise gegen 0 konvergiert. Wir beweisen, dass $g_n \rightrightarrows 0$ auf J, d.h.

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \ge N \quad \sup_J |g_n| < \varepsilon.$$

Da $g_n \ge 0$ und g_n monoton fallend ist, so reicht es zu beweisen, dass

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n \in \mathbb{N} \text{ so dass } g_n(x) < \varepsilon \text{ für alle } x \in J. \tag{13.31}$$

Fixieren wir ein $\varepsilon > 0$. Nach der Voraussetzung haben wir $g_n(x) \to 0$ für jedes $x \in J$, insbesondere

$$\forall x \in J \quad \exists n_x \in \mathbb{N} \text{ so dass } g_{n_x}(x) < \varepsilon.$$

Da g_{n_x} stetig ist, so existiert ein offenes Intervall U_x mit Zentrum x so dass auch

$$g_{n_x} < \varepsilon \text{ auf } U_x \cap J. \tag{13.32}$$

Das Mengensystem $\{U_x\}_{x\in J}$ ist eine Überdeckung von J mit offenen Intervallen. Nach dem Überdeckungssatz gibt es eine endliche Teilüberdeckung $\{U_{x_i}\}_{i=1}^m$ von J. Setzen wir

$$n = \max(n_{x_1}, n_{x_2}, ..., n_{x_m}).$$

Für jedes $i = 1, ..., m$ gilt $g_n \leq g_{n_i}$ nach der Monotonie der Folge $\{g_n\}$, was zusammen mit (13.32) ergibt

$$g_n < \varepsilon \text{ auf } U_{x_i} \cap J.$$

Da $\bigcup_{i=1}^{m} U_{x_i} \supset J$, so erhalten wir, dass

$$g_n < \varepsilon \text{ auf } J,$$

was zu beweisen war. ■

Satz 13.19 (Sätze von der monotonen Konvergenz)

(a) Sei $\{f_n\}$ eine monoton steigende Folge von nichtnegativen stetigen Funktionen auf einem offenen Intervall (a, b), die gegen eine stetige Funktion f auf (a, b) punktweise konvergiert. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx. \tag{13.33}$$

(b) Sei $\{f_n\}$ eine monoton fallende Folge von nichtnegativen stetigen Funktionen auf einem offenen Intervall (a, b), die gegen eine stetige Funktion f auf (a, b) punktweise konvergiert. Gilt für ein m

$$\int_a^b f_m(x)\, dx < \infty, \tag{13.34}$$

so gilt (13.33).

Die Bedingung (13.34) im Fall (b) ist wesentlich. Z.B., die Folge $f_n(x) \equiv \frac{1}{n}$ auf $(0, \infty)$ ist monoton fallend und $f_n \to 0 = f$ aber

$$\int_0^\infty f_n(x)\, dx = \infty \not\to 0 = \int_0^\infty f(x)\, dx.$$

Beweis. Nach dem Satz von Dini (Satz 13.18) ist die Konvergenz in den beiden Fällen lokal gleichmäßig. Nach dem Satz 13.16, um (13.33) zu beweisen, reicht es eine integrierbare Majorante g zu finden, d.h. eine nichtnegative lokal integrierbare Funktion auf (a, b) die die Bedingungen

$$\int_a^b g(x)\, dx < \infty$$

und

$$|f_n(x)| \leq g(x) \quad \forall x \in (a, b) \ \ \forall n$$

erfüllt. Im Fall (b) ist die Funktion $g = f_m$ die integrierbare Majorante (es reicht die Restfolge $\{f_n\}_{n=m}^{\infty}$ zu betrachten).

Im Fall (a) gibt es zwei Möglichkeiten. Gilt

$$\int_a^b f(x)\, dx < \infty,$$

so ist $g = f$ die integrierbare Majorante.

Nehmen wir jetzt an, dass

$$\int_a^b f(x)\, dx = \infty. \tag{13.35}$$

In diesem Fall müssen wir beweisen, dass

$$\int_a^b f_n(x)\,dx \to \infty \text{ für } n \to \infty. \tag{13.36}$$

Nach definition vom uneigentlichen Integral, für jedes $c \in (a,b)$ gilt

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &= \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \\ &= \lim_{t\to a+}\int_t^c f(x)\,dx + \lim_{s\to b-}\int_c^s f(x)\,dx.\end{aligned}$$

Die Bedingung (13.35) impliziert folgendes: für jedes $E > 0$ existieren t und s mit

$$a < t < s < b$$

und

$$\int_t^s f(x)\,dx > E.$$

Da $f_n \rightrightarrows f$ auf $[t,s]$, so erhalten wir, dass

$$\lim_{n\to\infty}\int_t^s f_n(x)\,dx = \int_t^s f(x)\,dx > E,$$

woraus folgt, dass auch

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx > E.$$

Da E beliebig ist, so erhalten wir (13.36). ■

13.9 Gauss-Integral

Satz 13.20 *Es gilt*

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}. \tag{13.37}$$

Für den Beweis brauchen wir das folgende lemma.

Lemma 13.21 *Für die Funktion* $\left(1+\frac{1}{t}\right)^t$ *auf* $(0,+\infty)$ *ist monoton steigend und konvergiert gegen e für* $t \to +\infty$.

Beweis. Es reicht zu beweisen, dass $\ln\left(1+\frac{1}{t}\right)^t$ monoton steigend ist, d.h.

$$\left(t\ln\left(1+\frac{1}{t}\right)\right)' \geq 0$$

für alle $t > 0$. Die Ableitung ist gleich

$$\left(t\ln\left(1+\frac{1}{t}\right)\right)' = \ln\left(1+\frac{1}{t}\right) + t\frac{1}{1+\frac{1}{t}}\left(-\frac{1}{t^2}\right) = \ln\left(1+\frac{1}{t}\right) - \frac{1}{1+t},$$

und wir müssen beweisen, dass

$$\ln\left(1+\frac{1}{t}\right) \geq \frac{1}{1+t} \tag{13.38}$$

für alle $t > 0$. Setzen wir $x = \frac{1}{1+t}$ so dass $0 < x < 1$. Dann gilt

$$\frac{1}{1-x} = 1 + \frac{1}{t},$$

und (13.38) ist äquivalent zu

$$\frac{1}{1-x} \geq e^x.$$

Diese Ungleichung gilt für alle $0 < x < 1$ da

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + ... \geq 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... = e^x.$$

Um die Identität

$$\lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t = e$$

zu beweisen, reicht es zu zeigen, dass

$$\lim_{t\to+\infty} t \ln\left(1+\frac{1}{t}\right) = 1.$$

Mit der Substitution $x = \frac{1}{t}$ ist diese Identität äquivalent zu

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1, \tag{13.39}$$

und (13.39) gilt, da

$$\ln(1+x) = x + o(x) \sim x \quad \text{für } x \to 0.$$

■

Beweis von dem Satz 13.20. Beweisen wir zuerst die folgende Aussage: die Folge von Funktionen

$$\left\{\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^n\right\}_{n\in\mathbb{N}}$$

ist monotone steigend und für jedes $x \in \mathbb{R}$ gegen e^{x^2} für $n \to \infty$ konvergiert. Für $x = 0$ ist das offensichtlich. Für $x \neq 0$ gilt

$$\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^n = \left(\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{\frac{n}{x^2}}\right)^{x^2}.$$

Es folgt aus dem Lemma 13.21 mit $t = \frac{n}{x^2}$ dass die Folge $\left\{\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{\frac{n}{x^2}}\right\}_{n\in\mathbb{R}}$ monoton steigend ist und gegen e konvergiert, woraus die Aussage folgt.

Somit ist die Folge

$$f_n(x) = \frac{1}{\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^n}$$

monoton fallend und konvergiert für jedes $x \in \mathbb{R}$ gegen e^{-x^2} für $n \to \infty$. Für die Funktion

$$f_1(x) = \frac{1}{1 + x^2}$$

gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} = \pi < \infty.$$

Somit erhalten wir nach dem Satz 13.19(b) dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)\,dx \to \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx. \tag{13.40}$$

Andererseits die Substitution $y = x/\sqrt{n}$ ergibt

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^n} = \sqrt{n}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{(1+y^2)^n}.$$

Die inverse Substitution $y = \cot t$, $t \in (0, \pi)$ ergibt

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)\,dx = \sqrt{n}\int_0^{\pi} \frac{dt}{\sin^2 t\left(1+\frac{\cos^2 t}{\sin^2 t}\right)^n} = \sqrt{n}\int_0^{\pi} \sin^{2n-2} t\,dt.$$

Nach dem Satz 11.19 gilt

$$\int_0^{\pi} \sin^{2n-2} t\,dt \sim \sqrt{\frac{2\pi}{2n-2}} \sim \sqrt{\frac{\pi}{n}} \quad \text{für } n \to \infty,$$

woraus folgt

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)\,dx \to \sqrt{\pi},$$

was zusammen mit (13.40) ergibt (13.37). ■

Korollar 13.22 $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

Beweis. Nach Definition (12.32) von Γ-Funktion und nach (13.37) erhalten wir

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\infty} e^{-t}t^{-1/2}dt = 2\int_0^{\infty} e^{-t}d\left(t^{1/2}\right) = 2\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx = 2\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi}.$$

■

13.10 Approximationssatz von Weierstraß

Hauptsatz 13.23 *Für jede stetige Funktion f auf einem kompakten Intervall J gibt es eine Folge von Polynomen $\{P_n\}$ mit $P_n \rightrightarrows f$ auf J für $n \to \infty$.*

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir $J = [0,1]$ an. Wir verwenden die *Bernstein-Polynome*: für jedes $n \in \mathbb{N}$ und $k = 0, ..., n$ setzen wir

$$B_{n,k}(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}.$$

Zum Beispiel,

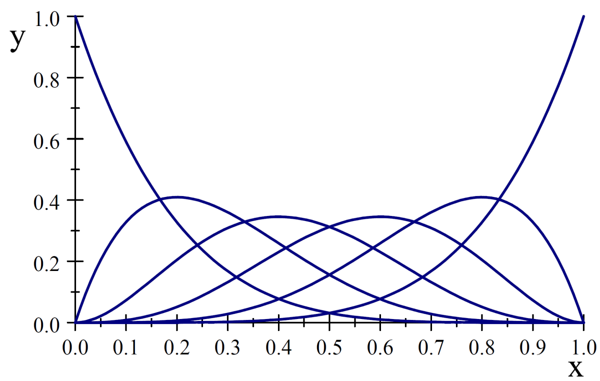
$$B_{1,0}(x) = 1 - x, \quad B_{1,1}(x) = x$$

$$B_{2,0}(x) = (1-x)^2, \quad B_{2,1}(x) = 2x(1-x), \quad B_{2,2}(x) = x^2.$$

Offensichtlich ist das Polynom $B_{n,k}$ immer nichtnegativ auf $[0,1]$. Sei $0 < k < n$. Dann die Funktion $B_{n,k}(x)$ verschwindet an $x = 0$ und $x = 1$, und hat die Maximumstelle an $x = \frac{k}{n}$ da

$$\begin{aligned} (\ln B_{n,k}(x))' &= (k \ln x + (n-k)\ln(1-x))' \\ &= \frac{k}{x} - \frac{n-k}{1-x} \end{aligned}$$

und die Gleichung $\frac{k}{x} - \frac{n-k}{1-x} = 0$ die einzige Nullstelle $x = \frac{k}{n}$ hat.



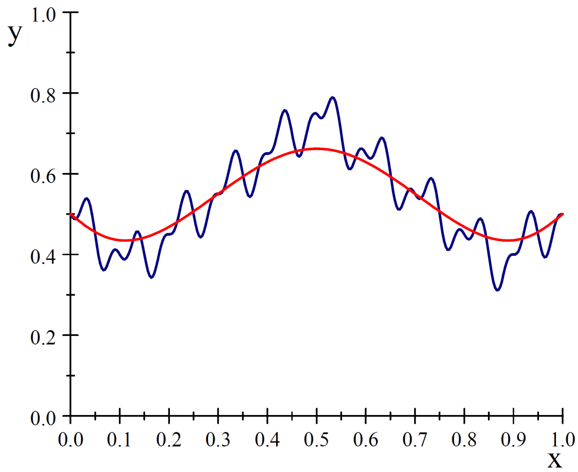
Polynome $B_{5,k}$, $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir das Polynom

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) B_{n,k}(x) \tag{13.41}$$

und beweisen, dass

$$P_n \rightrightarrows f \quad \text{auf } [0,1] \quad \text{für } n \to \infty.$$



Funktion f (blau) und ihres Polynom $P_n(x)$ (rot) mit $n = 20$

Der Beweis basiert auf den folgenden Identitäten für Bernstein-Polynome, die für alle x gelten:

$$\sum_{k=0}^{n} B_{n,k}(x) = 1 \tag{13.42}$$

$$\sum_{k=0}^{n} kB_{n,k}(x) = nx \tag{13.43}$$

$$\sum_{k=0}^{n} k(k-1) B_{n,k}(x) = n(n-1)x^2 \tag{13.44}$$

und

$$\sum_{k=0}^{n} \left(x - \frac{k}{n}\right)^2 B_{n,k}(x) = \frac{x(1-x)}{n}. \tag{13.45}$$

Für den Beweis verwenden wir den binomischen Lehrsatz in der Form:

$$(x+a)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k a^{n-k}. \tag{13.46}$$

Für $a = 1 - x$ erhalten wir

$$1 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} B_{n,k}(x),$$

was mit (13.42) übereinstimmt.

Ableiten von (13.46) ergibt

$$n(x+a)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} kx^{k-1}a^{n-k}. \tag{13.47}$$

Einsetzen hier $a = 1 - x$ und Multiplizieren mit x ergibt (13.43).

Weiteres Ableiten von (13.47) ergibt

$$n\left(n-1\right)\left(x+a\right)^{n-2}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}k\left(k-1\right)x^{k-2}a^{n-k}.$$

Einsetzen hier $a=1-x$ und Multiplizieren mit x^2 ergibt (13.44).

Es folgt aus (13.43) und (13.44), dass

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}k^2B_{n,k}\left(x\right) &= \sum_{k=0}^{n}k\left(k-1\right)B_{n,k}\left(x\right)+\sum_{k=0}^{n}kB_{n,k}\left(x\right)\\ &= n\left(n-1\right)x^2+nx.\end{aligned}$$

Jetzt beweisen wir (13.45). Da

$$\left(x-\frac{k}{n}\right)^2=x^2-2x\frac{k}{n}+\frac{k^2}{n^2},$$

so erhalten wir

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\left(x-\frac{k}{n}\right)^2B_{n,k}\left(x\right) &= x^2\sum_{k=0}^{n}B_{n,k}\left(x\right)-2\frac{x}{n}\sum_{k=0}^{n}kB_{n,k}\left(x\right)+\frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n}k^2B_{n,k}\left(x\right)\\ &= x^2-2\frac{x}{n}nx+\frac{1}{n^2}\left(n\left(n-1\right)x^2+nx\right)\\ &= -\frac{x^2}{n}+\frac{x}{n}\\ &= \frac{\left(1-x\right)x}{n}.\end{aligned}$$

Jetzt können wir für die Polynome P_n aus (13.41) beweisen dass $P_n\rightrightarrows f$ auf $[0,1]$. Nach dem Lemma 11.4, die Funktion f ist auf $[0,1]$ gleichmäßig stetig, d.h. für jedes $\varepsilon>0$ existiert ein $\delta>0$ so dass für alle $x,y\in[0,1]$

$$|x-y|<\delta\Rightarrow|f\left(x\right)-f\left(y\right)|<\varepsilon. \tag{13.48}$$

Fixieren wir ein solches Paar ε,δ und schätzen die Differenz $f\left(x\right)-P_n\left(x\right)$ wie folgt ab. Für jedes $x\in[0,1]$ mit Hilfe von (13.42) erhalten wir

$$\begin{aligned}f\left(x\right)-P_n\left(x\right) &= \sum_{k=0}^{n}f\left(x\right)B_{n,k}\left(x\right)-\sum_{k=0}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)B_{n,k}\left(x\right)\\ &= \sum_{k=0}^{n}\left(f\left(x\right)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right)B_{n,k}\left(x\right)\\ &= \sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|<\delta}\left(f\left(x\right)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right)B_{n,k}\left(x\right)+\sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|\geq\delta}\left(f\left(x\right)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right)B_{n,k}\left(x\right).\end{aligned}$$

16.06.21 **Vorlesung 18**

Im Bereich $\left|\frac{k}{n}-x\right|<\delta$ gilt nach (13.48)

$$\left|f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right|<\varepsilon$$

woraus folgt, dass

$$\begin{aligned}\left|\sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|<\delta}\left(f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right)B_{n,k}(x)\right| &\leq \sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|<\delta}\left|f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right|B_{n,k}(x)\\ &\leq \varepsilon\sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|<\delta}B_{n,k}(x)\leq\varepsilon.\end{aligned}$$

Sei $C=\sup_{[0,1]}|f|<\infty$. Dann gilt

$$\left|\sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|\geq\delta}\left(f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right)B_{n,k}(x)\right|\leq 2C\sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|\geq\delta}B_{n,k}(x).$$

Nach (13.45) gilt

$$\sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|\geq\delta}B_{n,k}(x)\leq\sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|\geq\delta}\frac{\left(x-\frac{k}{n}\right)^2}{\delta^2}B_{n,k}(x)\leq\frac{1}{\delta^2}\frac{x(1-x)}{n}\leq\frac{1}{\delta^2 n},$$

woraus folgt

$$\left|\sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|\geq\delta}\left(f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right)B_{n,k}(x)\right|\leq\frac{2C}{\delta^2 n}.$$

Somit erhalten wir für alle $x\in[0,1]$

$$|f(x)-P_n(x)|\leq\varepsilon+\frac{2C}{\delta^2 n}$$

und somit

$$\|f-P_n\|_{[0,1]}\leq\varepsilon+\frac{2C}{\delta^2 n}.$$

Jetzt wählen wir ein $N\in\mathbb{N}$ so gross dass

$$\frac{2C}{\delta^2 N}<\varepsilon.$$

Dann gilt für alle $n\geq N$

$$\|f-P_n\|_{[0,1]}\leq 2\varepsilon,$$

woraus $P_n\rightrightarrows f$ folgt. ■

13.11 * Zweiter Beweis des Approximationssatzes von Weierstrass

Zweiter Beweis von dem Satz 13.23. Bezeichnen wir mit $A[a,b]$ die Menge von allen stetigen Funktionen f auf $[a,b]$ so dass es eine Folge $\{P_n\}$ von Polynomen gibt mit $P_n \rightrightarrows f$ auf $[a,b]$. We müssen beweisen, dass $A[a,b]$ alle stetige Funktionen auf $[a,b]$ enthält.

Schritt 1. Beweisen wir, dass die Funktion $f(x) = |x|$ in $A[-1,1]$ liegt. Wir haben

$$|x| = \sqrt{x^2} = \sqrt{1 + (x^2 - 1)} = (1+y)^{1/2},$$

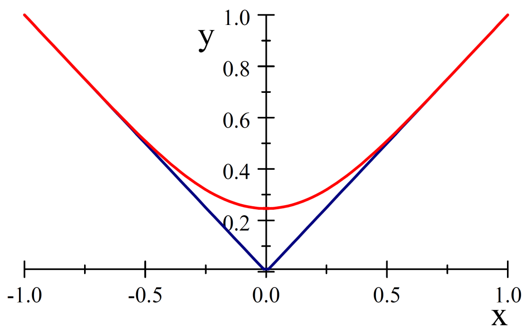
wobei $y = x^2 - 1$. Für $x \in [-1,1]$ gilt $y \in [-1,0]$. Es folgt aus der binomischen Reihe (13.24), dass

$$(1+y)^{1/2} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{1/2}{k} y^k,$$

wobei nach dem Satz 13.15 die Konvergenz gleichmäßig auf $[-1,1]$ ist. Daraus folgt, dass

$$|x| = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{1/2}{k} \left(x^2 - 1\right)^k,$$

wobei die Konvergenz gleichmäßig auf $[-1,1]$ ist. Da die Partialsummen dieser Reihe Polynome sind, so erhalten wir, dass $|x| \in A[-1,1]$.



Funktionen $|x|$ und $\displaystyle\sum_{k=0}^{5} \binom{1/2}{k} \left(x^2 - 1\right)^k$

Schritt 2. Bemerken wir die folgenden einfachen Eigenschaften von $A[a,b]$, die direkt aus der Definition folgen.

(*i*) Gilt $f, g \in A[a,b]$ so gilt auch $\alpha f + \beta g \in A[a,b]$ für beliebige $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(*ii*) Ist $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Funktionen aus $A[a,b]$ mit $g_n \rightrightarrows f$ auf $[a,b]$ so gilt auch $f \in A[a,b]$.

(*iii*) Für jede Funktion $f(x) \in A[a,b]$ gilt $f\left(\frac{x-c}{\lambda}\right) \in A[\lambda a + c, \lambda b + c]$ für beliebige $\lambda > 0$ und $c \in \mathbb{R}$.

Schritt 3. Es folgt aus den Schritten 1 und 2, dass

$$\left|\frac{x-c}{\lambda}\right| \in A\left[-\lambda+c, \lambda+c\right].$$

Gegeben seien ein Intervall $[a,b]$ und $c \in \mathbb{R}$, es gibt λ groß genug so dass

$$-\lambda+c<a<b<\lambda+c.$$

Es folgt, dass

$$\left|\frac{x-c}{\lambda}\right| \in A\left[a,b\right],$$

und Multiplizieren mit λ ergibt, dass

$$|x-c| \in A\left[a,b\right].$$

Somit erhalten wir, dass für beliebige Folgen $\{c_j\}_{k=0}^n$ und $\{\alpha_j\}_{k=0}^n$

$$\sum_{j=0}^n \alpha_j \left|x-c_j\right| \in A\left[a,b\right].$$

Sei f eine stetige Funktion auf $[a,b]$. Da f auf $[a,b]$ auch gleichmäßig stetig ist (Lemma 11.4), so gibt es für jedes $\varepsilon>0$ ein $\delta>0$ so dass

$$x,y \in [a,b]\,,\ |x-y|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon. \tag{13.49}$$

Wählen wir eine Zerlegung $\{c_k\}_{k=0}^n$ von $[a,b]$ so dass $c_k-c_{k-1}<\delta$ für alle $k=1,...,n$. In jedem Intervall $[c_{k-1},c_k]$ gilt nach (13.49)

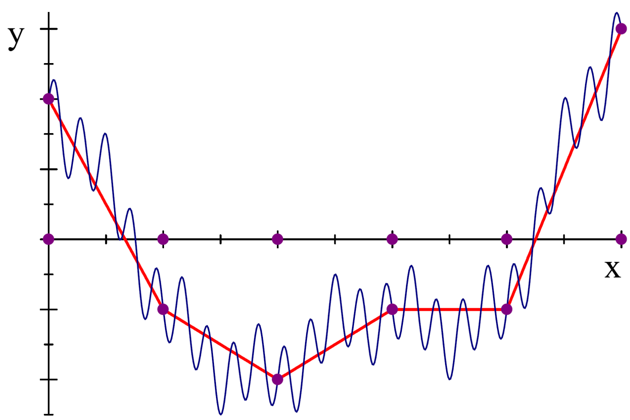
$$x,y \in [c_{k-1},c_k] \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon.$$

Jetzt wählen wir eine Folge $\{\alpha_j\}_{j=0}^n$ von reellen Zahlen so dass für die folgende stückweise lineare Funktion

$$g_n(x)=\sum_{j=0}^n \alpha_j \left|x-c_j\right| \tag{13.50}$$

gilt

$$g_n(c_k)=f(c_k) \quad \text{für alle } k=0,...,n. \tag{13.51}$$



Funktionen f (blau) und g_n (rot), $n=5$

Wir beweisen unterhalb im Schritt 4, dass (13.51) immer möglich ist. Gilt (13.51), so leiten wir daraus her, dass

$$|f(x) - g_n(x)| < 2\varepsilon \text{ für alle } x \in [a,b]\,.$$

Jedes $x \in [a,b]$ liegt in einem Intervall $[c_{k-1}, c_k]$. Im Intervall $[c_{k-1}, c_k]$ ist jede Funktion $|x - c_j|$ linear (da c_j außerhalb (c_{k-1}, c_k) liegt), woraus folgt, dass auch $g_n(x)$ im Intervall $[c_{k-1}, c_k]$ linear ist. Somit gilt für jedes $x \in [c_{k-1}, c_k]$

$$|g_n(x) - g_n(c_k)| \leq |g_n(c_{k-1}) - g_n(c_k)| = |f(c_{k-1}) - f(c_k)| < \varepsilon.$$

Da auch

$$|f(x) - f(c_k)| < \varepsilon,$$

so erhalten wir für alle $x \in [c_{k-1}, c_k]$

$$|f(x) - g_n(x)| \leq |f(x) - f(c_k)| + |g_n(x) - g_n(c_k)| < 2\varepsilon.$$

Es folgt

$$\|f - g_n\|_{[a,b]} \leq 2\varepsilon,$$

und somit $g_n \rightrightarrows f$ für $n \to \infty$. Da $g_n \in A[a,b]$, so erhalten wir $f \in A[a,b]$.

Schritt 4. Es bleibt zu beweisen, dass die Koeffizienten α_j für die Funktion g_n in (13.50) so gewählt werden können, dass (13.51) gilt, was äquivalent zur Lösbarkeit des folgenden Systems von Gleichungen für α_j ist:

$$\sum_{j=0}^{n} \alpha_j |c_k - c_j| = f(c_k) \quad \text{für alle } k = 0, ..., n.$$

Das ist ein lineares System von $n+1$ Gleichungen mit $n+1$ Unbekannten α_j. Es hat eine eindeutige Lösung $\{\alpha_j\}$ für beliebige Folge $\{f(c_k)\}$ genau dann, wenn das homogene System

$$\sum_{j=0}^{n} \alpha_j |c_k - c_j| = 0 \text{ für alle } k = 0, ..., n \tag{13.52}$$

nur die trivialle Lösung $\alpha_j = 0$ hat. Angenommen, dass (13.52) gilt, betrachten wir die Funktion

$$h(x) = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j |x - c_j|\,.$$

Da $h(x)$ an allen Stellen $x = c_k$ verschwindet und in jedem Intervall $[c_{k-1}, c_k]$ die Funktion $h(x)$ linear ist, so gilt

$$h(x) = 0 \ \ \forall x \in [c_{k-1}, c_k]\,.$$

Für jedes $x \in (c_{k-1}, c_k)$ ist $x - c_j$ positiv für $j \leq k-1$ und negativ für $j \geq k$. Es folgt, dass für $x \in (c_{k-1}, c_k)$ gilt:

$$h(x) = \alpha_0 x + \alpha_1 x + ... + \alpha_{k-1} x - \alpha_k x - ... - \alpha_n x + \text{const}\,.$$

Da $h'(x) = 0$ für alle $x \in (c_{k-1}, c_k)$, so folgt es, dass für alle $k = 1, ..., n$

$$\alpha_0 + \alpha_1 + ... + \alpha_{k-1} - \alpha_k - \alpha_{k+1} ... - \alpha_n = 0.$$

Ist $k \leq n-1$, so Subtrahieren diese Gleichung aus

$$\alpha_0 + \alpha_1 + ... + \alpha_{k-1} + \alpha_k - \alpha_{k+1} - ... - \alpha_n = 0$$

ergibt $\alpha_k = 0$, für alle $k = 1, ..., n-1$. Somit erhalten wir für alle $x \in [a, b]$

$$\begin{aligned} h(x) &= \alpha_0 |x - c_0| + \alpha_n |x - c_n| \\ &= \alpha_0 (x - c_0) - \alpha_n (x - c_n) \\ &= (\alpha_0 - \alpha_n) x - \alpha_0 c_0 + \alpha_n c_n. \end{aligned}$$

Da $h(x) = 0$ so folgt es $\alpha_0 = \alpha_n$ und $\alpha_0 c_0 = \alpha_n c_n$ woraus folgt $\alpha_0 = \alpha_n = 0$. Wir beschließen, dass $\alpha_k = 0$ für alle $k = 0, ..., n$, was zu beweisen war. ■

Eine interessante Folgerung aus diesem Beweis ist, dass

$$\det\left(|c_i - c_j|\right)_{i,j=0}^n \neq 0$$

für beliebige Folge $\{c_k\}_{k=0}^n$ von verschiedenen reellen Zahlen.

13.12 * Fourier-Reihen

Eine Fourier-Reihe ist eine Reihe der Form

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \tag{13.53}$$

wobei $x \in \mathbb{R}$ eine Variable ist und a_k, $b_k \in \mathbb{R}$ die Koeffizienten der Reihe sind. Eine Partialsumme der Reihe ist

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

Diese Funktion heißt aus dem offensichtlichen Grund ein *trigonometrisches Polynom.*

In diesem Abschnitt besprechen wir die Frage, ob eine gegebene Funktion sich als Summe einer Fourier-Reihe darstellen lässt. Wir beginnen mit dem folgenden Lemma.

Lemma 13.24 *Konvergiert die Fourier-Reihe* (13.53) *gleichmäßig auf* $\mathbb{R}$ *gegen eine Funktion* $f(x)$*, so gilt für alle* k*,*

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx dx \quad und \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin kx dx. \tag{13.54}$$

Beweis. Beachten Sie, dass die Integrale in (13.54) definiert sind, weil die Funktion $f(x)$ stetig ist als gleichmäßiger Grenzwert der stetigen Funktionen. Fixieren wir eine nicht-negative ganze Zahl n und multiplizieren die Identität

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \tag{13.55}$$

um $\cos nx$. Die resultierende Reihe konvergiert immer noch gleichmäßig (weil $|\cos nx| \leq 1$), daher nach dem Satz 13.8

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx dx &= \frac{a_0}{2}\int_0^{2\pi}\cos nx dx \\ &+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\int_0^{2\pi}\cos kx\cos nx dx + b_k\int_0^{2\pi}\sin kx\cos nx dx\right).\end{aligned} \tag{13.56}$$

Mit Hilfe der Identität

$$\cos a\cos b = \frac{1}{2}\left(\cos(a-b)+\cos(a+b)\right),$$

erhalten erhalten wir

$$\int_0^{2\pi}\cos kx\cos nx dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\cos(k-n)x\ dx + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\cos(k+n)x\ dx. \tag{13.57}$$

Verwenden Sie nun die folgende Formel: für jede ganze Zahl l,

$$\int_0^{2\pi}\cos lx\ dx = \begin{cases} 2\pi, & l=0 \\ 0, & l\neq 0,\end{cases} \tag{13.58}$$

da im Fall $l \neq 0$ sich das Integral auf $[\sin lx]_0^{2\pi} = 0$ reduziert. Aus (13.57) folgt

$$\int_0^{2\pi}\cos kx\cos nx dx = \begin{cases} 2\pi, & k=n=0 \\ \pi, & k=n\neq 0, \\ 0, & k\neq n.\end{cases}$$

Als nächstes haben wir analog für alle k, n,

$$\int_0^{2\pi}\sin kx\cos nx dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(\sin(k+n)x+\sin(k-n)x\right)dx = 0$$

weil

$$\int_0^{2\pi}\sin lx\ dx = 0 \text{ für alle } l\in\mathbb{Z}. \tag{13.59}$$

Somit verschwinden alle Glieder in der rechten Seite von (13.56) außer dem Glied mit $k=n$. Im Fall $n=0$ erhalten wir dann

$$\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = \frac{a_0}{2}2\pi = \pi a_0,$$

und im Fall $n>0$:

$$\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx dx = \pi a_n$$

so dass (13.54) in beiden Fällen gilt.

Die Koeffizienten b_k werden auf ähnliche Weise durch Multiplikation von (13.55) mit $\sin nx$ bestimmt. ■

Beachten Sie, dass alle Glieder in der Fourier-Reihe 2π-periodische Funktionen auf $\mathbb{R}$ sind. Daher ist die Summe immer (wenn sie existiert) auch 2π-periodisch.

Im Folgenden ist die Funktion $f(x)$ entweder 2π-periodisch auf $\mathbb{R}$ oder nur auf $[0.2\pi]$ definiert.

Lemma 13.24 motiviert die folgende Definition.

Definition. Definieren wir für jede Riemann-integrierbare Funktion f auf $[0, 2\pi]$ deren *Fourier-Koeffizienten* mit

$$\boxed{a_k = a_k(f) = \tfrac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos kx\,dx} \text{ und } \boxed{b_k = b_k(f) = \tfrac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin kx\,dx} \tag{13.60}$$

für alle ganzen Zahlen $k \geq 0$. Die Fourier-Reihe der Funktion f ist die Reihe

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx + b_k\sin kx).$$

Da wir noch nicht wissen, ob diese Reihe konvergiert und wenn ja dann ob seine Summe $f(x)$ ist, so schreiben wir

$$\boxed{f(x) \sim \tfrac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx + b_k\sin kx)} \tag{13.61}$$

was bedeutet, dass die Koeffizienten a_k und b_k durch (13.60) bestimmt sind. Wir werden herausfinden, unter welchen Bedingungen von f das Zeichen $\sim$ durch $=$ ersetzt werden kann und in welchem Sinn die Reihe konvergiert.

Beispiel. 1. Wenn $f(x) \equiv 1$ dann erhalten wir aus (13.60), (13.58) und (13.59), dass $a_0 = 1$ während $a_k = b_k = 0$ für alle $k \geq 1$. Also ist in diesem Fall die Fourier-Reihe von $f(x)$ identisch mit 1 und fällt daher mit $f(x)$ zusammen.

2. Betrachten Sie auf $[0, 2\pi]$ eine Stufenfunktion

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \leq \pi, \\ 0, & x > \pi. \end{cases}$$

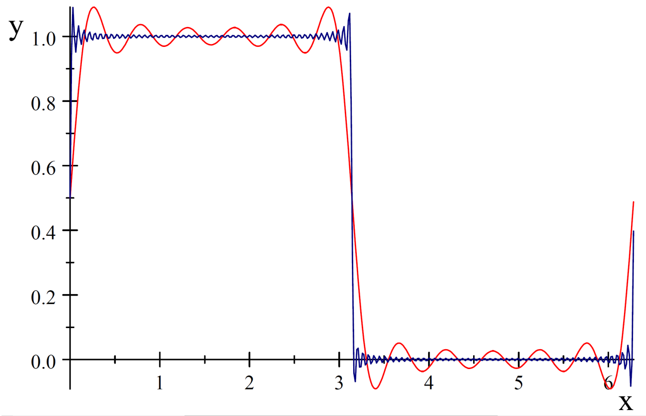
Dann

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} dx = 1, \\ a_k &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos kx\,dx = 0, \quad k > 0, \\ b_k &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin kx\,dx = -\frac{1}{\pi}\left[\frac{\cos kx}{k}\right]_0^{\pi} = \frac{1}{\pi k}\left(1-(-1)^k\right) = \begin{cases} 0, & k \text{ gerade}, \\ \frac{2}{\pi k}, & k \text{ ungerade}. \end{cases} \end{aligned}$$

Somit hat die Fourier-Reihe die Form

$$f \sim \frac{1}{2} + \sum_{l=0}^{\infty}\frac{2}{\pi(2l+1)}\sin(2l+1)x = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sin x + \frac{2}{3\pi}\sin 3x + \frac{2}{5\pi}\sin 5x + ...$$

Es ist überhaupt nicht ersichtlich, ob man hier Gleichheit hat. Unterhalb sind die Graphen der Partialsummen $S_5(x)$ (rot) und $S_{50}(x)$ (blau) dieser Fourier-Reihe, die auf Konvergenz schließen lassen, außer den Punkten $x = 0, \pi, 2\pi$:



Für das Folgende brauchen wir eine komplexe Form der Fourier-Reihe. Beachten Sie zunächst, dass das Riemann-Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ für komplexwertige Funktionen f wie folgt definiert wird:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \operatorname{Re} f(x)\,dx + i\int_a^b \operatorname{Im} f(x)\,dx,$$

vorausgesetzt dass sowohl $\operatorname{Re} f$ als auch $\operatorname{Im} f$ integrierbar sind. Die meisten Eigenschaften der Integration lassen sich leicht auf komplexwertige Funktionen übertragen (in insbesondere Linearität, Additivität, LM-Ungleichung, die Newton-Leibniz Formel, partielle Integration).

Definition. Für jede komplexwertige integrierbare Funktion f auf $[0, 2\pi]$ definieren wir ihre *komplexe Fourier-Koeffizienten* für alle $k \in \mathbb{Z}$ durch

$$\boxed{c_k = c_k(f) = \tfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,e^{-ikx}dx}. \tag{13.62}$$

Die komplexe Fourier-Reihe von f ist die Reihe

$$f(x) \sim \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{ikx}.$$

Lemma 13.25 *Die komplexe Fourier-Reihe stimmt mit der (reellen) Fourier-Reihe überein, vorausgesetzt, dass die beiden Reihen konvergieren.*

Beweis. Tatsächlich ist die komplexe Fourier-Reihe eine Doppelreihe, die sich wie folgt umschreiben lässt:

$$\begin{aligned}\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{ikx} &= c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{ikx} + \sum_{k=1}^{\infty} c_{-k} e^{-ikx} \\ &= c_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(c_k e^{ikx} + c_{-k} e^{-ikx}\right).\end{aligned}$$

Nach der Definitionen von a_k, b_k, c_k und mit Hilfe von der Euler-Formel

$$e^{ikx} = \cos kx + i \sin kx$$

erhalten wir

$$c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\, dx = \frac{a_0}{2}$$

und für $k > 0$

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx \; dx - i \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin kx dx = \frac{a_k - ib_k}{2},$$

$$c_{-k} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\, e^{ikx} dx = \frac{a_k + ib_k}{2}.$$

Deshalb,

$$\begin{aligned} c_k e^{ikx} + c_{-k} e^{-ikx} &= \frac{1}{2}(a_k - ib_k)(\cos kx + i \sin kx) \\ &\quad + \frac{1}{2}(a_k + ib_k)(\cos kx - i \sin kx) \\ &= a_k \cos kx + b_k \sin kx. \end{aligned}$$

Es folgt

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikx} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

was zu beweisen war. ∎

Um den nächsten Satz zu formulieren, benötigen wir die folgende Notation

$$f(x-) = \lim_{y \to x-} f(y)$$

und

$$f(x+) = \lim_{y \to x+} f(y).$$

Nehmen wir an, dass $f(x-)$ existiert und endlich ist. Wir sagen, dass f *links differenzierbar* an x, wenn der Grenzwert

$$\lim_{y \to x-} \frac{f(y) - f(x-)}{y - x} \text{ existiert und ist endlich.}$$

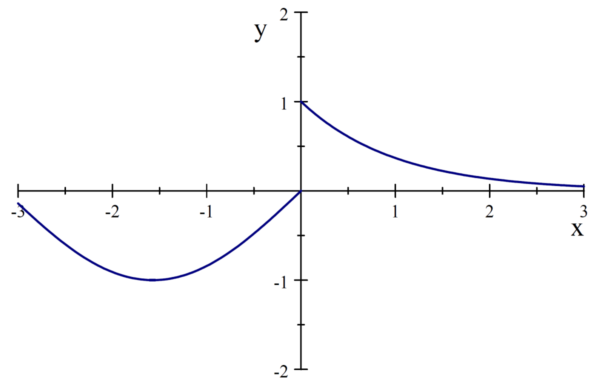
Der Wert dieses Grenzwertes heißt die linke Ableitung von f und wird mit $f'(x-)$ bezeichnet. Ähnlich definiert man die rechte Differenzierbarkeit und die rechte Ableitung $f'(x+)$.

Zum Beispiel für die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x \geq 0, \\ \sin x, & x \leq 0 \end{cases}$$

wir haben

$$f(0+) = 1, f(0-) = 0, f'(0+) = -1, f'(0-) = 1.$$



Wenn f an x differenzierbar ist, dann ist f natürlich links und rechts differenzierbar und

$$f'(x) = f'(x-) = f'(x+).$$

Hauptsatz 13.26 *Sei f eine 2π-periodische integrierbare Funktion, die an einer Stelle $x \in \mathbb{R}$ rechts ist und links differenzierbar ist. Dann konvergiert die Fourier-Reihe von f an x gegen $\frac{f(x-)+f(x+)}{2}$, d.h.*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) = \frac{f(x-) + f(x+)}{2}.$$

Ist zusätzlich $f(x)$ stetig an x, dann konvergiert die Fourier-Reihe von f an x gegen $f(x)$.

Beweis. Setzen wir

$$S_n(x) = \sum_{|k| \leq n} c_k e^{ikx}.$$

Wir müssen beweisen, dass

$$S_n(x) \to \frac{f(x-) + f(x+)}{2} \text{ für } n \to \infty.$$

Einsetzen

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-ikt} dt,$$

in $S_n(x)$ ergibt

$$S_n(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{|k| \leq n} \int_0^{2\pi} f(t) e^{ik(x-t)} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \left(\sum_{|k| \leq n} e^{ik(x-t)} \right) dt. \tag{13.63}$$

Setzen wir $u = x - t$ und betrachten die Funktion

$$D(u) = \sum_{|k| \leq n} e^{iku},$$

die *Dirichlet-Kern* heißt. Die Funktion $D(u)$ ist offensichtlich stetig (und sogar unendlich oft differenzierbar). Für $u=0$ gilt

$$D(u)=\sum_{|k|\leq n}1=2n+1.$$

Für $u\neq 0$ ist $D(u)$ eine Summe der geometrischen Folge, so dass

$$\begin{aligned}D(u) &= \sum_{k=-n}^{n}e^{iku}=\sum_{k=-n}^{n}\left(e^{iu}\right)^k=e^{-inu}\sum_{k=0}^{2n}\left(e^{iu}\right)^k\\ &= e^{-inu}\frac{\left(e^{iu}\right)^{2n+1}-1}{e^{iu}-1}=\frac{e^{iu\left(n+\frac{1}{2}\right)}-e^{-iu\left(n+\frac{1}{2}\right)}}{e^{iu/2}-e^{-iu/2}}\\ &= \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{\sin\frac{u}{2}}.\end{aligned}$$

Es folgt (13.63) dass

$$\begin{aligned}S_n(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(t)\,D(x-t)\,dt \qquad \text{(Substitution } u=x-t)\\ &= -\frac{1}{2\pi}\int_x^{x-2\pi}f(x-u)\,D(u)\,du\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{x-2\pi}^{x}f(x-u)\,D(u)\,du.\end{aligned}$$

Da die Funktionen f und D 2π-periodisch sind, hat das Integral der Funktion $f(x-u)\,D(u)$ auf jedem Intervall der Länge 2π den gleichen Wert. Auch mit Hilfe von $D(u)=D(-u)$ erhalten wir

$$\begin{aligned}S_n(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x-u)\,D(u)\,du \qquad (13.64)\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\left(f(x-u)+f(x+u)\right)D(u)\,du.\end{aligned}$$

Zum Beispiel, für die Funktion $f\equiv 1$ haben wir $S_n(x)=1$ und es folgt aus (13.64), dass

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}D(u)\,du=1$$

(diese Identität folgt auch direkt aus (12.37)). Deshalb,

$$\begin{aligned}S_n(x)-\frac{f(x-)+f(x+)}{2} &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\left[f(x-u)+f(x+u)\right]D(u)\,du\\ &\quad -\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{f(x-)+f(x+)}{2}D(u)\,du\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}[(f(x-u)-f(x-))\\ &\quad +(f(x+u)-f(x+))]D(u)\,du.\end{aligned}$$

Definieren wir die Funktion $F_+(u)$ für $u>0$ durch

$$F_+(u)=\frac{f(x+u)-f(x+)}{u}$$

so dass F_+ lokal integrierbar in $(0,+\infty)$ ist. Nach der Voraussetzung, $\lim_{u\to 0}F_+(u)$ existiert und ist endlich, so dass F_+ sich an der Stelle $u=0$ nach Stetigkeit erweitern lässt. Dies impliziert, dass F_+ integrierbar auf jedem Intervall $[0,a]$ ist, insbesondere auf $[0,\pi]$. Analog definieren wir für $u>0$ die Funktion

$$F_-(u)=\frac{f(x-u)-f(x-)}{u}$$

und beachten, dass F_- auf $[0,\pi]$ integrierbar ist.

Als nächstes schreiben wir

$$\begin{aligned}\left[(f(x-u)-f(x-))+(f(x+u)-f(x+))\right]D(u) &= \frac{F_-(u)\,u+F_+(u)\,u}{\sin\frac{u}{2}}\sin(n+\frac{1}{2})u\\ &= G(u)\sin(n+\frac{1}{2})u,\end{aligned}$$

wobei

$$G(u)=\frac{F_-(u)+F_+(u)}{\sin\frac{u}{2}}u.$$

Die Funktion $\frac{u}{\sin u/2}$ ist stetig auf $(0,\pi]$ und lässt stetig auf $u=0$ erweitern so dass $\frac{u}{\sin u/2}$ stetig auf $[0,\pi]$ ist. Da F_- und F_+ auf $[0,\pi]$ integrierbar sind, so folgt es, dass $G(u)$ auf $[0,\pi]$ integrierbar ist. Da

$$S_n(x)-\frac{f_+(x)+f_-(x)}{2}=\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi G(u)\sin(n+\frac{1}{2})udu,$$

so schließen wir nach dem Riemann-Lemma (siehe Übungen) dass die rechte Seiten dieser Identität gehen 0 für $n\to\infty$ konvergiert, was zu beweisen war. ■

Beispiel. Sei $f(x)$ eine 2π-periodische Funktion auf $\mathbb{R}$, die auf $[0,2\pi)$ wie folgt definiert ist

$$f(x)=\begin{cases}1, & 0\le x\le\pi,\\ 0, & \pi<x<2\pi.\end{cases}$$

Wie wir oberhalb gesehen haben, die Fourier-Reihe dieser Funktion ist

$$f(x)\sim\frac{1}{2}+\sum_{l=0}^{\infty}\frac{2}{\pi(2l+1)}\sin(2l+1)x=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\sin x+\frac{2}{3\pi}\sin 3x+\frac{2}{5\pi}\sin 5x+...$$

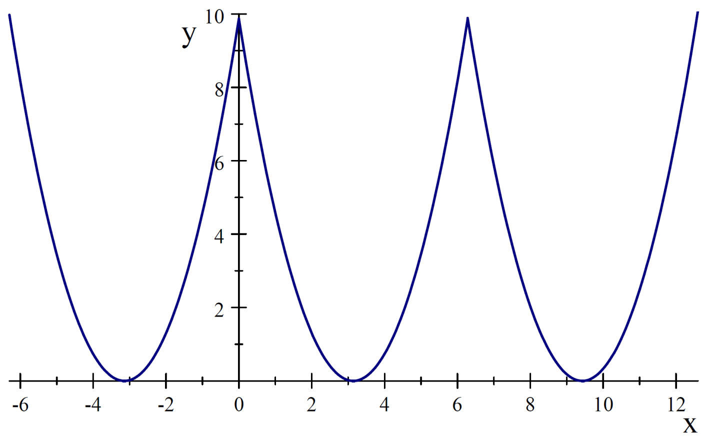
Wenn $x=\pi$ ist, so ist die Summe der Fourier-Reihen $\frac{1}{2}$, was stimmt mit $\frac{f(\pi-)+f(\pi+)}{2}=\frac{1+0}{2}=\frac{1}{2}$ überein. An allen anderen Punkten in $(0,2\pi)$ ist the Funktion f ist; daher konvergiert die Fourier-Reihe gegen $f(x)$. Nehmen wir, zum Beispiel, $x=\pi/2$. Ersetzen von $\sim$ durch $=$ und Anwendung von $\sin(2l+1)\frac{\pi}{2}=(-1)^l$ ergibt

$$1=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^l}{2l+1}=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+...\right)$$

woher

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+...=\frac{\pi}{4}.$$

Beispiel. Betrachten wir die Funktion $f(x)=(x-\pi)^2$ auf $[0,2\pi]$, das 2π-periodisch auf $\mathbb{R}$ erweitert wird:



Berechnen wir die reellen Fourier-Koeffizienten der Funktion f:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(x-\pi)^2\,dx \qquad \text{(Substitution } y=x-\pi) \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}y^2dy=\frac{1}{\pi}\frac{2\pi^3}{3}=\frac{2\pi^2}{3}, \end{aligned}$$

und für $k\geq 1$

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(x-\pi)^2\cos kx dx \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}y^2\cos k(y+\pi)\,dx \\ &= (-1)^k\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}y^2\cos ky dx. \end{aligned}$$

Das letztere Integral wird durch zweimalige partielle Integration ausgewertet:

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi}y^2\cos ky dx &= \frac{1}{k}\int_{-\pi}^{\pi}y^2 d\sin ky=\frac{1}{k}\left[y^2\sin ky\right]_{-\pi}^{\pi}-\frac{2}{k}\int_{-\pi}^{\pi}y\sin ky dy \\ &= 0+\frac{2}{k^2}\int_{-\pi}^{\pi}y d\cos ky=\frac{2}{k^2}\left[y\cos ky\right]_{-\pi}^{\pi}-\frac{2}{k^2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos ky dy \\ &= \frac{4\pi}{k^2}(-1)^k+0, \end{aligned}$$

woher

$$a_k=\frac{4}{k^2}.$$

Schließlich,

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(x-\pi)^2 \sin kx dx = (-1)^k \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} y^2 \sin ky dx = 0,$$

weil die Funktion $y^2 \sin ky$ ungerade ist. Damit erhalten wir die Fourier-Reihe

$$(x-\pi)^2 \sim \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos kx}{k^2}. \tag{13.65}$$

Da die Funktion $f(x)$ stetig ist und rechts und links differenzierbar an alle Stellen, nach Satz 13.26 gilt hier Gleichheit für alle x.

Wenn wir beispielsweise $x = 0$ einsetzen, erhalten wir eine bemerkenswerte Identität

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots .$$

Wenn wir $x = \pi$ einsetzen, erhalten wir

$$\frac{\pi^2}{12} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k^2} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \ldots .$$

Chapter 14

Metrische Räume und stetige Abbildungen

In diesem Kapitel entwickeln wir die Grundlagen für Analysis in $\mathbb{R}^n$ und somit auch Analysis der Funktionen von mehreren Variablen. Wir definieren und untersuchen die Konvergenz von Folgen und Funktionen in $\mathbb{R}^n$ und sogar in allgemeineren *metrischen* Räumen, die mit Hilfe von *Abstandsfunktion* definiert werden.

14.1 Abstandsfunktion

Definition. Sei X eine beliebige Menge. Eine *Metrik* (=Abstandsfunktion) auf X ist eine Funktion $d : X \times X \to \mathbb{R}$ die die folgenden Axiome erfüllt:

1. Positivität: $d(x,y) \geq 0$ für alle $x, y \in X$ und $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (somit $d(x,y) > 0$ für alle $x \neq y$).

2. Symmetrie: $d(x,y) = d(y,x)$ für alle $x, y \in X$.

3. Dreiecksungleichung: $d(x,y) \leq d(x,z) + d(y,z)$ für alle $x, y, z \in X$.

Ist d eine Metrik auf X, so heißt das Paar (X, d) *metrischer Raum.*

Die Dreiecksungleichung impliziert, dass für alle $x, y, z \in X$

$$|d(x,y) - d(x,z)| \leq d(y,z). \tag{14.1}$$

Beispiel. 1. Sei $X = \mathbb{R}$. Dann ist $d(x,y) = |x - y|$ eine Metrik auf $\mathbb{R}$.
2. Sei $X = \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$. Dann ist $d(z,w) = |z - w|$ eine Metrik auf $\mathbb{C}$.
3. Für beliebige Menge X ist die folgende Funktion

$$d(x,y) = \begin{cases} 1, & x \neq y, \\ 0, & x = y, \end{cases}$$

eine Metrik. Diese Metrik heißt *diskrete Metrik* auf X.

Unser Hauptbeispiel ist die Menge

$$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}}_{n \text{ times}}$$

deren Elemente alle n-Tupel $(x_1, ..., x_n)$ von reellen Zahlen sind, die auch Vektoren oder Punkte heißen. Für den Vektor $x = (x_1, ..., x_n)$ heißen die Zahlen x_k die Komponenten (oder Koordinaten) von x.

Für zwei Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^n$ definieren wir die Summe

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n),$$

die auch ein Vektor ist. Für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{R}^n$ definieren wir das Produkt λx mit

$$\lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Die Menge $\mathbb{R}^n$ mit den obigen Addition und Multiplikation ist ein Vektorraum über $\mathbb{R}$.

Erinnern wir uns die Definition von Vektorraum über $\mathbb{R}$ (die reellen Zahlen heißen dann *Skalare*).

Definition. Sei V eine Menge wo die folgenden zwei Operationen definiert werden: Addition

$$x, y \in V \mapsto x + y \in V$$

und Skalarmultiplikation

$$\lambda \in \mathbb{R},\ x \in V \mapsto \lambda x \in V$$

Die Menge V mit diesen Operationen heißt Vektorraum über $\mathbb{R}$ wenn die folgenden Axiome erfüllt werden:

1. Nullvektor: es gibt ein $0 \in V$ mit $x + 0 = 0 + x = x$ für alle $x \in V$.

2. Das inverse Element: für jedes $x \in V$ existiert ein $-x \in V$ mit $x + (-x) = (-x) + x = 0$.

3. Assoziativgesetz für Addition: $(x + y) + z = x + (y + z)$.

4. Kommutativgesetz für Addition: $x + y = y + x$.

5. Skalarmultiplikation mit 1: $1x = x$ für alle x.

6. Assoziativgesetz für Skalarmultiplikation: $(\lambda\mu) x = \lambda (\mu x)$.

7. Distributivgesetz für Addition von Skalaren: $(\lambda + \mu) x = \lambda x + \mu x$.

8. Distributivgesetz für Addition von Vektoren: $\lambda (x + y) = \lambda x + \lambda y$.

Die Operationen Addition und Skalarmultiplikation heißen zusammen *lineare Operationen.*

Beispiel. Sei S eine beliebige Menge. Bezeichnen wir mit $F(S)$ die Menge von allen reellwertigen Funktionen auf S. Definieren wir Addition von Funktionen $f, g \in F(S)$ mit

$$(f + g)(s) = f(s) + g(s) \quad \forall s \in S$$

und die Skalarmultiplikation mit

$$(\lambda f)(s) = \lambda f(s) \quad \forall s \in S$$

wobei $\lambda \in \mathbb{R}$. Offensichtlich ist $F(S)$ ein Vektorraum.

Insbesondere betrachten wir die Menge $\mathcal{E}_n = \{1, 2, ..., n\}$, die aus n Elementen besteht. Jede Funktion f auf $\mathcal{E}_n$ bestimmt eine Folge $\{f(1), ..., f(n)\}$ von n reellen Zahlen, d.h. ein Vektor in $\mathbb{R}^n$. Somit erhalten wir eine Abbildung

$$\begin{array}{rcl} F(\mathcal{E}_n) & \to & \mathbb{R}^n \\ f & \mapsto & (f(1), ..., f(n)). \end{array}$$

Diese Abbildung ist offensichtlich bijektiv, da jedes Element $x \in \mathbb{R}^n$ eine Funktion $f \in F(\mathcal{E}_n)$ mit $f(k) = x_k$ eindeutig bestimmt. Diese Abbildung bewahrt die linearen Operationen so dass die Vektorräume $F(\mathcal{E}_n)$ und $\mathbb{R}^n$ isomorph sind.

Definition. Eine Funktion $N : V \to \mathbb{R}$ auf einem Vektorraum V heißt eine *Norm* wenn sie die folgenden Axiome erfüllt:

1. Positivität: $N(x) \geq 0$ und $N(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (somit $N(x) > 0$ für alle $x \in V \setminus \{0\}$).

2. Absolute Homogenität: $N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$ $\forall$ $\lambda \in \mathbb{R}$ und $\forall x \in V$.

3. Dreiecksungleichung: $N(x + y) \leq N(x) + N(y)$.

Das Paar (V, N) heißt ein *normierter* Vektorraum.
Die übliche Notation von der Norm ist $\|x\|$ anstatt $N(x)$.

Beispiel. 1. Die Funktion $N(x) = |x|$ auf $\mathbb{R}$ ist eine Norm.
2. Die Funktion $N(z) = |z|$ auf $\mathbb{C}$ ist eine Norm.
3. Sei $V = B(S)$ der Vektorraum von allen *beschränkten* reellwertigen Funktionen auf S. Die Menge $B(S)$ ist offensichtlich ein Unterraum von $F(S)$ und somit auch ein Vektorraum. Betrachten wir die sup-Norm auf $B(S)$:

$$\|f\| = \sup_{x \in S} |f(x)|.$$

Die sup-Norm ist eine Norm (siehe Aufgabe 88). Sie heißt auch die ∞-Norm und wird auch mit $\|f\|_\infty$ bezeichnet.
4. Sei $V = \mathbb{R}^n$. Die Identifizierung von $\mathbb{R}^n$ mit $B(\mathcal{E}_n) = F(\mathcal{E}_n)$ ergibt die folgende sup-Norm in $\mathbb{R}^n$:

$$\|x\|_\infty = \sup_{1 \leq k \leq n} |x_k| = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k|.$$

Eine andere Norm in $\mathbb{R}^n$, die 1-Norm, ist wie folgt definiert:

$$\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + ... + |x_n|. \tag{14.2}$$

Behauptung. *Ist* (V, N) *ein normierter Vektorraum, so ist* $d(x, y) = N(x - y)$ *eine Metrik auf* V.

Die Metrik d heißt die *induzierte Metrik* der Norm N.

Beweis. Beweisen wir alle Axiome von der Metrik, wo wir die Axiome der Norm benutzen.
Positivität: $d(x, y) = N(x - y) \geq 0$ und $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow N(x - y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.

Symmetrie:

$$d(y,x) = N(y-x) = N((-1)(x-y)) = N(x-y) = d(x,y).$$

Dreiecksungleichung:

$$d(x,y) = N(x-y) = N((x-z)+(z-y)) \le N(x-z) + N(z-y) = d(x,z) + d(z,y).$$

■

Jeder normierter Vektorraum (V, N) ist somit auch ein metrischer Raum (V, d) mit der induzierten Metrik d.

Beispiel. Für $V = B(S)$ mit der sup-Norm erhalten wir die sup-Metrik:

$$d_\infty(f,g) = \|f-g\|_\infty = \sup_{x\in S} |f(x) - g(x)|.$$

Für $V = \mathbb{R}^n$ erhalten wir die sup-Metrik

$$d_\infty(x,y) = \|x-y\|_\infty = \max_{1\le k\le n} \{|x_k - y_k|\}$$

und die 1-Metrik

$$d_1(x,y) = \|x-y\|_1 = \sum_{k=1}^n |x_k - y_k|.$$

14.2 Die p-Norm in $\mathbb{R}^n$

Definition. Für jedes $1 \le p < \infty$ definieren wir die *p-Norm* in $\mathbb{R}^n$ wie folgt: für jedes $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$

$$\|x\|_p := \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p\right)^{1/p}. \tag{14.3}$$

Zum Beispiel, für $p = 1$ stimmt diese Definition mit (14.2) überein. Für $p = 2$ erhalten wir

$$\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2}$$

so dass $\|x\|_2 = |x|$ (wobei der Betrag $|x|$ eines Vektors x in (11.47) definiert wurde).

Wir beweisen unterhalb, dass die p-Norm eine Norm ist. Die ersten zwei Axiome von Norm sind offensichtlich:

Positivität. Es ist klar aus (14.3), dass $\|x\|_p \ge 0$ und

$$\|x\|_p = 0 \Leftrightarrow x_k = 0 \text{ für alle } k = 1, ..., n \Leftrightarrow x = 0.$$

Absolute Homogenität: für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\|\lambda x\|_p = \left(\sum_{k=1}^n |\lambda|^p |x_k|^p\right)^{1/p} = |\lambda| \, \|x\|_p.$$

Die Dreiecksungleichung wird später bewiesen.

Für zwei Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^n$ definieren wir das *Skalarprodukt*

$$x \cdot y := \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$$

(nicht mit der Skalarmultiplikation zu vermischen). Bemerken wir, dass $x \cdot y$ eine reelle Zahl ist. Das Skalarprodukt erfüllt offensichtlich die folgenden Eigenschaften:

1. Positivität: $x \cdot x \geq 0$ und $x \cdot x = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

2. Symmetrie: $x \cdot y = y \cdot x$

3. Linearität:
$$(\lambda x) \cdot y = \lambda (x \cdot y)$$
und
$$(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$$
für alle $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda \in \mathbb{R}$.

Diese drei Eigenschaften sind die Axiome von Skalarprodukt in beliebigen Vektorräumen.

Satz 14.1 (Hölder-Ungleichung) *Für alle $p, q > 1$ mit*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \tag{14.4}$$

gilt die folgende Ungleichung

$$|x \cdot y| \leq \|x\|_p \|y\|_q \tag{14.5}$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Die (14.4) erfüllenden Zahlen heißen die *konjugierten Hölder-Exponenten.* Die Identität (14.4) ist äquivalent zu $p = \frac{q}{q-1}$ und $q = \frac{p}{p-1}$.

Da $p = 2$ und $q = 2$ konjugierte Hölder-Exponenten sind, so erhalten wir nach der Hölder-Ungleichung

$$|x \cdot y| \leq \|x\|_2 \|y\|_2.$$

Dieser spezielle Fall der Hölder-Ungleichung heißt die *Cauchy-Schwarz-Ungleichung.* Bemerken wir auch, dass

$$\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2} = \sqrt{x \cdot x}.$$

Beweis. Gilt $x = 0$ oder $y = 0$ so ist (14.5) trivial. Nehmen wir an, dass $x, y \neq 0$. Die Ungleichung (14.5) ändert sich nicht wenn x durch λx ersetzt wird. Somit können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $\|x\|_p = 1$. Analog nehmen wir an, dass $\|y\|_q = 1$.

Weiter benutzen wir die Young-Ungleichung[1]

$$\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \geq ab,$$

[1] Die Young-Ungleichung wurde in Analysis 1 als eine Folgerung der Konkavität von $\ln x$ bewiesen.

die unter der Bedingung (14.4) für alle $a, b \geq 0$ gilt. Für $a = |x_k|$ und $b = |y_k|$ erhalten wir

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{|x_k|^p}{p} + \frac{|y_k|^q}{q} \right) \geq \sum_{k=1}^{n} |x_k| \, |y_k| \geq |x \cdot y| \, . \tag{14.6}$$

Mit Hilfe von $\|x\|_p = \|y\|_q = 1$ und (14.4) erhalten wir, dass die linke Seite von (14.6) ist gleich

$$\frac{1}{p} \sum_{k=1}^{n} |x_k|^p + \frac{1}{q} \sum_{k=1}^{n} |y_k|^q = \frac{1}{p} \|x\|_p^p + \frac{1}{q} \|y\|_q^q = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 = \|x\|_p \|y\|_q,$$

woraus (14.5) folgt. ∎

Satz 14.2 (Minkowski-Ungleichung) *Die p-Norm erfüllt die Dreiecksungleichung*

$$\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p \tag{14.7}$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$. Folglich ist die p-Norm eine Norm in $\mathbb{R}^n$ für alle $p \in [1, \infty)$.

Beweis. Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $x_k \geq 0$ und $y_k \geq 0$. Der Fall $p = 1$ ist offensichtlich, sei jetzt $p > 1$. Wir haben

$$\begin{aligned} \|x + y\|_p^p &= \sum_{k=1}^{n} (x_k + y_k)^p = \sum_{k=1}^{n} (x_k + y_k) \, (x_k + y_k)^{p-1} \\ &= \sum_{k=1}^{n} x_k \, (x_k + y_k)^{p-1} + \sum_{k=1}^{n} y_k \, (x_k + y_k)^{p-1} \, . \end{aligned} \tag{14.8}$$

Setzen wir $z_k = (x_k + y_k)^{p-1}$ und bemerken, dass nach der Hölder-Ungleichung gilt

$$\sum_{k=1}^{n} x_k \, (x_k + y_k)^{p-1} = \sum_{k=1}^{n} x_k z_k \leq \|x\|_p \, \|z\|_q \, ,$$

wobei $q = \frac{p}{p-1}$ der zu p konjugierte Hölder-Exponent ist. Es gilt

$$\|z\|_q = \left(\sum_{k=1}^{n} (x_k + y_k)^{(p-1)q} \right)^{\frac{1}{q}} = \left(\sum_{k=1}^{n} (x_k + y_k)^p \right)^{\frac{1}{p} \frac{p}{q}} = \|x + y\|_p^{p/q} \, ,$$

wobei wir die Identität $(p - 1) \, q = p$ benutzt haben. Somit erhalten wir

$$\sum_{k=1}^{n} x_k \, (x_k + y_k)^{p-1} \leq \|x\|_p \, \|x + y\|_p^{p/q}$$

und analog

$$\sum_{k=1}^{n} y_k \, (x_k + y_k)^{p-1} \leq \|y\|_p \, \|x + y\|_p^{p/q} \, .$$

Addieren diese Ungleichungen und Einsetzen in (14.8) ergibt

$$\|x + y\|_p^p \leq \left(\|x\|_p + \|y\|_p \right) \|x + y\|_p^{p/q} \, .$$

Daraus folgt, dass

$$\|x+y\|_p^{p-p/q} \leq \|x\|_p + \|y\|_p \, .$$

Da

$$p - \frac{p}{q} = p\left(1 - \frac{1}{q}\right) = p \cdot \frac{1}{p} = 1,$$

so erhalten wir (14.7). ■

Die folgende Aussage erklärt die Beziehung zwischen p-Norm und ∞-Norm in $\mathbb{R}^n$.

Behauptung. *Es gilt für alle* $x \in \mathbb{R}^n$

$$\lim_{p\to+\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$$

(siehe Aufgabe 87 *).*

Bemerken wir, dass $p = \infty$ und $q = 1$ auch konjugierte Hölder-Exponenten sind, da $\frac{1}{\infty} + \frac{1}{1} = 1$. Die Hölder-Ungleichung gilt auch für $p = \infty$ und $q = 1$ wie folgt:

$$|x \cdot y| \leq \|x\|_\infty \|y\|_1$$

(siehe Aufgabe 87).

Folglich erhalten wir in $\mathbb{R}^n$ die folgende Familie von Metriken: für jedes $p \in [1, +\infty]$

$$d_p\,(x, y) = \|x - y\|_p.$$

14.3 Metrische Kugel

In einem metrischen Raum (X, d) definieren wir die *metrischen Kugeln* wie folgt.

Definition. Für jedes $z \in X$ und $r > 0$ definieren wir die *offene Kugel* $U_r\,(z)$ mit Zentrum z und Radius r wie folgt:

$$U_r\,(z) = \{x \in X : d\,(x, z) < r\}\,.$$

Definieren wir auch die *abgeschlossene Kugel* mit

$$\overline{U}_r\,(z) = \{x \in X : d\,(z, x) \leq r\}\,.$$

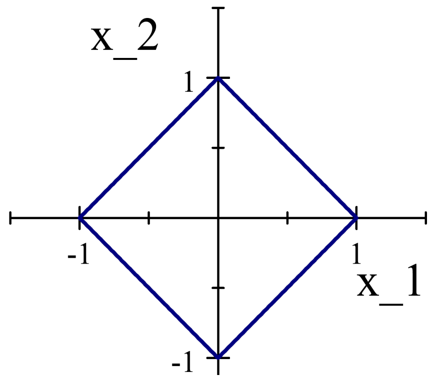
Beispiel. In $\mathbb{R}$ mit der Metrik $d\,(x, y) = |x - y|$ die Kugel $U_r\,(z)$ ist das offene Intervall $(z - r, z + r)$ und $\overline{U}_r\,(z) = [z - r, z + r]\,.$

Beispiel. Betrachten wir $\mathbb{R}^2$ mit der Metrik d_p $(1 \leq p \leq \infty)$ und beschreiben wir die entsprechende Kugel $U_r\,(0)$ abhängig von p.

Für $p = 1$ haben wir

$$U_r\,(0) = \left\{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_1 < r\right\} = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : |x_1| + |x_2| < r\right\}$$

Somit ist $U_r\,(0)$ ein Rhombus wie auf dem Bild:

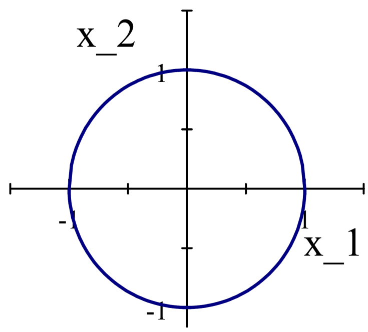


Die metrische Kugel $U_1(0)$ im Fall $p = 1$

Für $p = 2$ haben wir

$$U_r(0) = \left\{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_2 < r\right\} = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 < r^2\right\},$$

und die Kugel ist eine Kreisscheibe

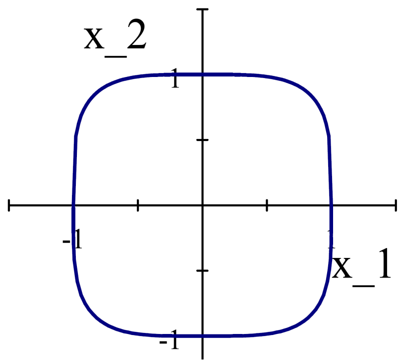


Die metrische Kugel $U_1(0)$ im Fall $p = 2$

Für $p = 4$ haben wir

$$U_r(0) = \left\{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_4 < r\right\} = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^4 + x_2^4 < r^4\right\},$$

was auf dem Bild gezeigt ist:

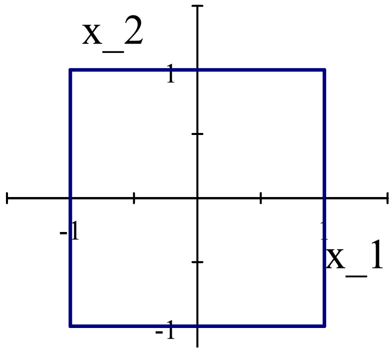


Die metrische Kugel $U_1(0)$ im Fall $p = 4$

Für $p = \infty$ haben wir

$$U_r(0) = \left\{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_\infty < r\right\} = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \max\{|x_1|, |x_2|\} < r\right\},$$

was ein Quadrat ist



Die metrische Kugel $U_1(0)$ im Fall $p = \infty$

Beweisen wir die folgenden Eigenschaften von metrischen Kugeln.

Lemma 14.3 *Seien $U_r(x)$ und $U_s(y)$ zwei Kugeln in einem metrischen Raum (X, d).*
(a) Gilt $d(x, y) \geq r + s$ so sind die Kugeln $U_r(x)$ und $U_s(y)$ disjunkt.
(b) Gilt $d(x, y) + s \leq r$, so gilt $U_s(y) \subset U_r(x)$.

Beweis. (a) Sei z ein Punkt aus dem Schnitt $U_r(x) \cap U_s(y)$. Dann gelten $d(x, z) < r$ und $d(y, z) < s$ woraus folgt nach der Dreiecksungleichung

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z) < r + s,$$

was im Widerspruch zur Voraussetzung steht.
(b) Für jedes $z \in U_s(y)$ haben wir

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) < d(x, y) + s \leq r,$$

woraus folgt $z \in U_r(x)$. Somit gilt $U_s(y) \subset U_r(x)$. ■

Bemerkung. Ähnliche Aussagen gelten when eine oder beide Kugeln abgeschlossen sind. Zum Beispiel, im Fall $d(x, y) \geq r+s$ gilt auch $\overline{U}_r(x) \cap U_s(y) = \emptyset$ und im Fall $d(x, y)+s \leq r$ gilt auch $\overline{U}_s(y) \subset \overline{U}_r(x)$.

18.06.21 **Vorlesung 19**

14.4 Konvergenz in metrischen Räumen

Definition. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Folge $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ von Punkten aus X *konvergiert* gegen ein $a \in X$ wenn $d(x_n, a) \to 0$ für $n \to \infty$. Der Punkt a heißt der Grenzwert (=Limes) der Folge $\{x_n\}$. Schreibweise:

$$d\text{-}\lim_{n\to\infty} x_n = a$$

oder

$$x_n \xrightarrow{d} a.$$

Äquivalente Definitionen für $x_n \xrightarrow{d} a$:

1. $\forall \varepsilon > 0$ gilt $d(x_n, a) < \varepsilon$ für fast alle n;
2. $\forall \varepsilon > 0$ gilt $x_n \in U_\varepsilon(a)$ für fast alle n.

Beispiel. In $\mathbb{R}$ mit der Metrik $d(x, y) = |x - y|$ ist die Konvergenz $x_n \xrightarrow{d} a$ äquivalent zu $|x_n - a| \to 0$ und somit zur üblichen Konvergenz $x_n \to a$. Gleiches gilt in $\mathbb{C}$ mit der Metrik $d(x, y) = |x - y| = \|x - y\|_2$.

Beispiel. Sei S eine Menge. Betrachten wir wieder den Vektorraum $B(S)$ von allen reellwertigen beschränkten Funktionen auf S mit der sup-Norm

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in S} |f(x)|.$$

Die entsprechende Metrik ist

$$d(f, g) = \|f - g\|_\infty.$$

Die Konvergenz $f_n \xrightarrow{d} f$ ist äquivalent zu $\|f_n - f\|_\infty \to 0$, d.h. zur gleichmäßigen Konvergenz $f_n \rightrightarrows f$ auf S.

Bemerkung. In der Notation $d\text{-}\lim_{n\to\infty} x_n = a$ und $x_n \xrightarrow{d} a$ lässt man häufig "d" ausfallen wenn es klar ist, welche Metrik benutzt wird.

Behauptung. *Der Grenzwert einer Folge $\{x_n\}$ im metrischen Raum (X, d) ist eindeutig bestimmt (soll er existieren).*

Beweis. Gilt $x_n \to a$ und $x_n \to b$ so erhalten wir

$$d(a, b) \le d(a, x_n) + d(x_n, b) \to 0 \text{ für } n \to \infty,$$

woraus $d(a, b) = 0$ und somit $a = b$ folgt. ■

14.5 Stetige Abbildungen

Definition. Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) zwei metrische Räume und $f : X \to Y$ eine Abbildung von X nach Y. Seien $a \in X$ und $b \in Y$. Man schreibt

$$\lim_{x\to a} f(x) = b \quad \text{oder} \quad f(x) \to b \quad \text{für } x \to a \tag{14.9}$$

($f(x)$ konvergiert gegen b für $x \to a$) wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; \text{s.d. } \forall x \in X \setminus \{a\} \text{ mit } \; d_X(x, a) < \delta \text{ gilt } d_Y(f(x), b) < \varepsilon. \tag{14.10}$$

Der Punkt b heißt der Grenzwert (=Limes) von $f(x)$ für $x \to a$.

Bezeichnen wir mit U^X und U^Y die metrischen Kugeln in X bzw Y. Dann ist (14.10) und somit auch (14.9) äquivalent zu folgendes:

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; \text{s.d. } \forall x \in U_\delta^X(a) \setminus \{a\} \;\text{ gilt } f(x) \in U_\varepsilon^Y(b). \tag{14.11}$$

Lemma 14.4 *Die folgenden zwei Bedingungen sind äquivalent.*

(i) $\lim_{x\to a} f(x) = b$

(ii) Für jede Folge $\{x_n\} \subset X \setminus \{a\}$ *mit* $x_n \overset{d_X}{\to} a$ *gilt* $f(x_n) \overset{d_Y}{\to} b$.

Beweis. $(i) \Rightarrow (ii)$ Nach Voraussetzung gilt (14.11). Wählen wir ein $\varepsilon > 0$ und erhalten nach (14.11) einen Wert $\delta > 0$. Für jede Folge $\{x_n\} \subset X \setminus \{a\}$ mit $x_n \to a$ haben wir nach Definition, dass fast alle x_n in $U_\delta^X(a)$ liegen. Da $x_n \neq a$, so erhalten wir aus (14.11), dass auch fast alle $f(x_n)$ in $U_\varepsilon^Y(b)$ liegen, woraus folgt $f(x_n) \to b$.

$(ii) \Rightarrow (i)$ Angenommen, dass $\lim_{x\to a} f(x) = b$ nicht gilt, so erhalten wir:

$$\exists \varepsilon > 0 \;\; \forall \delta > 0 \; \exists x \in U_\delta^X(a) \setminus \{a\} \;\text{ mit } f(x) \notin U_\varepsilon^Y(b). \tag{14.12}$$

Für jedes $k \in \mathbb{N}$ benutzen wir (14.12) mit $\delta = \frac{1}{k}$ und erhalten ein $x_k \in U_{1/k}^X(a) \setminus \{a\}$ mit

$$f(x_k) \notin U_\varepsilon^Y(b).$$

Für die Folge $\{x_k\}$ gilt $x_k \to a$ aber $f(x_k) \not\to b$, was im Widerspruch zur Voraussetzung (ii) steht. ■

Folglich hat jede Funktion $f : X \to Y$ höchstens einen Grenzwert für $x \to a$.

Definition. Seien X und Y zwei metrische Räume. Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt *stetig* in $a \in X$ wenn

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

Es folgt aus (14.10) und (14.11), dass die Stetigkeit von f in a äquivalent zu den folgenden Bedingungen sind:

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; \text{s.d. } d_X(x,a) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(a)) < \varepsilon$$

und

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \text{ s.d. } x \in U_\delta^X(a) \;\Rightarrow f(x) \in U_\varepsilon^Y(f(a)).$$

Definition. Abbildung $f : X \to Y$ heißt stetig wenn sie in allen Punkten $a \in X$ stetig ist.

Lemma 14.5 *Eine Abbildung* $f : X \to Y$ *ist stetig in* $a \in X$ *genau dann, wenn für jede Folge* $\{x_n\} \subset X$ *mit* $x_n \to a$ *gilt* $f(x_n) \to f(a)$.

Beweis. Nach Lemma 14.4 $f(x) \to f(a)$ für $x \to a$ gilt genau dann, wenn $f(x_n) \to f(a)$ für jede Folge $\{x_n\} \subset X \setminus \{a\}$ mit $x_n \to a$. Die letzte Bedingung impliziert, dass $f(x_n) \to f(a)$ auch für jede Folge $\{x_n\} \subset X$ mit $x_n \to a$, da für die Glieder x_n der Folge, die a gleich sind, gilt $f(x_n) = f(a)$. ■

Korollar 14.6 *Sind die Funktionen* $f, g : X \to \mathbb{R}$ *(oder* $f, g : X \to \mathbb{C}$*) stetig in* $a \in X$ *so sind* $f+g$, fg, f/g *auch stetig in* a *sind (im Fall* f/g *vorausgesetzt, dass* $g \neq 0$*).*

Beweis. Zeigen wir, z.B., dass $f+g$ stetig in a ist. Für jede Folge $x_n \to a$ gilt nach dem Lemma 14.5 $f(x_n) \to f(a)$ und $g(x_n) \to g(a)$. Daraus folgt, dass $f(x_n)+g(x_n) \to f(a)+g(a)$, und nach dem Lemma 14.5 beschließen wir, dass $f+g$ in a stetig ist. ∎

Beispiel. Fixieren wir einen Punkt $c \in X$ und betrachten die Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ die mit $f(x) = d(x,c)$ definiert ist. Zeigen wir, dass diese Funktion stetig in jedem Punkt $a \in X$ ist. Sei $x_n \to a$. Es gilt nach (14.1)

$$|f(x_n) - f(a)| = |d(x_n,c) - d(a,c)| \leq d(x_n,a) \to 0,$$

woraus folgt, dass $f(x_n) \to f(a)$ für $n \to \infty$.

Siehe auch Aufgabe 95 für eine Verallgemeinerung dieser Eigenschaft.

14.6 Offene und abgeschlossene Mengen

Sei (X,d) ein metrischer Raum.

Definition. Eine Menge $V \subset X$ heißt *offen* wenn

$$\forall x \in V \quad \exists r > 0 \ \text{ mit } \ U_r(x) \subset V.$$

Eine Menge $F \subset X$ heißt *abgeschlossen* wenn das Komplement $F^c := X \setminus F$ offen ist.

Beispiel. 1. Die leere Menge $\emptyset$ und die ganze Menge X sind offen. Somit sind $X = \emptyset^c$ und $\emptyset = X^c$ abgeschlossen.

2. Zeigen wir, dass jede offene metrische Kugel $U_r(z)$ eine offene Menge ist. Für jedes $x \in U_r(z)$ gilt $d(x,z) < r$. Nach dem Lemma 14.3 gilt $U_\varepsilon(x) \subset U_r(z)$ vorausgesetzt dass $d(x,z) + \varepsilon \leq r$, und diese Bedingung gilt für jedes $x \in U_r(z)$ mit

$$\varepsilon := r - d(x,z) > 0.$$

Somit ist $U_r(z)$ offene Menge.

3. Zeigen wir, dass die abgeschlossene Kugel $\overline{U}_r(z)$ eine abgeschlossene Menge ist. Dafür reicht es zu zeigen, dass das Komplement

$$K := \overline{U}_r(z)^c = \{x \in X : d(x,z) > r\}$$

offen ist. Nach Definition ist K offen wenn es für jedes $x \in K$ ein $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(x) \subset K$ gibt d.h. die Kugeln $U_\varepsilon(x)$ und $\overline{U}_r(z)$ disjunkt sind. Es folgt aus dem Lemma 14.3, dass die Kugeln $U_\varepsilon(x)$ und $\overline{U}_r(z)$ disjunkt sind vorausgesetzt, dass

$$d(x,z) \geq r + \varepsilon,$$

und diese Bedingung gilt für jedes $x \in K$ mit

$$\varepsilon := d(x,z) - r > 0.$$

Somit ist $\overline{U}_r(z)$ eine abgeschlossene Menge.

4. In $\mathbb{R}$ ist jedes offenes Intervall $J = (a,b)$ eine offene Menge. In der Tat, im Fall $a,b \in \mathbb{R}$ stimmt J mit der offenen Kugel $U_r(c)$ überein wobei $c = \frac{a+b}{2}$ und $r = \frac{b-a}{2}$. Für unbeschränktes J beweist man die Offenheit von J direkt. Jedes abgeschlossenes Intervall $J = [a,b] \subset \mathbb{R}$ ist eine abgeschlossene Menge da $J = \overline{U}_r(c)$.

Satz 14.7 *Die folgenden Eigenschaften gelten für Teilmengen eines metrischen Raums.*

(a) *Die Vereinigung von einem beliebigen Mengensystem von offenen Mengen ist offen.*

(b) *Der Schnitt endlich vieler offenen Mengen ist offen.*

(c) *Die Vereinigung endlich vieler abgeschlossenen Mengen ist abgeschlossen.*

(d) *Der Schnitt von einem beliebigen Mengensystem von abgeschlossenen Mengen ist abgeschlossen.*

(e) *Eine Menge V ist offen genau dann, wenn V eine Vereinigung von offenen metrischen Kugeln ist.*

(f) *Eine Menge F ist abgeschlossen genau dann, wenn für jede konvergente Folge aus F der Grenzwert auch in F liegt.*

Beweis. (a) Sei $\{V_\alpha\}_{\alpha\in I}$ ein Mengensystem von offenen Mengen. Zeigen wir, dass die Vereinigung

$$V = \bigcup_{\alpha\in I} V_\alpha$$

offen ist, d.h. für jedes $x \in V$ existiert $r > 0$ mit $U_r(x) \subset V$. In der Tat liegt x in einem V_α. Da V_α offen ist, so existiert $r > 0$ mit $U_r(x) \subset V_\alpha$. Somit gilt auch $U_r(x) \subset V$.

(b) Seien $V_1, V_2, ..., V_n$ offene Mengen. Zeigen wir, dass der Schnitt

$$V = \bigcap_{k=1}^{n} V_k$$

offen ist. Jedes $x \in V$ liegt in allen V_k. Somit existiert für jedes $k = 1, ..., n$ ein $r_k > 0$ mit $U_{r_k}(x) \subset V_k$. Setzen wir

$$r := \min(r_1, r_2, ..., r_n) > 0.$$

Dann gilt $U_r(x) \subset V_k$ für alle $k = 1, ..., m$, woraus folgt $U_r(x) \subset V$.

Bemerkung. Der Schnitt unendlich vieler offenen Mengen muss nicht offen sein. Zum Beispiel, der Schnitt von allen offenen Intervallen $\left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ mit $n \in \mathbb{N}$ ist gleich $\{0\}$, was nicht offen ist.

(c) Sind $F_1, ..., F_n$ abgeschlossene Mengen, so ist die Menge

$$\left(\bigcup_{k=1}^{n} F_k\right)^c = \bigcap_{k=1}^{n} F_k^c$$

offen nach (b). Somit ist $\bigcup_{k=1}^{n} F_k$ abgeschlossen.

(d) Ist $\{F_\alpha\}_{\alpha\in I}$ ein Mengensystem von abgeschlossenen Mengen, so ist die Menge

$$\left(\bigcap_{\alpha\in I} F_\alpha\right)^c = \bigcup_{\alpha\in I} F_\alpha^c$$

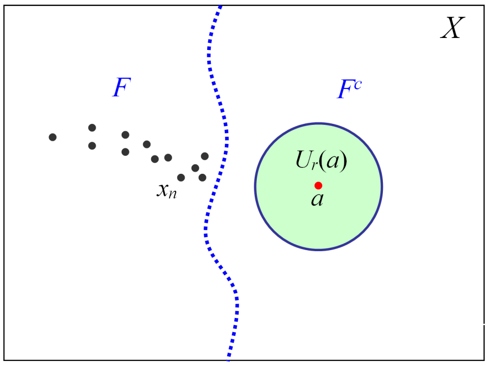
offen nach (a). Somit ist $\bigcap_{\alpha\in I} F_\alpha$ abgeschlossen.

(e) Sei V offen. Dann für jedes $x \in V$ existiert ein $r_x > 0$ mit $U_{r_x}(x) \subset V$. Es ist klar, dass

$$V = \bigcup_{x\in V} U_{r_x}(x),$$

so dass V eine Vereinigung von offenen Kugeln ist. Umgekehrt, jede Vereinigung von offenen Kugeln ist nach (a) eine offene Menge, da alle Kugeln offen sind.

(f) Sei F abgeschlossen. Beweisen wir, dass F die Grenzwerte von konvergenten Folgen aus F enthält. Sei $\{x_n\}$ eine konvergente Folge aus F mit $x_n \to a$. Zeigen wir, dass $a \in F$. Nehmen wir das Gegenteil an, dass $a \notin F$ und somit $a \in F^c$. Da F^c offen ist, so existiert ein $r > 0$ mit $U_r(a) \subset F^c$.



Da $x_n \in F$, so erhalten wir, dass $x_n \notin U_r(a)$, was im Widerspruch zu $x_n \to a$ steht.

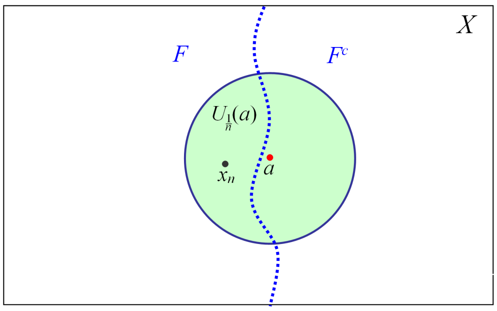
Beweisen wir jetzt die Umkehrung: enthält F die Grenzwerte von allen konvergenten Folgen aus F, dann ist F abgeschlossen. Dafür zeigen wir, dass F^c offen ist, d.h.

$$\forall a \in F^c \;\; \exists r > 0 \;\; \text{mit } U_r(a) \subset F^c.$$

Nehmen wir das Gegenteil an:

$$\exists a \in F^c \text{ s.d. } \forall r > 0 \text{ mit } U_r(a) \not\subset F^c \text{ d.h. mit } U_r(a) \cap F \neq \emptyset.$$

Insbesondere ist die Menge $U_r(a) \cap F$ nicht-leer für jedes $r = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$.



Somit gibt es für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in U_{1/n}(a) \cap F$. Dann ist $\{x_n\}$ eine Folge von Elementen von F mit $d(x_n, a) < \frac{1}{n}$, woraus folgt $x_n \to a$. Somit soll auch a in F liegen, was im Widerspruch zu $a \in F^c$ steht. ∎

Beispiel. Es folgt aus (f) dass jede Menge $F = \{a\}$ die aus einem Punkt $a \in X$ besteht, abgeschlossen ist. Es folgt aus (c) dass jede endliche Menge $F \subset X$ abgeschlossen ist.

Der Begriff von offenen Mengen lässt sich axiomatisch definieren wie folgt. Betrachten wir eine Menge X und ein Mengensystem $\mathcal{O}$ von Teilmengen von X (d.h. $\mathcal{O} \subset \mathcal{P}(X)$. Das Mengensystem $\mathcal{O}$ heißt eine *Topologie* in X und die Elemente von $\mathcal{O}$ heißen *offene Mengen*, wenn $\mathcal{O}$ die folgenden *Axiome von Topologie* erfüllt:

1. $\emptyset \in \mathcal{O}$ und $X \in \mathcal{O}$.
2. Beliebige Vereinigung von Elementen von $\mathcal{O}$ ist wieder ein Element von $\mathcal{O}$.
3. Der Schnitt endlich vieler Elemente von $\mathcal{O}$ ist auch Element von $\mathcal{O}$.

Das Paar $(X, \mathcal{O})$ heißt ein *topologischer Raum*. Die Komplemente in X von offenen Mengen heißen abgeschlossene Mengen. Die Topologie in X lässt auch die Begriffe von Konvergenz von Folgen, stetigen Funktionen usw. definieren. Dafür benutzt man statt der Kugeln $U_r(x)$ die beliebigen offenen Mengen U die x enthalten (sie heißen *offene Umgebungen* von x).

Beispiel. 1. Für jede Menge X ist die Potenzmenge $\mathcal{P}(X)$ immer eine Topologie.

2. Sei $X = \{a, b, c, d\}$ eine Menge von 4 Elementen. Dann das folgende Mengensystem

$$\mathcal{O} = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, b, c, d\}\}$$

erfüllt alle Axiome von Topologie und somit ist eine Topologie in X. Im Gegenteil ist das Mengensystem

$$\mathcal{O}' = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b, c, d\}\}$$

keine Topologie, da die Vereinigung $\{a\} \cup \{b\} = \{a, b\}$ nicht in $\mathcal{O}'$ liegt.

3. Für jeden metrischen Raum (X, d) haben wir oberhalb den Begriff von offenen Mengen mit Hilfe von Metrik d definiert. Das Mengensystem von diesen offenen Mengen ist eine Topologie nach dem Satz 14.7(a)-(b). Sie heißt eine *metrische* Topologie. Die Aussage (f) des Satzes 14.7 gilt für eine metrische Topologie aber nicht für allgemeine Topologie.

In diesem Kapitel betrachten wir nur die metrischen Topologien.

23.06.21 Vorlesung 20

Satz 14.8 *Seien X, Y zwei metrischen Räumen und $f : X \to Y$ eine Abbildung.*

(a) *f ist stetig genau dann, wenn für jede offene Menge $V \subset Y$ das Urbild $f^{-1}(V)$ eine offene Menge in X ist.*

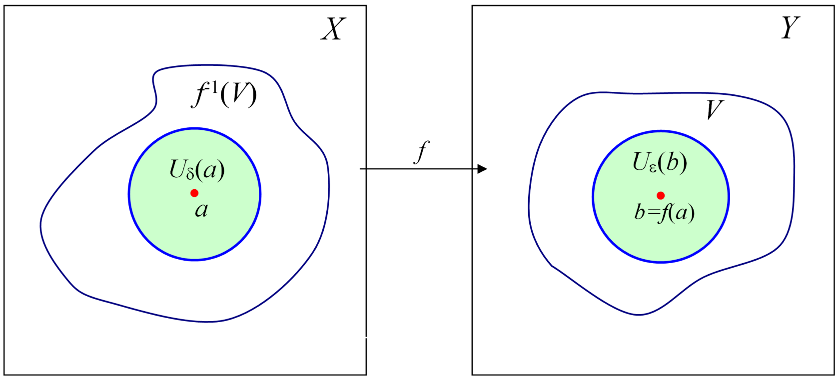
(b) *f ist stetig genau dann, wenn für jede abgeschlossene Menge $F \subset Y$ das Urbild $f^{-1}(F)$ eine abgeschlossene Menge in X ist.*

Beweis. (a) Sei f stetig. Beweisen wir, dass für jede offene Menge $V \subset Y$ das Urbild $f^{-1}(V)$ offen ist. Fixieren wir ein $a \in f^{-1}(V)$ und setzen $b := f(a) \in V$. Da V offen, so existiert ein $\varepsilon > 0$ mit

$$U_\varepsilon^Y(b) \subset V. \tag{14.13}$$

Nach der Stetigkeit von f in a gibt es ein $\delta > 0$ mit

$$x \in U_\delta^X(a) \implies f(x) \in U_\varepsilon^Y(b). \tag{14.14}$$



Es folgt aus (14.13) und (14.14) dass

$$f\left(U_\delta^X(a)\right) \subset U_\varepsilon^Y(b) \subset V,$$

woraus folgt

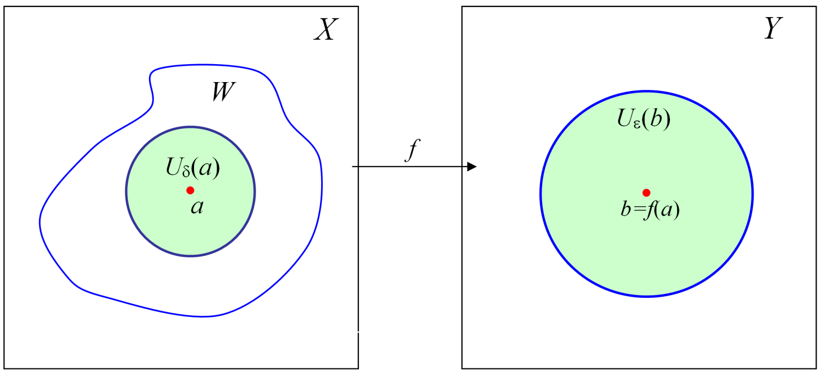
$$U_\delta^X(a) \subset f^{-1}(V),$$

und $f^{-1}(V)$ ist offen.

Sei $f^{-1}(V)$ offen für jede offene Menge $V \subset Y$. Beweisen wir, dass f stetig an jeder Stelle $a \in X$. Setzen wir $b = f(a)$ und zeigen dass

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0 \ \text{ mit } f\left(U_\delta^X(a)\right) \subset U_\varepsilon^Y(b)$$

was äquivalent zu (14.14). Die Kugel $U_\varepsilon^Y(b)$ ist eine offene Menge in Y. Somit ist ihres Urbild $W = f^{-1}\left(U_\varepsilon^Y(b)\right)$ eine offene Menge in X.



Da $a \in W$, so existiert ein $\delta > 0$ mit

$$U_\delta^X(a) \subset W,$$

woraus folgt

$$f\left(U_\delta^X(a)\right) \subset f(W) \subset U_\varepsilon^Y(b).$$

(b) Für jede Menge $F \subset Y$ gilt

$$\left(f^{-1}(F)\right)^c = f^{-1}(F^c) = f^{-1}(V),$$

wobei $V = F^c$. Die Menge F ist abgeschlossen genau dass, wenn V offen ist, und $f^{-1}(F)$ ist abgeschlossen genau dann, wenn ihres Komplement $f^{-1}(V)$ offen ist. Somit ist die Bedingung

$$\text{Abgeschlossenheit von } F \Rightarrow \text{Abgeschlossenheit von } f^{-1}(F)$$

äquivalent zu

$$\text{Offenheit von } V \Rightarrow \text{Offenheit von } f^{-1}(V)$$

und die zweite Bedingung ist nach (a) äquivalent zur Stetigkeit von f. ■

Korollar 14.9 *Seien $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ zwei stetige Abbildungen von metrischen Räumen. Dann ist die Verkettung $g \circ f : X \to Z$ stetig.*

Beweis. Wir haben

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z.$$

Da $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$, so gilt für jede Menge $V \subset Z$

$$(g \circ f)^{-1}(V) = f^{-1}\left(g^{-1}(V)\right).$$

Ist V offen in Z, so ist $g^{-1}(V)$ offen in Y und somit $f^{-1}(g^{-1}(V))$ ist offen in X. Wir beschließen, dass $(g \circ f)^{-1}(V)$ offen in X ist, und die Abbildung $g \circ f$ ist stetig nach dem Satz 14.8. ■

14.7 Äquivalente Normen

Betrachten wir die Metriken in einem Vektorraum V, insbesondere in $V = \mathbb{R}^n$.

Definition. Seien N_1 und N_2 zwei Normen in V. Man sagt, dass N_1 und N_2 *äquivalent* sind, wenn es positive Konstanten c, C gibt s.d.

$$cN_1(x) \le N_2(x) \le CN_1(x) \tag{14.15}$$

für alle $x \in V$.

Die Bedingung (14.15) ist äquivalent zu

$$c \le \frac{N_2(x)}{N_1(x)} \le C$$

für alle $c \in V \setminus \{0\}$. Es ist offensichtlich, dass die Äquivalenz von Normen eine Äquivalenzrelation ist, d.h. reflexiv, symmetrisch und transitiv.

Satz 14.10 *Seien N_1 und N_2 zwei äquivalente Normen in V. Seien d_1 und d_2 die von N_1 bzw N_2 induzierten Metriken auf V, d.h.*

$$d_1(x, y) = N_1(x - y) \quad \text{und } d_2(x, y) = N_2(x - y).$$

Dann gelten die folgenden Aussagen.

(a) Die Begriffe von der Konvergenz von Folgen in V bezüglich d_1 und d_2 stimmen überein.

(b) Die Topologien in V bezüglich d_1 und d_2 stimmen überein.

(c) Die Begriffe von stetigen Abbildung von V bezüglich d_1 und d_2 stimmen überein.

Beweis. (a) Für eine Folge $\{x_k\}$ aus V gilt nach (14.15):

$$x_k \xrightarrow{d_1} a \Leftrightarrow d_1(x_k, a) \to 0 \Leftrightarrow N_1(x_k - a) \to 0 \Leftrightarrow N_2(x_k - a) \to 0 \Leftrightarrow x_k \xrightarrow{d_2} a,$$

was zu beweisen war.

(b) Die abgeschlossen Mengen lassen sich mit Hilfe von Konvergenz formulieren (Satz 14.7(f)). Somit folgt (b) aus (a).

(c) Die Stetigkeit lässt sich auch mit Hilfe von Konvergenz definieren (Lemma 14.4), so dass (c) aus (a) folgt. Alternativ folgt (c) auch aus (b), da die Stetigkeit sich mit Hilfe von abgeschlossen Mengen formulieren lässt (Satz 14.8(b)). ■

Satz 14.11 *Alle p-Normen in $\mathbb{R}^n$ für $p \in [1, +\infty]$ sind äquivalent.*

Unterhalb wir nehmen immer an, dass die Topologie in $\mathbb{R}^n$ mit Hilfe von einer der p-Normen definiert wird.

Beweis. Es reicht zu zeigen, dass jede p-Norm zu ∞-Norm äquivalent ist. Für jede $p \in [1, \infty)$ gilt

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p} \geq \left(\max\{|x_k|\}^p\right)^{1/p} = \|x\|_\infty$$

und

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p} \leq \left(n \max\{|x_k|\}^p\right)^{1/p} = n^{1/p}\|x\|_\infty$$

woraus folgt

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_p \leq n^{1/p}\|x\|_\infty. \tag{14.16}$$

Somit sind $\|\cdot\|_p$ und $\|\cdot\|_\infty$ äquivalent. ■

Später sehen wir, dass *alle* Normen in $\mathbb{R}^n$ äquivalent sind.

14.8 Vollständigkeit

Definition. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Folge $\{x_n\} \subset X$ heißt *Cauchy-Folge*, wenn

$$d(x_n, x_m) \to 0 \text{ für } n, m \to \infty.$$

Behauptung *Jede konvergente Folge $\{x_n\}$ ist eine Cauchy-Folge.*

Beweis. In der Tat, gilt $x_n \to a$, so erhalten wir

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, a) + d(x_m, a) \to 0 \text{ für } n, m \to \infty.$$

■

Die Umgekehrte Aussage (d.h. jede Cauchy-Folge konvergiert) gilt in $\mathbb{R}$, aber nicht für beliebige metrische Räume.

Beispiel. Jede Teilmenge $Y \subset X$ eines metrischen Raum (X, d) lässt sich als metrischer Raum (Y, d) betrachten. Dann heißt (Y, d) *Unterraum* von (X, d).

Z.B. Betrachten wir die Menge $Y = (0, +\infty) \subset \mathbb{R}$ als ein metrischer Raum. Die Folge $x_n = \frac{1}{n}$ ist eine Cauchy-Folge in Y, aber diese Folge ist in Y nicht konvergent.

Definition. Ein metrischer Raum (X, d) heißt *vollständig* wenn jede Cauchy-Folge in X konvergent ist.

Z.B. $\mathbb{R}$ ist vollständig während die Menge $(0, +\infty)$ als metrischer Raum unvollständig ist.

Definition. Ein normierter Vektorraum (V, N) heißt vollständig wenn der metrische Raum (V, d) mit der induzierten Metrik $d(x, y) = N(x - y)$ vollständig ist. Ein vollständiger normierter Vektorraum heißt *Banachraum*.

Zum Beispiel, $\mathbb{R}$ ist ein Banachraum.

Satz 14.12 *Sei S beliebige nicht-leere Menge. Der normierte Vektorraum $B(S)$ von allen reellwertigen beschränkten Funktionen auf S mit der* sup*-Norm ist ein Banachraum.*

Beweis. Bezeichnen wir mit $\|f\|$ die sup-Norm einer Funktion $f : S \to \mathbb{R}$, d.h.

$$\|f\| = \|f\|_\infty = \sup_S |f| .$$

Sei $\{f_n\}$ eine Cauchy-Folge in $B(S)$, so dass

$$\|f_n - f_m\| \to 0 \text{ für } n, m \to \infty. \tag{14.17}$$

Zeigen wir, dass die Folge $\{f_n\}$ in $B(S)$ konvergiert. Für jedes $x \in S$ haben wir

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \sup |f_n - f_m| = \|f_n - f_m\| \to 0 \quad \text{für } n, m \to \infty,$$

woraus folgt, dass für jedes $x \in S$ die Folge $\{f_n(x)\}$ von reellen Zahlen eine Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$ ist. Dann ist die Folge $\{f_n(x)\}$ konvergent für jedes $x \in S$. Setzen wir

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x) ,$$

d.h. $f_k \to f$ punktweise.

Zeigen wir, dass die Funktion f auf S beschränkt ist und dass $\|f_n - f\| \to 0$ für $n \to \infty$ (d.h. $f_n \rightrightarrows f$), woraus die Vollständigkeit von $B(S)$ folgt. Nach (14.17) haben wir:

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N \in \mathbb{N} \;\text{ s.d. } \forall n, m > N \;\text{ gilt } \sup |f_n - f_m| < \varepsilon.$$

Es folgt, dass für jedes $x \in S$ und $n, m > N$

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$$

Für $m \to \infty$ erhalten wir, dass für jedes $x \in S$ und $n > N$

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon,$$

woraus folgt

$$\|f_n - f\| = \sup_{x\in S} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \;\text{ für alle } n > N.$$

Somit erhalten wir

$$\|f\| \leq \|f_n\| + \|f - f_n\| \leq \|f_n\| + \varepsilon < \infty$$

d.h. $f \in B(S)$, und $\|f_n - f\| \to 0$ für $n \to \infty$, was zu beweisen war. ■

Korollar 14.13 *Der Raum $\mathbb{R}^n$ ist ein Banachraum bezüglich jeder p-Norm, $p \in [1, \infty]$.*

Beweis. Wir wissen schon, dass $\mathbb{R}^n = B(\mathcal{E}_n)$ mit $\mathcal{E}_n = \{1, 2, ..., n\}$, da jede Funktion $f : \mathcal{E}_n \to \mathbb{R}$ mit der Folge $(f(1), ..., f(n)) \in \mathbb{R}^n$ identifizieren lässt. Nach dem Satz 14.12 ist $B(\mathcal{E}_n)$ vollständig bezüglich der sup-Norm. Somit ist $\mathbb{R}^n$ vollständig bezüglich der ∞-Norm. Es folgt aus dem Satz 14.11, dass $\mathbb{R}^n$ vollständig auch bezüglich der p-Norm ist. ■

Korollar 14.14 *Der Raum $C[a, b]$ von allen reellwertigen stetigen Funktionen auf einem kompakten Intervall $[a, b]$ ist ein Banachraum bezüglich der* sup*-Norm.*

Beweis. Alle stetige Funktionen auf $[a, b]$ sind beschränkt, so dass $C[a, b] \subset B[a, b]$. Offensichtlich ist $C[a, b]$ ein Unterraum von $B[a, b]$. Insbesondere ist die sup-Norm eine Norm in $C[a, b]$. Sei $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine Cauchy-Folge in $C[a, b]$. Dann ist $\{f_n\}$ auch eine Cauchy-Folge in $B[a, b]$ und somit konvergiert gleichmäßig gegen eine Funktion $f \in B[a, b]$. Nach dem Satz 13.1 ist f stetig, d.h. $f \in C[a, b]$, und somit ist $C[a, b]$ vollständig. ■

Bemerkung. Der Beweis von dem Korollar 14.14 lässt sich wie folgt verallgemeinern. Sei Y eine Teilmenge von X wobei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum ist. Ist Y abgeschlossen so ist der Unterraum (Y, d) auch vollständig, da jede Cauchy-Folge $\{x_n\}$ aus Y gegen ein $x \in X$ konvergiert, und x in Y liegen soll da Y abgeschlossen ist. Die Umkehrung gilt auch: ist der Unterraum (Y, d) vollständig so ist Y abgeschlossen als eine Teilmenge von X (siehe Aufgabe 95).

Im Beweis von dem Korollar 14.14 haben wir implizit verwendet, dass $C[a, b]$ eine abgeschlossene Teilmenge von $B[a, b]$ ist, was aus dem Satz 13.1 folgt.

14.9 Fixpunktsatz von Banach

Definition. Sei X eine Menge und $f : X \to X$ eine Selbstabbildung. Ein Punkt $x \in X$ heißt *Fixpunkt* von f wenn $f(x) = x$.

In diesem Abschnitt betrachten wir die Bedingungen für Existenz eines Fixpunktes.

Beispiel. Zeigen wir, dass jede stetige Funktion $f : [0, 1] \to [0, 1]$ einen Fixpunkt hat. In der Tat ist die Funktion $f(x) - x$ nichtnegativ an $x = 0$ und nichtpositiv an $x = 1$. Nach dem Zwischenwertsatz hat die Funktion $f(x) - x$ eine Nullstelle, die ein Fixpunkt von f ist.

Andererseits es gibt viele Abbildungen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ohne Fixpunkt, z.B. $f(x) = x + 1$.

Beispiel. Betrachten wir die Gleichung $P(x) = 0$ wobei P eine reellwertige Funktion auf $\mathbb{R}$ ist. Jede Nullstelle x von P erfüllt offensichtlich die Gleichung

$$x = x - cP(x)$$

für beliebige Konstante $c \neq 0$. Folglich stimmen die Nullstellen von P mit den Fixpunkten der Funktion $f(x) = x - cP(x)$ überein. Berechnen der Nullstelle einer Funktion ist somit äquivalent zum Berechnen des Fixpunktes einer anderen Funktion.

Definition. Eine Selbstabbildung $f : X \to X$ eines metrischen Raums (X, d) heißt *Kontraktionsabbildung* wenn es eine Konstante $q \in (0, 1)$ gibt mit

$$d(f(x), f(y)) \le q d(x, y) \quad \forall x, y \in X. \tag{14.18}$$

Hauptsatz 14.15 (Fixpunktsatz von Banach) *Seien (X, d) ein vollständiger metrischer Raum und $f : X \to X$ eine Kontraktionsabbildung. Dann besitzt f genau einen Fixpunkt.*

Zuerst beweisen wir ein Lemma.

Lemma 14.16 *Gilt für eine Folge $\{x_n\}$ in einem metrischen Raum (X, d)*

$$d(x_{n+1}, x_n) \le Cq^n \quad \forall n \in \mathbb{N} \tag{14.19}$$

für ein $q \in (0, 1)$ und $C > 0$, so ist $\{x_n\}$ eine Cauchy-Folge.

Beweis. In der Tat, für jede $m > n$ erhalten wir aus (14.19) mit Hilfe von der Dreiecksungleichung, dass

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\le d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + ... + d(x_{m-1}, x_m) \\ &\le C\left(q^n + q^{n+1} + ... + q^{m-1}\right) \\ &\le Cq^n \sum_{k=0}^{\infty} q^k \\ &= \frac{Cq^n}{1-q} \to 0 \text{ für } n \to \infty. \end{aligned}$$

Es folgt, dass $d(x_m, x_n) \to 0$ für $n, m \to \infty$, d.h. $\{x_n\}$ eine Cauchy-Folge ist. ∎

Beweis von dem Satz 14.15. Wählen wir einen beliebigen Punkt $x_0 \in X$ und definieren per Induktion eine Folge $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ durch

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad n = 0, 1, 2, ...$$

Wir beweisen, dass die Folge $\{x_n\}$ konvergiert in X und der Grenzwert ein Fixpunkt von f ist.

Bemerken wir, dass

$$d(x_{n+1}, x_n) = d(f(x_n), f(x_{n-1})) \le q d(x_n, x_{n-1}).$$

Per Induktion erhalten wir, dass

$$d(x_{n+1}, x_n) \le q^n d(x_1, x_0).$$

Nach dem Lemma 14.16 mit $C = d(x_1, x_0)$ erhalten wir, dass die Folge $\{x_n\}$ eine Cauchy-Folge ist.

Nach der Vollständigkeit von (X, d) konvergiert die Folge $\{x_n\}$ gegen einen Punkt $a \in X$. Daraus folgt

$$f(x_n) \to f(a),$$

für $n \to \infty$ da
$$d\left(f\left(x_n\right), f\left(a\right)\right) \le q d\left(x_n, a\right) \to 0.$$
Andererseits gilt
$$f\left(x_n\right) = x_{n+1} \to a$$
für $n \to \infty$, woraus folgt $f\left(a\right) = a$. Also, a ist ein Fixpunkt.

Sind a, b zwei Fixpunkte, so gilt es nach (14.18)

$$d\left(a, b\right) = d\left(f\left(a\right), f\left(b\right)\right) \le q d\left(a, b\right),$$

woraus folgt $d\left(a, b\right) = 0$ und somit $a = b$. ■

Bemerkung. Der Beweis des Fixpunktsatzes ergibt die folgende Methode um den Fixpunkt zu bestimmen bzw zu approximieren. Man fängt mit einem beliebigen Punkt x_0 an und bildet induktiv die Folge von *Näherungslösungen* wie folgt:

$$x_{n+1} = f\left(x_n\right), \tag{14.20}$$

die gegen einen Fixpunkt konvergiert. Die Folge $\{x_n\}$ heißt die *Fixpunktiteration.*

Beispiel. Fixieren ein $a > 0$ und betrachten die Funktion $P\left(x\right) = x - \frac{a}{x}$ auf $(0, \infty)$, deren Nullstelle ist $x = \sqrt{a}$. Somit ist $\sqrt{a}$ ein Fixpunkt der Funktion

$$f\left(x\right) = x - \frac{1}{2} P\left(x\right) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right).$$

Man kann zeigen, dass f auf $X = [\sqrt{a}, \infty)$ eine Selbstabbildung und sogar eine Kontraktionsabbildung ist (siehe Aufgabe 96). Die Menge $X \subset \mathbb{R}$ ist ein vollständiger metrischer Raum da X eine abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist. Somit konvergiert die Fixpunktiteration $\{x_n\}$ gegen $\sqrt{a}$. Insbesondere lassen sich x_n als Annäherungen von $\sqrt{a}$ betrachten. Nach (14.20) haben wir
$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right),$$
und x_0 kann beliebig in X gewählt werden. Zum Beispiel, sei $a = 2$. Setzen wir $x_0 = 2$ und
$$x_{n+1} = f\left(x_n\right) = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right).$$
Dann gilt $x_1 = f\left(2\right) = \frac{3}{2}$, $x_2 = f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{17}{12}$, $x_3 = f\left(\frac{17}{12}\right) = \frac{577}{408}$, $x_4 = f\left(\frac{577}{408}\right) = \frac{665\,857}{470\,832}$ und

$$x_5 = f\left(\frac{665\,857}{470\,832}\right) = \frac{886\,731\,088\,897}{627\,013\,566\,048} = 1.41421356237309505...,$$

was schon eine gute Annäherung von $\sqrt{2}$ mit 17 richtigen Nachkommastellen ist.

25.06.21 **Vorlesung 21**

14.10 Kompakte Mengen und Extremwertsatz

Seien (X, d) ein metrischer Raum space und K eine Teilmenge von X.

Definition. Eine *Überdeckung* von K ist ein Mengensystem $\{V_\alpha\}_{\alpha \in S}$ von Teilmengen von X, die K überdeckt, d.h.

$$K \subset \bigcup_{\alpha \in S} V_\alpha,$$

wobei S eine beliebige Indexmenge ist. Die Überdeckung $\{V_\alpha\}_{\alpha \in S}$ heißt *offen* wenn alle V_α offene Teilmengen von X sind.

Definition. Sei T eine Teilmenge von S. Die Familie $\{V_\alpha\}_{\alpha \in T}$ heißt *Teilüberdeckung* von $\{V_\alpha\}_{\alpha \in S}$ wenn sie auch K überdeckt.

In Analysis I haben wir den Überdeckungssatz bewiesen: jede Überdeckung eines abgeschlossenen beschränkten Intervalls $[a, b]$ mit offenen Intervallen enthält eine endliche Teilüberdeckung.

Definition. Eine Menge $K \subset X$ heißt *kompakt* wenn jede offene Überdeckung von K eine endliche Teilüberdeckung enthält. Eine kompakte Menge K heißt auch ein *Kompaktum.*

Jede endliche Menge K ist offensichtlich kompakt. Jedes abgeschlossenes beschränktes Intervall $[a, b]$ ist kompakt, was aus dem Überdeckungssatz folgt (unterhalb erhalten wir einen unabhängigen Beweis davon). Andererseits, ein offenes Intervall (a, b) ist nicht kompakt.

Eine von wichtigsten Eigenschaften von Kompaktheit ist die folgende Beziehung zur Stetigkeit.

Satz 14.17 *Seien X und Y zwei metrische Räume und $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung. Ist $K \subset X$ kompakt so ist auch das Bild $f(K) \subset Y$ kompakt.*

Kurz: stetiges Bild einer kompakten Menge ist kompakt.

Beweis. Sei $\{V_\alpha\}_{\alpha \in S}$ eine offene Überdeckung von $f(K)$, so dass

$$f(K) \subset \bigcup_{\alpha \in S} V_\alpha.$$

Anwendung von Urbildabbildung f^{-1} ergibt

$$K \subset f^{-1}\left(\bigcup_{\alpha \in S} V_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha \in S} f^{-1}(V_\alpha).$$

Nach dem Satz 14.8 ist $f^{-1}(V_\alpha)$ eine offene Menge in X und somit ist $\{f^{-1}(V_\alpha)\}_{\alpha \in S}$ eine offene Überdeckung von K in X. Nach der Kompaktheit von K gibt es eine endliche Teilüberdeckung $\{f^{-1}(V_\alpha)\}_{\alpha \in T}$ von K, d.h.

$$K \subset \bigcup_{\alpha \in T} f^{-1}(V_\alpha)$$

woraus folgt

$$f(K) \subset f\left(\bigcup_{\alpha \in T} f^{-1}(V_\alpha)\right) = \bigcup_{\alpha \in T} f\left(f^{-1}(V_\alpha)\right) = \bigcup_{\alpha \in T} V_\alpha.$$

Somit ist $\{V_\alpha\}_{\alpha \in T}$ eine endliche Teilüberdeckung von $f(K)$, was die Kompaktheit von $f(K)$ beweist. ■

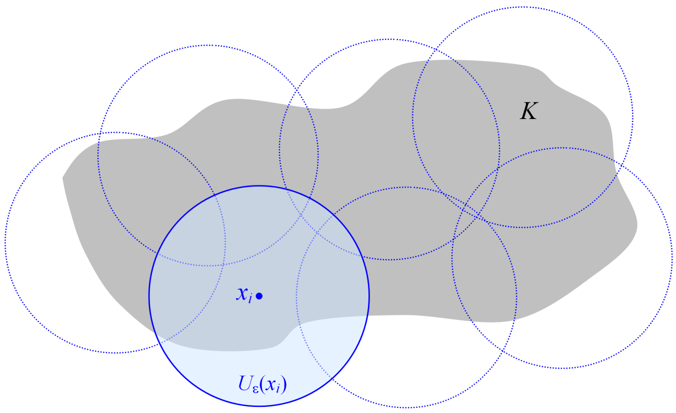
Unser nächstes Ziel ist eine Beschreibung von kompakten Mengen in vollständigen metrischen Räumen, insbesondere in $\mathbb{R}^n$.

Definition. Eine Teilmenge $K \subset X$ heißt *beschränkt* wenn sie in einer metrischen Kugel liegt.

Jede Kugel ist somit immer beschränkt. Auch jedes beschränktes Intervall in $\mathbb{R}$ ist eine beschränkte Teilmenge von X..

Definition. Eine Teilmenge $K \subset X$ heißt *totalbeschränkt* wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ eine endliche Überdeckung von K mit Kugeln von Radius ε gibt.

Die letzte Bedingung bedeutet folgendes: für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es eine endliche Folge $\{x_i\}_{i=1}^n$ von Punkten in X so dass $\{U_\varepsilon(x_i)\}_{i=1}^n$ eine Überdeckung von K ist.



Definition. Sei K eine Teilmenge von X. Eine endliche Folge $\{x_i\}_{i=1}^n$ von Punkten von X heißt *ε-Netz* von K wenn die Folge von Kugeln $\{U_\varepsilon(x_i)\}_{i=1}^n$ eine Überdeckung von K ist.

Somit ist K totalbeschränkt genau dann, wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ ein ε-Netz von K gibt. Man kann zeigen, dass die Punkte x_i in Definition von totalbeschränkter Menge K immer aus K gewählt werden können (siehe Aufgabe 95). Ein ε-Netz lässt sich als eine endliche Approximation von K mit dem Approximationsfehler $< \varepsilon$ betrachten.

Die folgenden Aussagen folgen direkt nach Definition.

- Jede Teilmenge einer beschränkten Menge ist beschränkt.
- Jede Teilmenge einer totalbeschränkten Menge ist totalbeschränkt.

Es gelten auch die folgenden Eigenschaften von beschränkten und totalbeschränkten Mengen (siehe Aufgabe 97)

- Vereinigung endlich vieler beschränkten Mengen ist auch beschränkt.
- Vereinigung endlich vieler totalbeschränkten Mengen ist auch totalbeschränkt.
- Jede totalbeschränkte Menge ist beschränkt.

Es gibt beschränkte Mengen die nicht totalbeschränkt sind, z.B. eine Kugel im Raum $C[a,b]$ ist nicht totalbeschränkt obwohl offensichtlich beschränkt ist (Aufgabe 97).

Im nächsten Satz beweisen wir, dass in $\mathbb{R}^n$ die Beschränktheit und Totalbeschränktheit äquivalent sind.

Satz 14.18 *Jede Kugel in $\mathbb{R}^n$ ist totalbeschränkt. Folglich sind in $\mathbb{R}^n$ Beschränktheit und Totalbeschränktheit äquivalent (bezüglich jeder p-Metrik).*

Beweis. Da die p-Metrik und die ∞-Metrik äquivalent sind, so reicht es diese Aussage für $p=\infty$ zu beweisen. Wir beweisen per Induktion nach n dass die Kugel $U_r(0)$ in $\mathbb{R}^n$ (bezüglich der ∞-Norm) totalbeschränkt ist.

Für den Induktionsanfang zeigen wir, dass jedes beschränktes Intervall J in $\mathbb{R}$ totalbeschränkt ist. Dafür betrachten wir für jedes $\varepsilon>0$ die Folge von Kugeln

$$U_\varepsilon(\varepsilon k) = (\varepsilon(k-1), \varepsilon(k+1)), \quad k\in\mathbb{Z}$$

die offensichtlich eine Überdeckung von $\mathbb{R}$ ist. Das beschränkte Intervall J hat nicht leeren Schnitt mit endlich vieler Kugeln $U_\varepsilon(\varepsilon k)$, die somit eine endliche Überdeckung von J ergeben.

Für den Induktionsschritt beweisen wir zuerst die folgenden Aussagen.

Behauptung. *Für $x\in\mathbb{R}^k$ und $y\in\mathbb{R}^l$ betrachten wir das Paar (x,y) als Element von $\mathbb{R}^{k+l}$. Dann gilt*

$$\|(x,y)\|_\infty = \max(\|x\|_\infty, \|y\|_\infty). \tag{14.21}$$

Sei $x=(x_1,...,x_k)$ und $y=(y_1,...,y_l)$ so dass

$$(x,y) = (x_1,...,x_k,y_1,...,y_l).$$

Dann gilt

$$\|x\|_\infty = \max(|x_1|,...,|x_k|), \qquad \|y\|_\infty = \max(|y_1|,...,|y_l|)$$

und somit

$$\|(x,y)\|_\infty = \max(|x_1|,...,|x_k|,|y_1|,...,|y_l|) = \max(\|x\|_\infty, \|y\|_\infty).$$

Behauptung. *Bezeichnen wir mit $U_r^{\mathbb{R}^n}$ die Kugel in $\mathbb{R}^n$ bezüglich der ∞-norm von radius r mit dem Zentrum 0. Dann gilt für $k+l=n$*

$$U_r^{\mathbb{R}^n} = U_r^{\mathbb{R}^k}\times U_r^{\mathbb{R}^l}.$$

Die Kugel $U_r^{\mathbb{R}^n}$ besteht aus den Punkten $(x,y) \in \mathbb{R}^n$, wobei $x \in \mathbb{R}^k$ und $y \in \mathbb{R}^l$, mit $\|(x,y)\|_\infty < r$ was nach (14.21) äquivalent zu

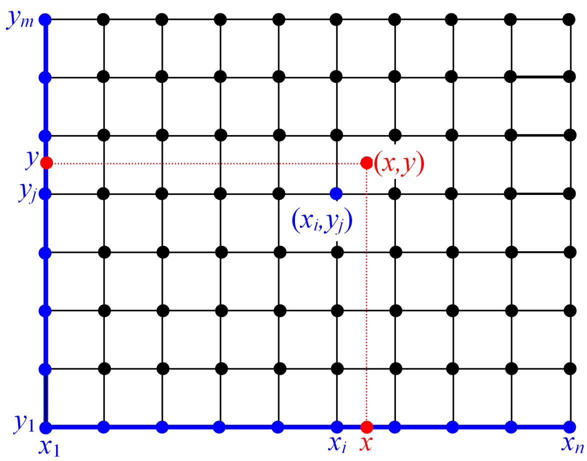
$$\|x\|_\infty < r \quad \text{und} \quad \|y\|_\infty < r$$

ist. Es folgt, dass

$$\begin{aligned} U_r^{\mathbb{R}^n} &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^n : \|(x,y)\|_\infty < r\} \\ &= \left\{(x,y) : x \in \mathbb{R}^k,\ y \in \mathbb{R}^l \text{ mit } \|x\|_\infty < r \text{ und } \|y\|_\infty < r\right\} \\ &= \left\{(x,y) : x \in U_r^{\mathbb{R}^k},\ y \in U_r^{\mathbb{R}^l}\right\} \\ &= U_r^{\mathbb{R}^k} \times U_r^{\mathbb{R}^l}. \end{aligned}$$

Behauptung. *Seien $X \subset \mathbb{R}^k$ und $Y \subset \mathbb{R}^l$ totalbeschränkte Mengen. Dann ist das Produkt $X \times Y \subset \mathbb{R}^{k+l}$ auch totalbeschränkt.*

Fixieren ein $\varepsilon > 0$. Seien $\{x_i\}_{i=1}^n$ und $\{y_j\}_{j=1}^m$ die ε-Netze von X bzw Y. Für jedes $x \in X$ gibt es ein $x_i \in \mathbb{R}^k$ mit $d_\infty(x,x_i) < \varepsilon$ und für jedes $y \in Y$ gibt es ein $y_j \in \mathbb{R}^l$ mit $d_\infty(y,y_j) < \varepsilon$.



Für jedes $(x,y) \in X \times Y$ wählen wir x_i und y_j wie oberhalb und erhalten

$$d_\infty((x,y),(x_i,y_j)) = \|(x,y)-(x_i,y_j)\|_\infty = \max\left(\|x-x_i\|_\infty, \|y-y_j\|_\infty\right) < \varepsilon.$$

Es folgt, dass die Doppelfolge $\{(x_i,y_j)\}$ von nm Punkten in $\mathbb{R}^{k+l}$ ein ε-Netz von $X \times Y$ ist.

Jetzt können wir den Induktionsschritt von n nach $n+1$ durchführen. Da $\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, so gilt

$$U_r^{\mathbb{R}^{n+1}} = U_r^{\mathbb{R}^n} \times U_r^{\mathbb{R}}.$$

Da $U_r^{\mathbb{R}^n}$ und $U_r^{\mathbb{R}}$ totalbeschränkt sind, so ist $U_r^{\mathbb{R}^{n+1}}$ auch totalbeschränkt.

Da jede totalbeschränkte Menge immer beschränkt ist, so bleibt es zu zeigen, dass jede beschränkte Teilmenge K von $\mathbb{R}^n$ auch totalbeschränkt ist, was folgt daraus, dass K eine Teilmenge einer Kugel in $\mathbb{R}^n$ ist und alle Kugeln in $\mathbb{R}^n$ totalbeschränkt sind. ∎

Definition. Eine Menge $K \subset X$ heißt *folgenkompakt* wenn jede Folge in K eine konvergente Teilfolge mit dem Grenzwert in K enthält.

Zum Beispiel, jedes abgeschlossenes beschränktes Intervall $[a, b]$ ist folgenkompakt nach dem Satz von Bolzano-Weierstrass, während ein offenes Intervall (a, b) nicht folgenkompakt ist.

Hauptsatz 14.19 *Seien (X, d) ein vollständiger metrischer Raum und K eine Teilmenge von X. Die folgenden drei Bedingungen sind äquivalent.*

(i) K ist kompakt.

(ii) K ist folgenkompakt.

(iii) K ist totalbeschränkt und abgeschlossen.

Bemerkung. Sei $J = [a, b]$ ein beschränktes abgeschlossenes Intervall. Dann erfüllt J die Bedingung (iii). Die Implikation $(iii) \Rightarrow (ii)$ ergibt, dass J folgenkompakt ist, was äquivalent zum Satz von Bolzano-Weierstrass. Die Implikation $(iii) \Rightarrow (i)$ ergibt, dass J kompakt ist, was äquivalent zum Überdeckungssatz.

Beweis. $\boxed{(i) \Longrightarrow (ii)}$ Wir benutzen die folgende Terminologie. Ein Punkt $x \in X$ heißt *Häufungspunkt* einer Folge $\{x_n\}$ aus X wenn x der Grenzwert einer Teilfolge von $\{x_n\}$ ist. Ein Punkt $x \in X$ heißt *Verdichtungspunkt* von $\{x_n\}$ wenn jede Kugel $U_r(x)$ mit $r > 0$ unendlich viele Glieder der Folge $\{x_n\}$ enthält.

Behauptung. *Ein $x \in X$ ist ein Häufungspunkt einer Folge $\{x_n\}$ aus X genau dann, wenn x ein Verdichtungspunkt von $\{x_n\}$ ist.*

In der Tat, ist x ein Häufungspunkt, so enthält jeder Kugel $U_r(x)$ fast alle Glieder einer Teilfolge von $\{x_n\}$ und somit unendlich viele Glieder der Folge $\{x_n\}$. Ist x ein Verdichtungspunkt, so gibt es eine Teilfolge $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ mit $x_{n_k} \in U_{1/k}(x)$, die somit gegen x konvergiert, so dass x ein Häufungspunkt ist. In der Tat, wählen wir n_1 so dass $x_{n_1} \in U_1(x)$. Ist n_{k-1} schon gewählt, so wählen wir ein $n_k > n_{k-1}$ so dass $x_{n_k} \in U_{1/k}(x)$ (solches n_k existiert da $U_{1/k}(x)$ unendlich viele Glieder der Folge $\{x_n\}$ enthält).

Sei K kompakt und sei $\{x_n\}$ eine Folge in K. Zeigen wir, dass $\{x_n\}$ eine konvergente Teilfolge mit dem Grenzwert in K enthält, d.h. es einen Verdichtungspunkt von $\{x_n\}$ in K gibt. Nehmen wir das Gegenteil an, dass jedes $x \in K$ kein Verdichtungspunkt der Folge $\{x_n\}$ ist. Somit gibt es für jedes $x \in K$ ein $\varepsilon_x > 0$ so dass die Kugel $U_{\varepsilon_x}(x)$ nur endlich viele Glieder der Folge $\{x_n\}$ enthält. Die Familie $\{U_{\varepsilon_x}(x)\}_{x \in K}$ ist eine offene Überdeckung von K, woraus folgt, dass sie eine endliche Teilüberdeckung enthält. Da jede Kugel $U_{\varepsilon_x}(x)$ nur endlich viele Glieder der Folge $\{x_n\}$ enthält, so beschließen wir, dass die Folge $\{x_n\}$ nur endlich viele Glieder enthält, was ein Widerspruch ist.

$\boxed{(ii) \Longrightarrow (iii)}$ Zeigen wir zuerst, dass K abgeschlossen ist. Sei $\{x_n\}$ eine Folge in K die einen Grenzwert $a \in X$ hat. Beweisen wir, dass $a \in K$. Nach der Folgenkompaktheit von K besitzt $\{x_n\}$ eine konvergente Teilfolge mit dem Grenzwert in K. Da der Grenzwert der Teilfolge auch gleich a ist, so erhalten wir $a \in K$..

Beweisen wir jetzt, dass K totalbeschränkt ist, d.h. es für jedes $\varepsilon > 0$ ein ε-Netz von K gibt. Nehmen wir das Gegenteil an, dass es für ein $\varepsilon > 0$ kein ε-Netz gibt. Definieren wir dann induktiv eine Folge $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset K$ wie folgt. Sei $x_1 \in K$ beliebig. Sind $x_1, ..., x_n$

schon bestimmt, so wählen wir x_{n+1} wie folgt. Die Kugeln $\{U_\varepsilon(x_i)\}_{i=1}^n$ überdecken K nicht, da sonst $\{x_i\}_{i=1}^n$ ein ε-Netz wäre. Somit gibt es einen Punkt in K, der in keiner Kugel $U_\varepsilon(x_i)$, $i = 1, ..., n$ liegt, so bezeichnen wir diesen Punkt mit x_{n+1}.

Nach Konstruktion gilt $d(x_n, x_m) \geq \varepsilon$ für beliebige zwei Indizes $n \neq m$. Daraus folgt, dass $\{x_n\}$ keine Cauchy-Folge ist und darüber hinaus keine Teilfolge von $\{x_n\}$ eine Cauchy-Folge ist. Somit ist keine Teilfolge von $\{x_n\}$ konvergent, was in Widerspruch zur Folgenkompaktheit von X ist.

$\boxed{(iii) \implies (i)}$ Angenommen, dass K totalbeschränkt und abgeschlossen ist, beweisen wir, dass jede offene Überdeckung $\{V_\alpha\}$ von K eine endliche Teilüberdeckung von K besitzt. Nehmen wir das Gegenteil an: es gibt in $\{V_\alpha\}$ keine endliche Teilüberdeckung von K.

Wir werden eine Folge $\{K_n\}_{n=0}^\infty$ von Mengen mit den folgenden Eigenschaften aufbauen:

(a) $K_0 = K$ und $K_n \subset K_{n-1}$ für $n \geq 1$;

(b) jedes K_n ist abgeschlossen und totalbeschränkt;

(c) K_n liegt in einer abgeschlossenen Kugel von Radius 2^{-n} für jedes $n \geq 1$;

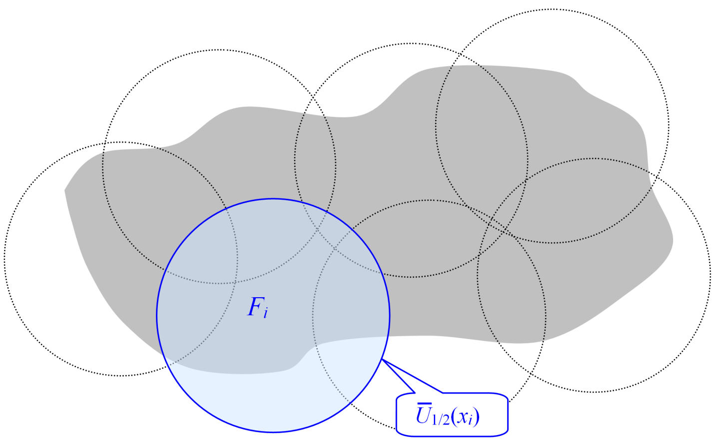
(d) K_n lässt keine endliche Teilüberdeckung von $\{V_\alpha\}$ zu.

Zuerst bestimmen wir K_1. Nach Totalbeschränktheit gibt es ein $\frac{1}{2}$-Netz $\{x_i\}$ von K. Setzen wir

$$F_i = \overline{U}_{\frac{1}{2}}(x_i) \cap K$$

und bemerken folgendes:

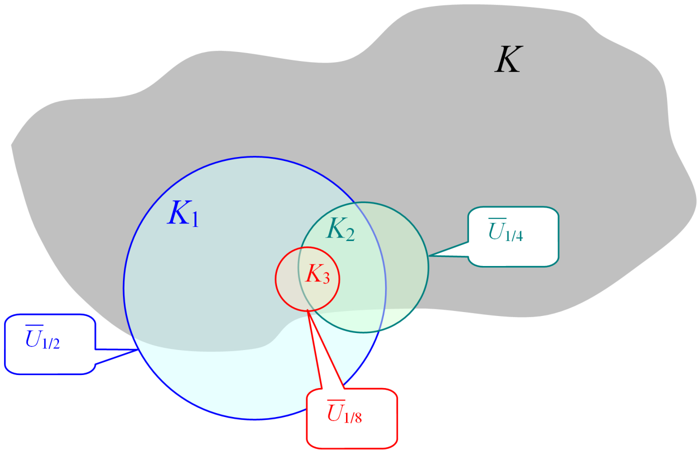
- $F_i \subset K$;
- F_i ist abgeschlossen und totalbeschränkt;
- F_i liegt in einer abgeschlossenen Kugel von Radius $\frac{1}{2}$;
- $\bigcup_i F_i = K$.



Falls jedes F_i eine endliche Teilüberdeckung von $\{V_\alpha\}$ zulässt, so liefert die Vereinigung von den Teilüberdeckungen von allen F_i eine endliche Teilüberdeckung von K. Somit existiert ein F_i ohne endliche Teilüberdeckung von $\{V_\alpha\}$. Setzen wir $K_1 = F_i$ für dieses i.

Offensichtlich erfüllt K_1 alle Bedingungen (a)-(d) mit $n = 1$.

Ist K_{n-1} schon bestimmt, so konstruieren wir K_n mit der gleichen Methode, indem wir K_{n-1} anstatt K benutzen und ein 2^{-n}-Netz von K_{n-1} wählen.



Für jedes $n \geq 1$ wählen wir einen Punkt a_n aus K_n. Da K_n nach (c) in einer Kugel $\overline{U}_{2^{-n}}(z)$ liegt und

$$d(a_n, z) + 2^{-n} \leq 2^{-n} + 2^{-n} = 2^{-(n-1)},$$

so erhalten wir nach dem Lemma 14.3 dass

$$\overline{U}_{2^{-n}}(z) \subset \overline{U}_{2^{-(n-1)}}(a_n)$$

und somit

$$K_n \subset \overline{U}_{2^{-(n-1)}}(a_n). \tag{14.22}$$

Da $a_{n+1} \in K_{n+1} \subset K_n$, so gilt

$$d(a_n, a_{n+1}) \leq 2^{-(n-1)}.$$

Nach dem Lemma 14.16 ist $\{a_n\}$ eine Cauchy-Folge, und nach der Vollständigkeit von X ist die Folge $\{a_n\}$ konvergent, sei $a = \lim a_n$.

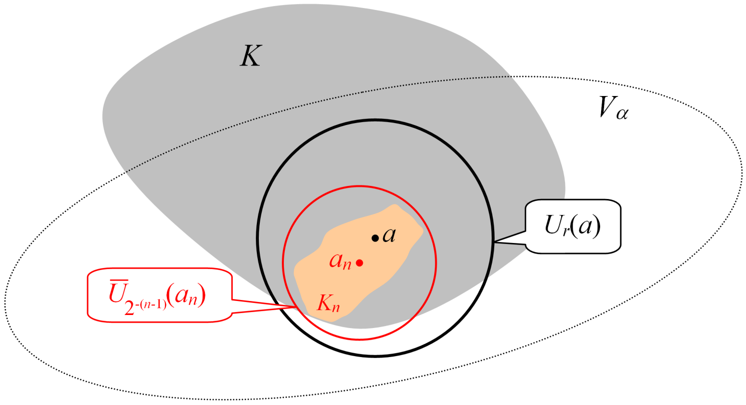
Da K abgeschlossen ist, so liegt a in K. Folglich liegt der Punkt a auch in einer von Mengen V_α. Da V_α offen ist, so existiert ein $r > 0$ mit $U_r(a) \subset V_\alpha$. Für hinreichend großes n gilt auch

$$\overline{U}_{2^{-(n-1)}}(a_n) \subset U_r(a), \tag{14.23}$$

da für großes n

$$d(a, a_n) + 2^{-(n-1)} < r$$

(siehe Lemma 14.3).



Es folgt aus (14.22) und (14.23), dass

$$K_n \subset U_r(a) \subset V_\alpha.$$

Somit ist K_n nur von einer Menge V_α überdeckt, was im Widerspruch zur (d) steht. ■

30.06.21 Vorlesung 22

Bemerkung. Die Implikationen $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii)$ des Satzes 14.19 gelten ohne die Voraussetzung von Vollständigkeit von X, was man aus dem Beweis sieht.

Korollar 14.20 *Sei K eine kompakte Teilmenge eines metrischen Raums (X, d). Dann ist der Unterraum (K, d) vollständig.*

Beweis. Sei $\{x_n\}$ eine Cauchy-Folge in K. Nach der Implikation $(i) \Rightarrow (ii)$ des Satzes 14.19 ist K folgenkompakt so dass $\{x_n\}$ eine konvergente Teilfolge $\{x_{n_i}\}$ mit einem Grenzwert $a \in K$ hat. Nach der Cauchy-Bedingung gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ so dass

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon \quad \text{für alle } n, m \geq N.$$

Einsetzen $n = n_i$ ergibt, dass für ein $I \in \mathbb{N}$

$$d(x_{n_i}, x_m) < \varepsilon \quad \text{für alle } i \geq I \text{ und } m \geq N.$$

Für $i \to \infty$ erhalten wir

$$d(a, x_m) \leq \varepsilon \quad \text{für alle } m \geq N,$$

woraus folgt, dass $x_m \to a$ für $m \to \infty$. Somit konvergiert die ganze Folge $\{x_n\}$ gegen $a \in K$, und (K, d) ist vollständig. ■

Korollar 14.21 *Eine Menge $K \subset \mathbb{R}^n$ ist kompakt genau dann, wenn K beschränkt und abgeschlossen ist.*

Beweis. Der Raum $\mathbb{R}^n$ ist vollständig nach Korollar 14.13. Nach dem Satz 14.18 ist K totalbeschränkt genau dann, wenn K beschränkt ist. Somit folgt die Aussage aus dem Satz 14.19. ■

Korollar 14.22 (Extremwertsatz) *Seien K eine kompakte Teilmenge von einem metrischen Raum (X, d) und $f : K \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann existieren die beiden Werten $\max_K f$ und $\min_K f$. Insbesondere gilt diese Aussage wenn K eine abgeschlossene beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ ist.*

Beweis. Da K kompakt ist, so ist $f(K)$ auch kompakt nach dem Satz 14.17. Nach dem Korollar 14.21 ist $f(K)$ eine beschränkte und abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{R}$. Insbesondere sind $\sup_K f = \sup f(K)$ und $\inf_K f = \inf f(K)$ endlich. Da $\sup_K f$ und $\inf_K f$ die Grenzwerte von Folgen aus $f(K)$ sind, so liegen sie in $f(K)$ nach der Abgeschlossenheit von $f(K)$. Somit existieren die beiden Werte $\max f(K)$ und $\min f(K)$.

Ist K eine abgeschlossene beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ so ist K kompakt nach dem Korollar 14.21 so dass die erste Aussage verwendbar ist. ∎

Korollar 14.23 *Alle Normen in $\mathbb{R}^n$ sind äquivalent.*

Beweis in Aufgabe 102.

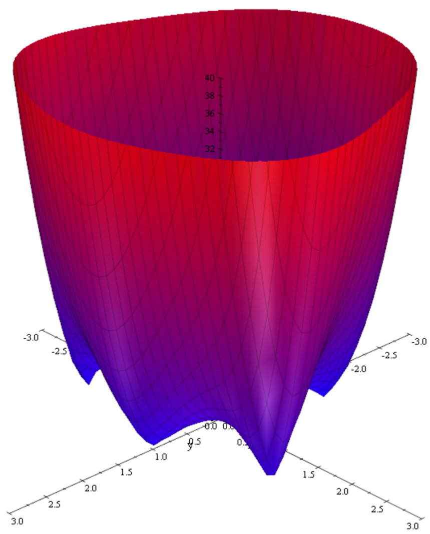
14.11 Fundamentalsatz der Algebra

Hauptsatz 14.24 (Fundamentalsatz der Algebra) *Jedes Polynom*

$$P(z) = a_0 + a_1 z + ... + a_n z^n$$

des Grades $n \geq 1$ mit komplexwertigen Koeffizienten $a_0, a_1, ..., a_n$, wobei $a_n \neq 0$, hat mindestens eine komplexe Nullstelle.

Beweis. Wir beweisen, dass die reellwertige Funktion $z \mapsto |P(z)|$ eine Minimumstelle in $\mathbb{C}$ besitzt und $\min |P(z)| = 0$ ist, woraus folgt, dass die Minimumstelle von $|P(z)|$ auch eine Nullstelle von $P(z)$ ist.



Der Graph der Funktion $|z^5 + 2z^2 - 4|$

Bemerken wir zunächst, dass

$$|P(z)| \to \infty \text{ für } |z| \to \infty,$$

da

$$\begin{aligned} |P(z)| &\geq |a_n z^n| - \left|a_{n-1} z^{n-1}\right| - \left|a_{n-2} z^{n-2}\right| - ... - |a_0| \\ &= |z^n| \left(|a_n| - \frac{|a_{n-1}|}{|z|} - \frac{|a_{n-2}|}{|z|^2} - ... \frac{|a_0|}{|z|^n} \right) \\ &\sim |a_n z^n| \text{ für } |z| \to \infty, \end{aligned}$$

und $|a_n z^n| \to \infty$ für $|z| \to \infty$. Wählen wir $R > 0$ so groß, dass

$$|P(z)| > |a_0| \quad \text{für alle} \quad |z| > R,$$

und betrachten eine abgeschlossene Kugel in $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$:

$$K := \overline{U}_R(0) = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq R\}.$$

Da die Funktion $z \mapsto |P(z)|$ offensichtlich stetig ist, so nimmt die Funktion $|P(z)|$ nach Korollar 14.22 den minimalen Wert in K an einer Stelle $z_0 \in K$ an. Dann gilt

$$|P(z_0)| \leq |P(0)| = |a_0| < |P(z)| \text{ für alle } z \in K^c.$$

Somit ist z_0 die Minimumstelle von $|P(z)|$ nicht nur in K sondern auch in $\mathbb{C}$.

Zeigen wir, dass $|P(z_0)| = 0$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, dass $z_0 = 0$ (sonst stellen wir $P(z)$ als ein Polynom von $(z - z_0)$ dar und benennen $z - z_0$ in z um). Nehmen wir das Gegenteil an, dass $P(0) \neq 0$, d.h. $a_0 \neq 0$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, dass $a_0 = 1$, d.h.

$$P(z) = 1 + a_1 z + ... + a_n z^n.$$

Zeigen wir die Existenz von einem $z \in \mathbb{C}$ mit $|P(z)| < |P(0)| = 1$, was im Widerspruch zur Minimalität von $|P(0)|$ stehen wird.

Sei $k \geq 1$ der minimale Index mit $a_k \neq 0$, so dass

$$P(z) = 1 + a_k z^k + a_{k+1} z^{k+1} + ... + a_n z^n.$$

Wir wählen ein $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ so dass die folgenden drei Bedingungen erfüllt sind:

(a) $a_k z^k$ ist eine negative reelle Zahl

(b) $\left|a_k z^k\right| < 1$

(c) $\left|a_{k+1} z^{k+1} + ... + a_n z^n\right| < \frac{1}{2} \left|a_k z^k\right|$

Gelten $(a) - (c)$, so erhalten wir

$$\begin{aligned} |P(z)| &\leq \left|1 + a_k z^k\right| + \left|a_{k+1} z^{k+1} + ... + a_n z^n\right| \\ &\leq \left|1 + a_k z^k\right| + \frac{1}{2} \left|a_k z^k\right| \\ &= 1 + a_k z^k - \frac{1}{2} a_k z^k \qquad \text{(da } a_k z^k \text{ negativ ist)} \\ &= 1 + \frac{1}{2} a_k z^k \\ &< 1, \end{aligned}$$

was zu beweisen war.

Es bleibt ein z mit $(a)-(c)$ zu finden. Dafür benutzen wir die Polarform komplexer Zahlen:

$$z = re^{i\theta} \text{ und } a_k = ae^{i\alpha},$$

wobei r und θ zu bestimmen sind und a, α gegeben. Dann gilt

$$a_k z^k = \left(ae^{i\alpha}\right)\left(r^k e^{ik\theta}\right) = ar^k e^{i(\alpha+k\theta)}.$$

Diese Zahl ist reell und negativ wenn

$$\alpha + k\theta = \pi,$$

und somit gilt (a) für

$$\theta = \frac{\pi - \alpha}{k}. \tag{14.24}$$

Jetzt bestimmen wir r. Da

$$\left|a_k z^k\right| = ar^k,$$

so gilt die Bedingung (b) d.h. $\left|a_k z^k\right| < 1$, für alle klein genug r. Die Bedingung (c) gilt auch für reichend kleine Werte von $r = |z|$ da

$$\frac{\left|a_{k+1}z^{k+1} + ... + a_n z^n\right|}{\left|a_k z^k\right|} = \frac{\left|a_{k+1}z + ... + a_n z^{n-k}\right|}{|a_k|} \to 0 \text{ für } z \to 0.$$

Somit erfüllt $z = re^{i\theta}$ die Bedingungen $(a)-(c)$ wenn θ aus (14.24) gewählt ist und r klein genug ist. ∎

14.12 Gleichmäßige Stetigkeit

Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) zwei metrische Räume und K Teilmenge von X. Eine Funktion $f : X \to Y$ heißt *gleichmäßig stetig* auf K wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \;\; \forall x, y \in K \text{ mit } d_X(x, y) < \delta \;\text{ gilt } d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

Satz 14.25 *Sei $f : X \to Y$ stetig. Dann ist f gleichmäßig stetig auf jeder kompakten Teilmenge $K \subset X$.*

Beweis. Fixieren wir ein $\varepsilon > 0$. Nach der Stetigkeit von f, für jedes $x \in K$ gibt es ein $\delta_x > 0$ so dass

$$\forall y \in X \text{ mit } d_X(x, y) < \delta_x \;\text{ gilt }\; d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon/2.$$

Das Mengensystem von Kugeln $\left\{U_{\frac{1}{2}\delta_x}(x)\right\}_{x \in K}$ ist eine offene Überdeckung von K. Sei $\left\{U_{\frac{1}{2}\delta_{x_k}}(x_k)\right\}_{k=1}^{n}$ eine endliche Teilüberdeckung. Setzen wir

$$\delta := \frac{1}{2} \min_{1 \le k \le n} \delta_{x_k} > 0.$$

Seien jetzt x, y beliebige Punkte in K mit $d_X(x,y) < \delta$. Der Punkt x liegt in einer Kugel $U_{\frac{1}{2}\delta_{x_k}}(x_k)$, d.h.

$$d_X(x, x_k) < \frac{1}{2}\delta_{x_k}$$

Da

$$d_X(x,y) < \delta \leq \frac{1}{2}\delta_{x_k},$$

so erhalten wir nach der Dreiecksungleichung

$$d_X(y, x_k) < \delta_{x_k}.$$

Es folgt nach der Definition von δ_{x_k} dass

$$d_Y(f(x), f(x_k)) < \varepsilon/2 \text{ und } d_Y(f(y), f(x_k)) < \varepsilon/2,$$

was nach der Dreiecksungleichung ergibt

$$d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon,$$

was zu beweisen war. ■

14.13 Zusammenhängende Mengen und Zwischenwertsatz

Definition. Eine Teilmenge K von einem metrischen Raum X heißt *zusammenhängend* wenn für jede Überdeckung $K \subset U \sqcup V$ von K mit zwei disjunkten offenen Mengen U, V gilt $K \subset U$ oder $K \subset V$.

Satz 14.26 (Zwischenwertsatz) *Seien X und Y zwei metrische Räume und $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung. Ist K eine zusammenhängende Teilmenge von X so ist $f(K)$ auch zusammenhängend.*

Beweis. Sei $f(K) \subset U \sqcup V$ eine Überdeckung von $f(K)$ mit disjunkten offenen Mengen. Daraus folgt

$$K \subset f^{-1}(U \sqcup V) = f^{-1}(U) \sqcup f^{-1}(V).$$

Da nach dem Satz 14.8 $f^{-1}(U)$ und $f^{-1}(V)$ offen sind, so ergibt der Zusammenhang von K, dass $K \subset f^{-1}(U)$ oder $K \subset f^{-1}(V)$, woraus folgt, dass $f(K) \subset U$ oder $f(K) \subset V$, was zu beweisen war. ■

Satz 14.27 *Jedes Intervall $J \subset \mathbb{R}$ ist zusammenhängend. Umgekehrt, jede zusammenhängende Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist ein Intervall.*

Beweis. Zeigen wir, dass beliebiges Intervall J zusammenhängend ist. Sei $J \subset U \sqcup V$ eine Überdeckung von J mit disjunkten offenen Mengen U, V. Definieren wir eine Funktion $f : J \to \mathbb{R}$ wie folgt:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in U \cap J, \\ 0, & x \in V \cap J. \end{cases}$$

Beweisen wir, dass f stetig auf J ist. Für jedes $x \in U \cap J$ gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit

$$(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset U,$$

woraus folgt, dass $f \equiv 1$ in $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \cap J$. Insbesondere ist f stetig an x. Analog ist f stetig an alle Stellen $x \in V \cap J$ und somit auf J.

Sind $U \cap J$ und $V \cap J$ nicht leer, so nimmt f auf J die Werte 0 und 1 an und somit nach dem Zwischenwertsatz aus Analysis 1 soll f auch alle Werte in $[0,1]$ annehmen, was nicht der Fall ist. Somit ist $U \cap J$ oder $V \cap J$ leer, woraus folgt, dass $J \subset V$ oder $J \subset U$.

Sei K eine zusammenhängende Teilmenge von $\mathbb{R}$. Beweisen wir, dass K ein Intervall ist. Für $a, b \in K$ soll auch das ganze Intervall $[a,b]$ in K liegen, da es sonst einen Punkt $c \in (a,b) \setminus K$ gibt und somit eine offene Überdeckung von K

$$K \subset (-\infty, c) \sqcup (c, +\infty),$$

mit $K \not\subset (-\infty, c)$ und $K \not\subset (c, \infty)$, was im Widerspruch zum Zusammenhang von K steht. Es folgt, dass K ein Intervall mit den Grenzen $\inf K$ und $\sup K$ ist. ■

Bemerkung. Als eine Folgerung aus den Sätzen 14.26 und 14.27 erhalten wir, dass das Bild der stetigen Abbildung $f : J \to \mathbb{R}$ wieder ein Intervall ist, was aus Analysis 1 schon bekannt ist.

Für jede zwei Punkte $x, y \in \mathbb{R}^n$ bezeichnen wir mit $[x, y]$ die Menge

$$[x, y] := \{(1 - \lambda)\, x + \lambda y : \lambda \in [0,1]\}.$$

Die Menge $[x, y]$ ist die gerade Strecke zwischen x und y.

Definition. Eine Menge $K \subset \mathbb{R}^n$ heißt *Sterngebiet*, wenn es einen Punkt $a \in K$ gibt mit

$$x \in K \Rightarrow [a, x] \in K.$$

Der Punkt a heißt ein *Sternzentrum*.

Beispiel. Zeigen wir, dass jede offene oder abgeschlossene Kugel in $\mathbb{R}^n$ bezüglich einer Norm immer ein Sterngebiet ist. Sei K eine (offene oder abgeschlossene) Kugel mit Zentrum a und Radius r, d.h.

$$K = U_r(a) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - a\| < r\} \quad \text{oder} \quad K = \overline{U}_r(a) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - a\| \leq r\}.$$

Zeigen wir, dass a ein Sternzentrum von K ist, d.h. für jedes $x \in K$ gilt $[a, x] \subset K$. Jeder Punkt $y \in [a, x]$ lässt sich wie folgt darstellen:

$$y = (1 - \lambda)\, a + \lambda x \quad \text{für ein } \lambda \in [0,1],$$

woraus folgt, dass

$$\|y - a\| = \|\lambda x - \lambda a\| = |\lambda|\, \|x - a\| \leq \|x - a\|$$

und somit $y \in K$ und $[a, x] \subset K$.

Satz 14.28 *Jedes Sterngebiet K in $\mathbb{R}^n$ ist zusammenhängend. Insbesondere sind alle Kugeln in $\mathbb{R}^n$ zusammenhängend.*

Beweis. Sei a ein Sternzentrum von K, so dass für jedes $x \in K$ gilt $[a,x] \subset K$. Sei $K \subset U \sqcup V$ eine Überdeckung von K mit offenen Mengen. Nehmen wir an, dass $a \in U$. Es folgt, dass U, V auch eine Überdeckung von $[a,x]$ für jedes $x \in K$ ist, d.h.

$$[a,x] \subset U \sqcup V.$$

Die Strecke $[a,x]$ ist das Bild von $[0,1]$ unter der Abbildung

$$\begin{aligned} \varphi &: [0,1] \to \mathbb{R}^n \\ \varphi(\lambda) &= (1-\lambda)\,a + \lambda x. \end{aligned}$$

Da φ offensichtlich stetig ist, so ist $[a,x] = \varphi([0,1])$ zusammenhängend nach dem Satz 14.26. Somit soll $[a,x]$ in einer von U, V enthalten. Da $a \in U$, so folgt es, dass $[a,x] \subset U$, und somit $x \in U$ und $K \subset U$. ■

Beispiel. Bestimmen wir das Bild der Funktion

$$f(x,y,z) = \frac{x^2+y^2+z^2}{(x+y+z)^2}$$

auf der Menge

$$K = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x,y,z > 0\right\}.$$

Die Funktion $f : K \to \mathbb{R}$ ist offensichtlich stetig. Da K Sterngebiet ist und somit zusammenhängend, so ist das Bild $f(K)$ zusammenhängende Teilmenge von $\mathbb{R}$ und somit ein Intervall. Bestimmen wir die Grenzen des Intervalls, d.h. $\sup f$ und $\inf f$, und ob diese dem Intervall gehören. Wir haben

$$x^2+y^2+z^2 < x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz = (x+y+z)^2$$

so dass $f(x,y,z) < 1$ und $\sup f \leq 1$. In der Tat gilt $\sup f = 1$ da für $y \to 0$ und $z \to 0$ erhalten wir $f(x,y,z) \to 1$. Offensichtlich liegt $\sup f = 1$ nicht in $f(K)$.

Andererseits, nach der Ungleichung zwischen arithmetischen und quadratischen Mittelwerten gilt[2]

$$x^2+y^2+z^2 \geq \frac{1}{3}(x+y+z)^2, \tag{14.25}$$

woraus folgt

$$f(x,y,z) \geq \frac{1}{3}$$

und somit $\inf f \geq \frac{1}{3}$. Da $f(1,1,1) = \frac{1}{3}$, so erhalten wir $\inf f = \frac{1}{3} \in f(K)$. Es folgt, dass

$$f(K) = [\frac{1}{3}, 1).$$

---

[2]Es gilt die Identität

$$3\left(x^2+y^2+z^3\right) = (x+y+z)^2 + (x-z)^2 + (y-z)^2 + (x-y)^2,$$

woraus (14.25) folgt.

14.14 * Vervollständigung von metrischen Räumen

In diesem Abschnitt beweisen wir, dass für jeden metrischen Raum es eine vollständige Erweiterung gibt.

Definition. Zwei metrische Räume (X, d_X) und (Y, d_Y) heißen *isometrisch* wenn es eine bijektive[3] Abbildung $\Phi : X \to Y$ gilt so dass

$$d_Y\left(\Phi\left(x_1\right), \Phi\left(x_2\right)\right) = d_X\left(x_1, x_2\right) \text{ für alle } x_1, x_2 \in X. \tag{14.26}$$

Die Abbildung Φ heißt dann *Isometrie.*

Sind zwei metrische Räume (X, d_X) und (Y, d_Y) isometrisch, so sind alle Eigenschaften dieser Räume identisch, so häufig identifiziert man (X, d_X) und (Y, d_Y).

Zum Beispiel, we haben gesehen, dass $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ isometrisch zu $B(\mathcal{E}_n)$ ist und zwar mit der Isometrie

$$\begin{aligned} \Phi &: B\left(\mathcal{E}_n\right) \to \mathbb{R}^n \\ \Phi(f) &= (f(1), ..., f(n)) \end{aligned}$$

für beliebige Funktion $f \in B(\mathcal{E}_n)$. Somit können wir $\mathbb{R}^n$ mit $B(\mathcal{E}_n)$ identifizieren und sagen, dass jede Funktion $f \in B(\mathcal{E}_n)$ ein Element von $\mathbb{R}^n$ ist.

Definition. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Für jede Teilmenge $A \subset X$ definieren wir den *Abschluss* $\overline{A}$ von A als die Teilmenge von X die aus allen Grenzwerten von allen konvergenten Folgen aus A besteht.

Insbesondere gilt immer $A \subset \overline{A}$. Die Identität $A = \overline{A}$ gilt genau dann, wenn A abgeschlossen ist.

Definition. Man sagt, dass die Menge $A \subset X$ *dicht* in X liegt wenn $\overline{A} = X$.

Zum Beispiel, $\mathbb{Q}$ liegt dicht in $\mathbb{R}$, da jede reelle Zahl der Grenzwert einer Folge von rationalen Zahlen ist.

Jeder metrische Raum (X, d) lässt sich vervollständigen wie folgt.

Satz 14.29 *Für jeden metrischen Raum (X, d) gibt es einen anderen metrischen Raum $(\widetilde{X}, \widetilde{d})$ mit den folgenden Eigenschaften:*

- *$(\widetilde{X}, \widetilde{d})$ ist vollständig*
- *Es gibt eine Teilmenge $Y \subset \widetilde{X}$ so dass Y dicht in $\widetilde{X}$ liegt und $(Y, \widetilde{d})$ isometrisch zu (X, d) ist.*

Der Raum $(\widetilde{X}, \widetilde{d})$ heißt die *Vervollständigung* von (X, d). Man kann (X, d) mit $\left(Y, \widetilde{d}\right)$ identifizieren und dann sagen, dass $\widetilde{X}$ eine vollständige Erweiterung von X ist.

Zum Beispiel, $\mathbb{R}$ ist die Vervollständigung von $\mathbb{Q}$ bezüglich der Metrik $d(x, y) = |x - y|$, was wir unterhalb erklären.

[3] Es reicht zu erfordern, dass Φ surjektiv ist, da es aus (14.26) folgt, dass Φ injektiv ist:

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow d_X\left(x_1, x_2\right) \neq 0 \Rightarrow d_Y\left(\Phi\left(x_1\right), \Phi\left(x_2\right)\right) \neq 0 \Rightarrow \Phi\left(x_1\right) \neq \Phi\left(x_2\right).$$

Beweis. Bezeichnen wir mit F die Menge von allen Cauchy-Folgen in X. Die Elementen von F werden mit f, g usw. bezeichnet. Ist f ein Element von F so werden die Glieder der Folge f wie üblich mit f_k bezeichnet so dass $f = \{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$.

Zwei Folgen f und g aus F heißen äquivalent wenn $d(f_k, g_k) \to 0$ für $k \to \infty$. In diesem Fall schreibt man $f \sim g$. Es ist klar, dass die Relation $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist.

Die Äquivalenzklasse der Folge $f = \{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ wird mit $[f]$ oder $\left[\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}\right]$ bezeichnet. Bezeichnen wir mit $[F]$ die Menge von allen Äquivalenzklassen von Elementen von F. Für $[f], [g] \in [F]$ definieren wir

$$\widetilde{d}([f], [g]) = \lim_{k\to\infty} d(f_k, g_k). \tag{14.27}$$

Da $\{f_k\}$ und $\{g_k\}$ Cauchy-Folgen sind, so ist $\{d(f_k, g_k)\}$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$, da

$$|d(f_n, g_n) - d(f_m, g_m)| \le d(f_n, f_m) + d(g_n, g_m) \to 0 \text{ für } n, m \to \infty.$$

Da jede Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$ konvergiert, so existiert der Grenzwert in (14.27). Auch ist der Grenzwert unabhängig von der Wahl von f aus der Klasse $[f]$. In der Tat, gilt $f' \sim f$ so erhalten wir

$$|d(f'_k, g_k) - d(f_k, g_k)| \le d(f'_k, f_k) \to 0 \text{ für } k \to \infty$$

so dass

$$\lim_{k\to\infty} d(f_k, g_k) = \lim_{k\to\infty} d(f'_k, g_k).$$

Somit ist die Funktion $\widetilde{d}$ wohldefiniert auf $[F] \times [F]$.

Behauptung. *Die Funktion $\widetilde{d}$ ist eine Metrik auf $[F]$.*

Die Symmetrie und Dreiecksungleichung von $\widetilde{d}$ folgen direkt aus (14.27). Auch es ist klar, dass $\widetilde{d} \ge 0$. Beweisen wir dass

$$\widetilde{d}([f], [g]) = 0 \Leftrightarrow [f] = [g].$$

In der Tat haben wir

$$\widetilde{d}([f], [g]) = 0 \Leftrightarrow d(f_k, g_k) \to 0 \Leftrightarrow f \sim g \Leftrightarrow [f] = [g].$$

Somit ist $\widetilde{d}$ eine Metrik.

Behauptung. *Für jedes $x \in X$ betrachten wir die konstante Folge $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} = \{x, x, ...\}$ mit $x_k = x$ für alle k. Diese Folge ist Cauchy-Folge in X und somit bestimmt ein Element von $[F]$ das mit $[x]$ bezeichnet wird. Bezeichnen wir mit $[X]$ die Teilmenge von $[F]$ die aus allen Elementen $[x]$ besteht. Dann ist $([X], \widetilde{d})$ isometrisch zu (X, d).*

Die Abbildung $x \mapsto [x]$ ist offensichtlich eine Bijektion von X nach $[X]$. Es gilt für alle $x, y \in X$

$$\widetilde{d}([x], [y]) = \lim_{k\to\infty} d(x_k, y_k) = \lim_{k\to\infty} d(x, y) = d(x, y),$$

woraus folgt, dass die Abbildung $x \mapsto [x]$ eine Isometrie ist.

Behauptung. $[X]$ *liegt dicht in* $[F]$.

Für jedes $f \in F$ und $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir die konstante Folge

$$\{f_n\}_{k\in\mathbb{N}} = \{f_n, f_n, ...\}.$$

Diese Folge bestimmt die Äquivalenzklasse $[f_n] \in [X]$. Zeigen wir, dass

$$[f_n] \to [f] \text{ für } n \to \infty,$$

woraus es folgen wird, dass $[X]$ dicht in $[F]$ liegt. Wir haben

$$\widetilde{d}([f_n], [f]) = \lim_{k\to\infty} d(f_n, f_k)$$

und somit

$$\lim_{n\to\infty} \widetilde{d}([f_n], [f]) = \lim_{n\to\infty} \lim_{k\to\infty} d(f_n, f_k) = 0,$$

da $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist.

Behauptung. $([F], \widetilde{d})$ *ist vollständig.*

Sei $\{[y_n]\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge von Elementen von $[F]$ (wobei jedes y_n selbst eine Cauchy-Folge $\{y_{nk}\}_{k\in\mathbb{N}}$ von Elementen von X ist). Fa $[X]$ dicht in $[F]$ liegt, so gibt es für jedes $[y_n] \in [F]$ ein $[x_n] \in [X]$ (wobei $x_n \in X$) mit

$$\widetilde{d}([x_n], [y_n]) < \frac{1}{n},$$

Es folgt, dass die Folge $\{[x_n]\}_{n\in\mathbb{N}}$ auch Cauchy-Folge in $[F]$ ist.

Da (X, d) und $([X], \widetilde{d})$ isometrisch sind, so ist die Folge $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in X. Somit bestimmt diese Folge ein Element $f \in F$ mit $f_n = x_n$. Wir haben schon oberhalb gesehen, dass

$$\widetilde{d}([x_n], [f]) = \widetilde{d}([f_n], [f]) \to 0 \text{ für } n \to \infty,$$

woraus folgt, dass auch

$$\widetilde{d}([y_n], [f]) \to 0 \text{ für } n \to \infty.$$

Somit gilt $[y_n] \to [f]$ und die Folge $\{[y_n]\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent.

Es bleibt nur zu setzen $\widetilde{X} = [F]$ und $Y = [X]$. ■

Sei X ein normierter Vektorraum mit der Norm N und Metrik $d(x, y) = N(x - y)$. Dann ist der Raum $\widetilde{X}$ auch ein normierter Vektorraum mit den linearen Operationen

$$[f] + [g] = \left[\{f_k + g_k\}_{k\in\mathbb{N}}\right], \quad \lambda [f] = \left[\{\lambda f_k\}_{k\in\mathbb{N}}\right]$$

und der Norm

$$\widetilde{N}([f]) = \lim_{k\to\infty} N(f_k).$$

Es folgt, dass

$$\widetilde{d}([f], [g]) = \lim_{k\to\infty} d(f_k, g_k) = \lim_{k\to\infty} N(f_k - g_k) = \widetilde{N}([f] - [g]),$$

so dass die Metrik $\widetilde{d}$ von der Norm $\widetilde{N}$ erzeugt ist. Somit ist $(\widetilde{X}, \widetilde{N})$ ein Banachraum, und X lässt sich als ein dicht liegender Unterraum von $\widetilde{X}$ identifizieren.

Beispiel. Sei $X = \mathbb{Q}$ und $d(x, y) = |x - y|$. Der Raum $\mathbb{Q}$ von rationalen Zahlen ist nicht vollständig, da jede Folge $\{f_k\}$ von rationalen Zahlen, die gegen eine irrationale Zahl in $\mathbb{R}$ konvergiert, ist offensichtlich Cauchy-Folge in $\mathbb{Q}$ aber ohne den Grenzwert in $\mathbb{Q}$.

Die Vervollständigung von $\mathbb{Q}$ ist der Raum $\widetilde{\mathbb{Q}}$ von allen Äquivalenzklassen von Cauchy-Folgen aus $\mathbb{Q}$. Jede Cauchy-Folge $f = \{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ von rationalen Zahlen hat den Grenzwert in $\mathbb{R}$ den wir mit $\overline{f}$ bezeichnen, d.h.

$$\overline{f} = \lim_{k\to\infty} f_k.$$

Gilt $f \sim g$ so erhalten wir

$$\left|\overline{f} - \overline{g}\right| = \lim |f_k - g_k| = 0$$

so dass $\overline{f} = \overline{g}$. Somit ist die folgende Abbildung wohldefiniert:

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{Q} & \to & \mathbb{R} \\ [f] & \mapsto & \overline{f} \end{array} \tag{14.28}$$

Diese Abbildung ist offensichtlich surjektiv da jede reelle Zahl der Grenzwert einer Folge von rationalen Zahlen sit. Es gilt für zwei Cauchy-Folgen f, g von rationalen Zahlen

$$\widetilde{d}([f], [g]) = \lim_{k\to\infty} |f_k - g_k| = \left|\overline{f} - \overline{g}\right| = d\left(\overline{f}, \overline{g}\right),$$

so dass die Abbildung (14.28) eine Isometrie ist. Somit ist die Vervollständigung $\widetilde{\mathbb{Q}}$ von $\mathbb{Q}$ isometrisch zu $\mathbb{R}$.

In anderen Wörtern, die Menge $\mathbb{R}$ von reellen Zahlen lässt sich mit der Menge von Äquivalenzklassen von Cauchy-Folgen von rationalen Zahlen identifizieren.

14.15 * p-adische Zahlen

Betrachten wir in $X = \mathbb{Q}$ eine andere Metrik. Fixieren wir eine Primzahl p und definieren in $\mathbb{Q}$ eine *p-adische Norm* wie folgt. Jedes $x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ lässt sich eindeutig darstellen wie folgt:

$$x = p^n \frac{a}{b},$$

wobei $a, b, n \in \mathbb{Z}$ und a, b durch p nicht teilbar sind. Dann setzen wir

$$\|x\|_p := p^{-n}.$$

Für $x = 0$ setzen wir $\|0\|_p = 0$. Zum Beispiel, es gilt

$$\|10,8\|_3 = \left\|\frac{54}{5}\right\|_3 = \left\|3^3 \frac{2}{5}\right\|_3 = 3^{-3} = \frac{1}{27}.$$

Es ist leicht zu zeigen, dass die p-adische Norm die folgenden Eigenschaften erfüllt:

$$\|xy\|_p = \|x\|_p \|y\|_p \tag{14.29}$$

und

$$\|x + y\|_p \leq \max\left(\|x\|_p, \|y\|_p\right). \tag{14.30}$$

Definieren wir den *p-adischen Abstand* zwischen $x, y \in \mathbb{Q}$ wie folgt:

$$d_p(x,y) := \|x-y\|_p .$$

Es folgt aus (14.30), dass für alle $x, y, z \in \mathbb{Q}$ gilt

$$d_p(x,y) \leq \max(d_p(x,z), d_p(y,z)) . \tag{14.31}$$

Somit erfüllt d_p die Dreiecksungleichung[4] und auch die anderen Axiome von Metrik.

Definition. Die Metrik d_p in $\mathbb{Q}$ heißt die *p-adische Metrik*.

Es folgt aus (14.29) und (14.30), dass der Grenzwert in $(\mathbb{Q}, d_p)$ die folgenden Eigenschaften erfüllt: gelten

$$x_n \overset{d_p}{\to} x \quad \text{und} \quad y_n \overset{d_p}{\to} y \tag{14.32}$$

so gelten auch

$$x_n + y_n \overset{d_p}{\to} x + y \quad \text{und} \quad x_n y_n \overset{d_p}{\to} xy. \tag{14.33}$$

Definition. Die Vervollständigung $\widetilde{\mathbb{Q}}$ von $(\mathbb{Q}, d_p)$ wird mit $\mathbb{Q}_p$ bezeichnet, und die Elemente von $\mathbb{Q}_p$ heißen *p-adische Zahlen*.

Wir betrachten $\mathbb{Q}$ als dichte Teilmenge von $\mathbb{Q}_p$. Man definiert die Operationen $x + y$ und xy auf p-adischen Zahlen x, y mit Hilfe von (14.33), wobei $\{x_n\}$ und $\{y_n\}$ jetzt die Folgen von rational Zahlen mit (14.32) sind. Es folgt, dass $\mathbb{Q}_p$ ein Körper ist.

Analog erweitert man den Begriff von p-Norm auf $\mathbb{Q}_p$ und zeigt, dass die p-Norm in $\mathbb{Q}_p$ auch (14.29) und (14.30) erfüllt. Somit ist $\mathbb{Q}_p$ ein normierter Körper.

Um zu verstehen wie die p-adischen Zahlen aussehen, betrachten wir zuerst eine Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k p^k,$$

wobei a_k die p-adische Ziffern sind, d.h. $a_k \in \{0, ..., p-1\}$. Seien

$$x_n = \sum_{k=0}^{n} a_k p^k$$

die Partialsummen der Reihe. Wir behaupten, dass die Folge $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $(\mathbb{Q}, d_p)$ ist. In der Tat, es gilt für $m > n$

$$x_m - x_n = \sum_{k=n+1}^{m} a_k p^k = p^{n+1} \sum_{k=n+1}^{m} a_k p^{k-(n+1)}.$$

Da die Summe hier eine ganze Zahl ist, so folgt es, dass

$$\|x_m - x_n\|_p \leq p^{-(n+1)} \to 0 \text{ für } n \to \infty.$$

Somit ist $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge.

[4] Die Ungleichung (14.31) ist stärker als die Dreiecksungleichung, und sie heißt *ultrametrische* Dreiecksungleichung. Jede Metrik die ultrametrische Dreiecksungleichung erfüllt heißt *Ultrametrik*. Somit ist d_p eine Ultrametrik.

Folglich hat die Folge $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ einen Grenzwert $x \in \mathbb{Q}_p$ so dass immer

$$d_p\text{-}\sum_{k=0}^{\infty} a_k p^k = d_p\text{-}\lim_{n\to\infty} x_n \in \mathbb{Q}_p.$$

Gleiches gilt für die Summen der Form

$$d_p\text{-}\sum_{k=-N}^{\infty} a_k p^k \tag{14.34}$$

wobei $N \in \mathbb{Z}_+$. Darüber hinaus kann man zeigen, dass jede p-adische Zahl der Form (14.34) hat.

Beispiel. Setzen wir $a_k = 1$ für alle k, so dass

$$x_n = \sum_{k=0}^{n} p^k = \frac{p^{n+1}-1}{p-1}.$$

Da $\|p^{n+1}\| = p^{-(n+1)} \to 0$ für $n \to \infty$ und somit

$$p^{n+1} \overset{d_p}{\to} 0,$$

so folgt es, dass

$$x_n \overset{d_p}{\to} -\frac{1}{p-1}$$

und somit

$$d_p\text{-}\sum_{k=0}^{\infty} p^k = -\frac{1}{p-1}.$$

So, in diesem Fall ist die Summe der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} p^k$ eine rationale Zahl. Zum Beispiel, in $\mathbb{Q}_2$ gilt

$$d_2\text{-}\sum_{k=0}^{\infty} 2^k = -1.$$

Allerdings für beliebige Folgen $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ von p-adischen Ziffern liegt die Summe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k p^k$ *nicht immer* in $\mathbb{Q}$ (d.h. $(\mathbb{Q}, d_p)$ nicht vollständig ist). Um dies zu beweisen, bemerken wir zuerst, dass

$$d_p\text{-}\sum_{k=0}^{\infty} a_k p^k \neq 0, \tag{14.35}$$

vorausgesetzt, dass mindestens ein a_k nicht Null ist. In der Tat, sei l der minimale Index mit $a_l \neq 0$ so dass für $n \geq l$ gilt

$$x_n = \sum_{k=0}^{n} a_k p^k = p^l \left(a_l + a_{l+1}p + ... + a_n p^{n-l}\right).$$

Da a_l nicht durch p teilbar ist, so folgt es, dass $\|x_n\|_p = p^{-l}$ und somit

$$d_p\left(x_n, 0\right) = \|x_n\|_p = p^{-l} \not\to 0 \text{ für } n \to \infty,$$

woraus (14.35) folgt.

Folglich erhalten wir, dass für zwei Folgen $\{a_k\}_{k=0}^\infty$ und $\{b\}_{k=0}^\infty$ von p-adischen Ziffern immer gilt

$$d_p\text{-}\sum_{k=0}^\infty a_k p^k \neq d_p\text{-}\sum_{k=0}^\infty b_k p^k,$$

vorausgesetzt, dass $a_k \neq b_k$ für mindestens ein k. Es folgt, dass die Menge von den Werten der Summe $d_p\text{-}\sum_{k=0}^\infty a_k p^k$ überabzählbar ist, wie die Menge von allen Folgen $\{a_k\}_{k=0}^\infty$. Somit ist auch die Menge $\mathbb{Q}_p$ überabzählbar, während $\mathbb{Q}$ abzählbar ist. Es folgt, dass $\mathbb{Q}$ eine echte Teilmenge von $\mathbb{Q}_p$ ist. Folglich ist $(\mathbb{Q}, d_p)$ nicht vollständig.

Man erhält ein explizites Beispiel von der Zahl $x \in \mathbb{Q}_p \setminus \mathbb{Q}$ wenn man in der Summe

$$x = d_p\text{-}\sum_{k=0}^\infty a_k p^k$$

eine nicht-periodische Folge $\{a_k\}$ wählt.

14.16 * Lebesgue-integrierbare Funktionen

Betrachten wir den Raum $X = C[a,b]$ von stetigen Funktionen auf einem kompakten Intervall $[a,b]$ mit der 1-Norm wie folgt.

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Wir wissen, dass $C[a,b]$ vollständig bezüglich der sup-Norm ist, aber jetzt betrachten wir die 1-Norm in $C[a,b]$. Es ist leicht zu beweisen, dass die 1-Norm eine Norm ist.

Die Vervollständigung von $(C[a,b], \|\cdot\|_1)$ wird mit $L^1[a,b]$ bezeichnet. Nach Konstruktion ist $L^1[a,b]$ ein Banachraum wo $C[a,b]$ dicht liegt. Die Elemente von $L^1[a,b]$ heißen *Lebesgue-integrierbare* Funktionen.

Bezeichnen wir mit $R[a,b]$ den Raum von allen Riemann-integrierbaren Funktionen auf $[a,b]$ und zeigen, dass jede Funktion $f \in R[a,b]$ sich als Element von $L^1[a,b]$ identifizieren lässt.

Lemma 14.30 *Für jede Funktion $f \in R[a,b]$ gibt es eine Folge $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ aus $C[a,b]$ mit*

$$\int_a^b |f - f_n|\,dx \to 0 \text{ für } n \to \infty. \tag{14.36}$$

Beweis. Nach Aufgabe 93 gibt es eine Folge $\{g_n\}$ von Treppenfunktionen mit

$$\int_a^b |f - g_n|\,dx \to 0 \text{ für } n \to \infty.$$

Jede Treppenfunktion g_n lässt sich offensichtlich mit einer stetigen Funktion f_n approximieren so dass

$$\int_a^b |f_n - g_n|\,dx < \frac{1}{n},$$

woraus (14.36) folgt. ■

Es folgt aus (14.36), dass die Folge $\{f_n\}$ eine Cauchy-Folge bezüglich $\|\cdot\|_1$ ist. Somit ergibt die Folge $\{f_n\}$ ein Element $[\{f_n\}]$ von $L^1[a,b]$, was wir jetzt zu f zuweisen. Es folgt auch, dass

$$\int_a^b |f|\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_a^b |f_n|\,dx = \lim \|f_n\|_1 = \|[\{f_n\}]\|_1\,. \tag{14.37}$$

Es existieren Riemann-integrierbare Funktionen $f \neq 0$ mit

$$\int_a^b |f|\,dx = 0.$$

Zum Beispiel, die Funktion f die nur an einer Stelle $c \in (a,b)$ nicht verschwindet, hat diese Eigenschaft. Es folgt aus (14.37) dass das zu f entsprechende Element $[\{f_n\}]$ von $L^1[a,b]$ gleich 0 ist. Somit ist die oberhalb definierte Abbildung $R[a,b] \to L^1[a,b]$ nicht injektiv.

Lemma 14.31 *Zwei Funktionen $f,g \in R[a,b]$ entsprechen einem Element von $L^1[a,b]$ genau dann, wenn*

$$\int_a^b |f-g|\,dx = 0. \tag{14.38}$$

Beweis. Seien $\{f_n\}$ und $\{g_n\}$ die Folgen von stetigen Funktionen auf $[a,b]$ mit

$$\int_a^b |f-f_n|\,dx \to 0 \text{ und } \int_a^b |g-g_n|\,dx \to 0 \text{ für } n\to\infty.$$

Es folgt, dass

$$\|f_n-g_n\|_1 = \int_a^b |f_n-g_n|\,dx \to \int_a^b |f-g|\,dx.$$

Somit gilt

$$\{f_n\} \sim \{g_n\} \Leftrightarrow d_1(f_n,g_n) \to 0 \Leftrightarrow \|f_n-g_n\|_1 \to 0 \Leftrightarrow (14.38),$$

was zu beweisen war. ■

Zwei Funktionen aus $R[a,b]$ heißen äquivalent wenn sie (14.38) erfüllen. Somit enthält $L^1[a,b]$ neben stetigen Funktionen auch Äquivalenzklassen von Riemann-integrierbaren Funktionen. Es gibt Elemente von $L^1[a,b]$ die nicht von Riemann-integrierbaren Funktionen erzeugt werden.

Chapter 15

Differentialrechnung in $\mathbb{R}^n$

02.07.21 **Vorlesung 23**

15.1 Partielle und totale Differenzierbarkeit

Seien Ω eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ und $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ eine Funktion auf Ω mit den Werten in $\mathbb{R}^m$. Wir benutzen die folgende Notation für die Komponenten von x und $f(x)$

$$x = (x_1, ..., x_n)$$

und

$$f(x) = (f_1(x), ..., f_m(x)),$$

wobei jedes $f_k(x)$ eine reellwertige Funktion auf Ω ist. Man schreibt $f_k(x)$ auch in der Form $f_k(x_1, ..., x_n)$ so dass f_k sich als eine reellwertige Funktion von n reellen Variablen betrachten lässt.

Fixieren wir ein $j = 1, ..., n$ und ein $k = 1, ..., m$ und betrachten die Funktion

$$x_j \mapsto f_k(x_1, ..., x_j, ..., x_n),$$

wobei alle x_i mit $i \neq j$ als Konstanten betrachtet werden. Ist diese Funktion differenzierbar, so betrachten wir ihre Ableitung.

Definition. Die Ableitung von f_k bezüglich x_j heißt *partielle Ableitung* 1-er Ordnung von f und wird mit $\frac{\partial f_k}{\partial x_j}$ bezeichnet, d.h.

$$\boxed{\frac{\partial f_k}{\partial x_j}(x) := \lim_{t \to 0} \frac{f_k(x_1, ..., x_j + t, ..., x_n) - f_k(x_1, ..., x_j, ..., x_n)}{t}}.$$

In dieser Notation wird ein rundes ∂ statt eines geraden d benutzt. Die Ableitung heißt partiell da es nur eine Variable x_j von n Variablen benutzt wird.

Es gibt noch andere Notation für partielle Ableitungen wie folgt:

$$\frac{\partial f_k}{\partial x_j} = \partial_j f_k = \partial_{x_j} f_k = (f_k)_{x_j} = f_{k;j}.$$

Definition. Existieren die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f_k}{\partial x_j}$ für alle k und j, so heißt die Funktion f *partiell differenzierbar* in x. In diesem Fall lässt sich die Menge von allen partiellen Ableitung von f in einer $m \times n$ Matrix anordnen wie folgt:

$$J_f := \left(\frac{\partial f_k}{\partial x_j}\right) = (\partial_j f_k) = (f_{k;j}) = \begin{pmatrix} f_{1;1} & f_{1;2} & \cdots & f_{1;n} \\ f_{2;1} & f_{2;2} & \cdots & f_{2;n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{m;1} & f_{m;2} & \cdots & f_{m;n} \end{pmatrix}, \tag{15.1}$$

wobei $k = 1, ..., m$ ein Zeilenindex ist und $j = 1, ..., n$ ein Spaltenindex. Die Matrix $J_f = J_f(x)$ heißt die *Jacobi-Matrix von* f an der Stelle x.

Beispiel. Betrachten wir eine Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1$. In diesem Fall ist J_f eine 1×2 Matrix, d.h. die Zeile

$$J_f = (\partial_1 f_1, \partial_2 f_1) = (\partial_x f, \partial_y f).$$

Die Funktion

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0), \end{cases} \tag{15.2}$$

ist in jedem Punkt $(x, y) \neq (0, 0)$ partiell differenzierbar und es gilt

$$\partial_x f = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y(x^2+y^2) - xy \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^3 - yx^2}{(x^2+y^2)^2}$$

und analog

$$\partial_y f = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x^3 - xy^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

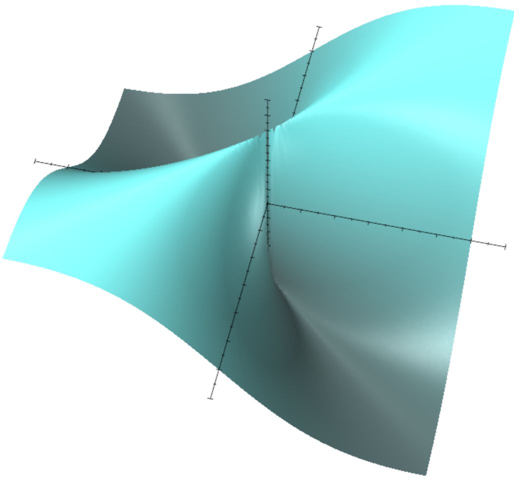
Zeigen wir, dass f auch in $(0, 0)$ partiell differenzierbar. In der Tat haben wir nach Definition

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(t, 0) - f(0, 0)}{t} = 0$$

da $f(t, 0) = 0$, und analog $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$. Somit ist f partiell differenzierbar in allen Punkten von $\mathbb{R}^2$.

Allerdings ist die Funktion f *unstetig* im Punkt $(0, 0)$, da für jedes $t \neq 0$ gilt $f(t, t) = \frac{1}{2}$ und somit

$$\lim_{t \to 0} f(t, t) = \frac{1}{2} \neq 0 = f(0, 0).$$



Funktion $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$

Beispiel. In $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$ betrachten wir die Abbildung $f : \Omega \to \mathbb{R}^2$ wie folgt:

$$f(x,y) = \left(\sqrt{x^2+y^2}, \arctan\frac{y}{x}\right),$$

was eine Transformation von Kartesischen Koordinaten nach Polarkoordinaten darstellt. Wir haben

$$\partial_x f_1 = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \partial_y f_1 = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

und

$$\partial_x f_2 = -\frac{y}{x^2}\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}} = -\frac{y}{x^2+y^2}, \quad \partial_y f_2 = \frac{1}{x}\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}} = \frac{x}{x^2+y^2}$$

Die Jacobi-Matrix ist

$$J_f = \begin{pmatrix} \frac{x}{r} & \frac{y}{r} \\ -\frac{y}{r^2} & \frac{x}{r^2} \end{pmatrix}$$

wobei $r = \sqrt{x^2+y^2}$.

Erinnern wir uns daran, dass die Differenzierbarkeit einer Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Stetigkeit ergibt, aber eine partiell differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ nicht unbedingt stetig ist. Wir definieren jetzt einen stärkeren Begriff von Differenzierbarkeit – die *totale* Differenzierbarkeit.

Definition. Sei Ω eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$. Eine Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ heißt *total differenzierbar* in $x \in \Omega$ wenn es eine lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ gibt mit

$$f(x+h) = f(x) + Ah + o(h) \text{ für } h \to 0. \tag{15.3}$$

Die lineare Abbildung A heißt die *totale Ableitung* von f in x und wird mit $\frac{df}{dx}(x)$ oder $f'(x)$ bezeichnet, so dass

$$\boxed{f(x+h) = f(x) + f'(x)h + o(h) \text{ für } h \to 0.} \tag{15.4}$$

Es ist aus Linearer Algebra bekannt, dass jede lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ sich als eine $m \times n$ Matrix darstellen lässt, die auch mit A bezeichnet wird. Man versteht Ah auch als das Produkt von $m \times n$ Matrix A und Spaltenvektor h aus $\mathbb{R}^n$, was einen Spaltenvektor in $\mathbb{R}^m$ ergibt.

Insbesondere lässt die totale Ableitung $f'(x)$ sich auch als eine $m\times n$ Matrix darstellen.

Fixieren wir eine Norm $\|\cdot\|$ in $\mathbb{R}^n$ und bezeichnen mit $U_r(x)$ die metrische Kugel bezüglich der induzierten Metrik $\|x-y\|$. Da die Menge Ω offen ist, so gibt es für jedes $x \in \Omega$ eine Kugel $U_r(x)$ mit $r > 0$ die in Ω liegt. Folglich für alle $h \in \mathbb{R}^n$ mit $\|h\| < r$ liegt $x+h$ in Ω und $f(x+h)$ wohldefiniert ist.

Das Landau-Symbol $o(h)$ bezeichnet in (15.3) eine Funktion $\varphi(h)$ mit den Werten in $\mathbb{R}^m$ und mit
$$\frac{\|\varphi(h)\|}{\|h\|} \to 0 \text{ für } h \to 0, \tag{15.5}$$
wobei im Zähler eine Norm in $\mathbb{R}^m$ steht. Da alle Normen in $\mathbb{R}^n$ (und in $\mathbb{R}^m$) äquivalent sind, so ist die Richtigkeit von (15.5) (und (15.3)) unabhängig von der Wahl von den Normen in $\mathbb{R}^n$ bzw $\mathbb{R}^m$.

Definition. Die Variable h in (15.3) heißt das *Differential* von x und wird auch mit dx bezeichnet. Der Ausdruck
$$df(x) = f'(x)\,dx$$
heißt das *Differential* der Funktion f in x.

Es folgt aus (15.4), dass
$$f(x+dx) = f(x) + df(x) + o(dx) \quad \text{für } dx \to 0.$$
Man kann auch sagen, dass das Differential $df(x)$ ein linearer Teil der Differenz $f(x+dx) - f(x)$ ist.

Beispiel. Seien B eine $m \times n$ Matrix und $C \in \mathbb{R}^m$. Betrachten wir eine Funktion
$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \\ f(x) &= Bx + C \end{aligned}$$
Dann gilt
$$f(x+h) - f(x) = B(x+h) - Bx = Bh,$$
woraus folgt, dass f in jedem Punkt x differenzierbar ist und $f'(x) = B$.

Satz 15.1 *Sei ein Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ in einem Punkt $x \in \Omega$ total differenzierbar. Dann gilt folgendes.*

(a) f ist stetig in x.

(b) f ist partiell differenzierbar in x und es gilt
$$f'(x) = J_f(x). \tag{15.6}$$

Bemerken wir, dass $f'(x)$ und $J_f(x)$ die $m \times n$ Matrizen sind. Es folgt aus (15.6), dass die totale Ableitung $f'(x)$ eindeutig bestimmt ist, wenn sie existiert.

Wir betonen, dass aus der partiellen Differenzierbarkeit die totale Differenzierbarkeit *nicht* folgt, was das Beispiel der Funktion (15.2) zeigt.

Beweis. (a) Fixieren wir die Normen in $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^m$. Wir benutzen den Begriff von *Operatornorm* einer linearen Abbildung $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$:

$$\|A\| := \sup_{h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{\|Ah\|}{\|h\|}. \tag{15.7}$$

Zeigen wir dass $\|A\| < \infty$. Es reicht dies für die 1-norm in $\mathbb{R}^n$ zu beweisen. Sei $e_1, ..., e_n$ die kanonische Basis in $\mathbb{R}^n$. Dann gilt

$$h = h_1 e_1 + ... + h_n e_n$$

und

$$Ah = h_1 A e_1 + ... + h_n A e_n.$$

Es folgt, dass

$$\|Ah\| \leq |h_1| \, \|Ae_1\| + ... + |h_n| \, \|Ae_n\| \leq C \left(|h_1| + ... + |h_n| \right) = C \|h\|_1 = C \|h\|,$$

wobei

$$C := \max_{1 \leq k \leq n} \|Ae_k\| < \infty,$$

und somit $\|A\| \leq C < \infty$. Es folgt aus (15.7), dass

$$\boxed{\|Ah\| \leq \|A\| \, \|h\|} \text{ für alle } h \in \mathbb{R}^n. \tag{15.8}$$

Da

$$f(x+h) - f(x) = Ah + o(h) \text{ für } h \to 0$$

so erhalten wir

$$\|f(x+h) - f(x)\| \leq \|Ah\| + \|o(h)\| \leq \|A\| \, \|h\| + o(\|h\|) \to 0$$

für $h \to 0$, woraus die Stetigkeit von f in x folgt.

(b) Sei $f'(x) = A = (a_{kj})$ wobei k der Zeilenindex ist und j der Spaltenindex. In der Identität

$$f(x+h) - f(x) = Ah + o(h) \text{ für } h \to 0 \tag{15.9}$$

setzen wir

$$h = (0, ..., \underset{\widehat{j}}{t}, ..., 0)$$

wobei $t \in \mathbb{R}$ an der Position j steht, d.h. alle Komponenten von h außer $h_j = t$ gleich 0 sind. Dann gilt

$$Ah = \begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1j} & ... & a_{1n} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{k1} & ... & a_{kj} & ... & a_{kn} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & ... & a_{mj} & ... & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ ... \\ t \\ ... \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1j} t \\ ... \\ a_{kj} t \\ ... \\ a_{mj} t \end{pmatrix}.$$

Die Identität von k-en Komponenten in (15.9) ergibt

$$f_k(x+h) - f_k(x) = (Ah)_k + o(t) = a_{kj} t + o(t) \quad \text{für } t \to 0,$$

d.h.

$$f_k(x_1, ..., x_j + t, ..., x_n) - f_k(x_1, ..., x_n) = a_{kj} t + o(t) \quad \text{für } t \to 0,$$

woraus folgt, dass

$$\frac{\partial f_k}{\partial x_j}(x) = f_{k;j}(x) = a_{kj}.$$

Da die Einträge von $J_f(x)$ gleich $f_{k;j}(x)$ sind, so erhalten wir die Identität (15.6). ■

Definition. Eine Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ heißt *stetig differenzierbar* wenn f partiell differenzierbar in allen Punkten von Ω ist und alle partielle Ableitungen $\frac{\partial f_k}{\partial x_j}$ stetig in Ω sind.

Satz 15.2 *Ist $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ stetig differenzierbar so ist f total differenzierbar in jedem $x \in \Omega$.*

Somit erhalten wir die folgenden Implikationen:

stetig differenzierbar $\Rightarrow$ total differenzierbar $\Rightarrow$ partiell differenzierbar.

Beweis. Betrachten wir zuerst den Fall $m = 1$, d.h. die Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, dass $x = 0$.

Die Jacobi-Matrix J_f ist eine $1 \times n$ Matrix, d.h. ein Zeilenvektor

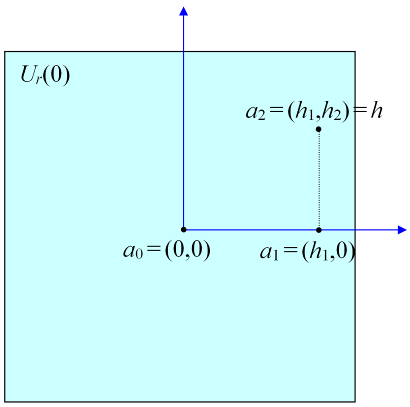
$$J_f = (\partial_1 f, ..., \partial_n f).$$

Die totale Differenzierbarkeit von f in 0 wird folgen, wenn wir bewiesen, dass

$$f(h) - f(0) = J_f(0)\, h + o(h) \text{ für } h \to 0. \tag{15.10}$$

Wählen wir in $\mathbb{R}^n$ die Norm $\|\cdot\| = \|\cdot\|_\infty$. Sei $r > 0$ so klein, dass $U_r(0) \subset \Omega$. Dann nehmen wir an, dass $\|h\| < r$ so dass $h \in \Omega$. Betrachten wir eine Folge $\{a_j\}_{j=0}^n$ von Punkten in $\mathbb{R}^n$ wie folgt:

$$\begin{aligned}
a_0 &= (0, ..., 0) = 0 \\
a_1 &= (h_1, 0, ..., 0) \\
a_2 &= (h_1, h_2, 0, ..., 0) \\
&... \\
a_j &= (h_1, ..., h_j, 0, ..., 0) \\
&\cdots \\
a_n &= (h_1, ..., h_n) = h
\end{aligned}$$



Die Punkte a_j im Fall $n = 2$

Alle Punkte a_j liegen in $U_r(0)$ und somit auch in Ω, da $\|a_j\| \le \|h\| < r$. Wir haben dann

$$f(h) - f(0) = f(a_n) - f(a_0) = \sum_{j=1}^{n} \left(f(a_j) - f(a_{j-1}) \right). \tag{15.11}$$

Die Funktion $\Phi(t) = f(h_1, ..., h_{j-1}, t, 0, ..., 0)$ ist für alle $t \in [0, h_j]$ definiert und differenzierbar. Der Mittelwertsatz für Φ ergibt

$$\begin{aligned} f(a_j) - f(a_{j-1}) &= f(h_1, ..., h_{j-1}, \boxed{h_j}, 0, ..., 0) - f(h_1, ..., h_{j-1}, \boxed{0}, 0, ..., 0) \\ &= \Phi(h_j) - \Phi(0) = \Phi'(\xi) h_j \\ &= \partial_j f(h_1, ..., h_{j-1}, \boxed{\xi}, 0, ..., 0) h_j, \end{aligned} \tag{15.12}$$

wobei $\xi = \xi(h)$ eine reelle Zahl zwischen 0 und h_j ist. Bezeichnen wir

$$c_j = c_j(h) = (h_1, ..., h_{j-1}, \xi, 0, ..., 0)$$

so dass $c_j \in [a_{j-1}, a_j]$ und

$$f(a_j) - f(a_{j-1}) = \partial_j f(c_j) h_j.$$

Es gilt offensichtlich $\|c_j\| \leq \|h\|$ und somit $c_j \to 0$ für $h \to 0$.

Es folgt aus (15.11) und (15.12), dass

$$\begin{aligned} f(h) - f(0) - J_f(0) h &= \sum_{j=1}^{n} \partial_j f(c_j) h_j - \sum_{j=1}^{n} \partial_j f(0) h_j \\ &= \sum_{j=1}^{n} (\partial_j f(c_j) - \partial_j f(0)) h_j. \end{aligned}$$

Für $h \to 0$ gilt

$$\left| \sum_{j=1}^{n} (\partial_j f(c_j) - \partial_j f(0)) h_j \right| \leq \|h\| \sum_{j=1}^{n} |\partial_j f(c_j) - \partial_j f(0)| = o(h),$$

da $c_j \to 0$ und $\partial_j f$ stetig ist so dass $\partial_j f(c_j) - \partial_j f(0) \to 0$. Somit gilt

$$f(h) - f(0) - J_f(0) h = o(h) \text{ für } h \to 0,$$

was (15.10) im Fall $m = 1$ beweist.

Sei m beliebig. Da jede Komponente f_k eine reellwertige Funktion auf Ω ist, so ergibt der vorige Fall die totale Differenzierbarkeit von f_k in jedem $x \in \Omega$, d.h.

$$f_k(x+h) - f_k(x) = A_k h + o(h) \text{ für } h \to 0, \tag{15.13}$$

wobei A_k eine $1 \times n$ Matrix ist, d.h. eine Zeile. Sei A die $m \times n$ Matrix mit k-ter Zeile A_k für $k = 1, ..., m$. Es folgt aus (15.13), dass

$$f(x+h) - f(x) = Ah + o(h) \quad \text{für } h \to 0,$$

woraus die totale Differenzierbarkeit von f in x folgt. ■

15.2 Rechenregeln für totale Ableitung

Satz 15.3 (Linearität) *Sind die Funktionen $f, g : \Omega \to \mathbb{R}^n$ total differenzierbar in einem Punkt $x \in \Omega$, so ist auch ihre lineare Kombination $af + bg$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ total differenzierbar in x und es gilt*

$$(af + bg)'(x) = af'(x) + bg'(x).$$

Beweis. Nach Definition gilt für $h \to 0$

$$f(x+h) - f(x) = f'(x)h + o(h)$$

und

$$g(x+h) - g(x) = g'(x)h + o(h).$$

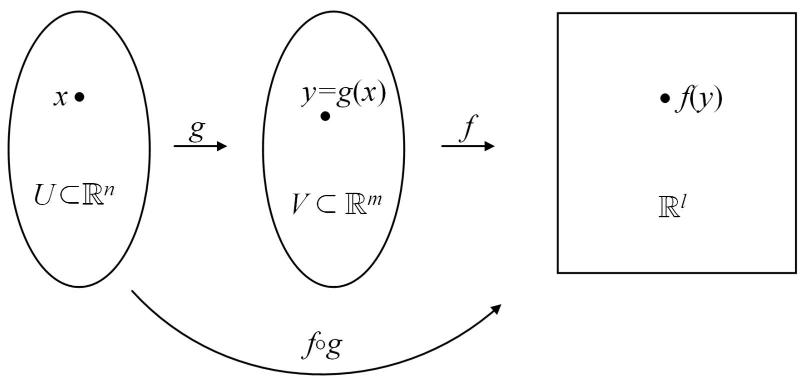
Es folgt, dass die Funktion $F = af + bg$ erfüllt

$$F(x+h) - F(x) = (af'(x) + bg'(x))h + o(h)$$

woraus $F'(x) = af'(x) + bg'(x)$ folgt. ■

Satz 15.4 (Kettenregel) *Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ und $V \subset \mathbb{R}^m$ offene Mengen. Sei $g : U \to V$ total differenzierbar in einem Punkt $x \in U$ und $f : V \to \mathbb{R}^l$ total differenzierbar im Punkt $y = g(x) \in V$. Dann ist die Komposition $f \circ g : U \to \mathbb{R}^l$ total differenzierbar in x und es gilt*

$$\boxed{(f \circ g)'(x) = f'(y)\, g'(x)} = f'(g(x))\, g'(x).$$



Bemerken wir, dass $g'(x)$ und $f'(y)$ lineare Abbildungen wie folgt sind:

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{g'(x)} \mathbb{R}^m \xrightarrow{f'(y)} \mathbb{R}^l.$$

Somit ist das Produkt (=Komposition) $f'(y)\, g'(x)$ wohldefiniert und ist eine lineare Abbildung von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^l$, genauso, wie die totale Ableitung $(f \circ g)'(x)$.

07.07.21 Vorlesung 24

Beweis. Fixieren wir beliebige Normen in $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^m$ und $\mathbb{R}^l$. Wir haben

$$g(x+a) - g(x) = g'(x)\, a + \varphi(a),$$

wobei $\varphi(a) = o(a)$ für $a \to 0$, und

$$f(y+b) - f(y) = f'(y)\, b + \psi(b),$$

wobei $\psi(b) = o(b)$ für $b \to 0$. Wir müssen beweisen, dass

$$(f \circ g)(x+a) - (f \circ g)(x) = f'(y)\, g'(x)\, a + o(a) \quad \text{für } a \to 0. \tag{15.14}$$

Wir haben

$$(f \circ g)(x+a) - (f \circ g)(x) = f(g(x+a)) - f(g(x)) = f(y+b) - f(y),$$

wobei $y = g(x)$ und

$$b = g(x+a) - y = g(x+a) - g(x) = g'(x)\, a + \varphi(a). \tag{15.15}$$

Es folgt, dass

$$\begin{aligned}
(f \circ g)(x+a) - (f \circ g)(x) &= f(y+b) - f(y) \\
&= f'(y)\, b + \psi(b) \\
&= f'(y)\left(g'(x)\, a + \varphi(a)\right) + \psi(b) \\
&= f'(y)\, g'(x)\, a + f'(y)\, \varphi(a) + \psi(b).
\end{aligned}$$

Wir beweisen jetzt dass

$$f'(y)\, \varphi(a) + \psi(b) = o(a) \ \text{ für } a \to 0, \tag{15.16}$$

woraus (15.14) folgen wird. Dafür bemerken wir, dass nach (15.8)

$$\|f'(y)\, \varphi(a)\| \leq \|f'(y)\|\, \|\varphi(a)\| = o(\|a\|) \quad \text{für } a \to 0,$$

so dass

$$f'(y)\, \varphi(a) = o(a) \ \text{ für } a \to 0.$$

Auch folgt es aus (15.15), dass

$$\|b\| \leq \|g'(x)\, a\| + \|\varphi(a)\| \leq \|g'(x)\|\, \|a\| + \|\varphi(a)\| = O(\|a\|),$$

und somit

$$\|\psi(b)\| = o(\|b\|) = o(O\, \|a\|) = o(\|a\|)$$

woraus (15.16) folgt. ■

Korollar 15.5 *Unter den Bedingungen des Satzes 15.4 gilt*

$$\boxed{(f \circ g)_{k;j}(x) = \sum_{i=1}^{m} f_{k;i}(y)\, g_{i;j}(x)}. \tag{15.17}$$

wobei $y = f(x)$.

Beweis. Die Ableitung $(f\circ g)_{k;j}$ ist der (k,j)-Eintrag von der Jacobi-Matrix der Funktion $f\circ g$ und somit auch von $(f\circ g)'$ (nach dem Satz 15.1). Da

$$(f\circ g)'(x) = f'(y)\,g'(x)\,,$$

so gilt für den (k,j)-Eintrag nach der Regel von Matrizenmultiplikation

$$(f\circ g)_{k;j} = (f'(y)\,g'(x))_{kj} = \sum_{i=1}^m f'(y)_{ki}\; g'(x)_{ij} = \sum_{i=1}^m f_{k;i}(y)\,g_{i;j}(x)\,,$$

was zu beweisen war. ■

Sei $l=1$, d.h. $f:V\to\mathbb{R}$. Dann gibt es in (15.17) nur eine Komponente $f_k=f_1=f$, und wir erhalten

$$\boxed{\partial_{x_j}\left(f\left(g_1(x),\ldots,g_m(x)\right)\right) = \sum_{i=1}^m (\partial_i f)\left(g_1(x),\ldots,g_m(x)\right)\partial_{x_j} g_i(x)}\,. \tag{15.18}$$

Z.B. sei $m=2$ und $g(x)=(u(x),v(x))$. Bezeichnen wir mit (u,v) auch das Argument von f. Dann gilt nach (15.18)

$$\partial_{x_j} f\,(u(x),v(x)) = \partial_u f\,\partial_{x_j} u + \partial_v f\,\partial_{x_j} v.$$

Beispiel. Bestimmen wir die partiellen Ableitungen ∂_x und ∂_y der Funktion

$$F(x,y) = \left(x^2+y\right)^{xy^2}$$

im Bereich $x>0$, $y>0$. Bemerken wir dass

$$F(x,y) = u^v =: f(u,v)$$

wobei

$$u = x^2+y \quad\text{und}\quad v = xy^2,$$

Somit gilt

$$\partial_x F = \partial_x f(u,v) = \partial_u f\,\partial_x u + \partial_v f\,\partial_x v.$$

Da

$$\partial_u f = vu^{v-1} \quad\text{und}\quad \partial_v f = u^v \ln u.$$

und

$$\partial_x u = 2x \quad\text{und}\quad \partial_x v = y^2,$$

so erhalten wir

$$\begin{aligned}
\partial_x F &= \left(vu^{v-1}\right)\cdot 2x + \left(u^v\ln u\right)\cdot y^2 \\
&= 2x^2y^2\left(x^2+y\right)^{xy^2-1} + y^2\left(x^2+y\right)^{xy^2}\ln\left(x^2+y\right).
\end{aligned}$$

Analog gilt

$$\begin{aligned}
\partial_y F &= \partial_y f(u,v) = \partial_u f\,\partial_y u + \partial_v f\,\partial_y v \\
&= vu^{v-1}\cdot 1 + \left(u^v\ln u\right)\cdot 2xy \\
&= xy^2\left(x^2+y\right)^{xy^2-1} + 2xy\left(x^2+y\right)^{xy^2}\ln\left(x^2+y\right).
\end{aligned}$$

Korollar 15.6 (Ableitung der inversen Funktion) *Seien U und V zwei offene Teilmengen von $\mathbb{R}^n$. Sei $g : U \to V$ eine bijektive Funktion die in einem Punkt $x \in U$ total differenzierbar ist. Sei die inverse Funktion $f = g^{-1}$ im Punkt $y = g(x)$ total differenzierbar. Dann gilt*

$$f'(y) = g'(x)^{-1}. \tag{15.19}$$

Die beiden totalen Ableitungen $f'(y)$ und $g'(x)$ sind $n \times n$ Matrizen, und nach (15.19) ist $f'(y)$ die inverse Matrix von $g'(x)$.

Beweis. Die Komposition $f \circ g$ ist die identische Abbildung $I : U \to U$, d.h. $I(x) = x$. Dann gilt $I'(x) = \mathrm{Id}$ wobei Id die identische $n \times n$ Matrix ist. Somit haben wir nach der Kettenregel

$$\mathrm{Id} = I'(x) = (f \circ g)'(x) = f'(y)\, g'(x),$$

woraus (15.19) folgt. ■

Beispiel. Betrachten wir die kartesischen Koordinaten (x, y) in $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ als Funktionen von den Polarkoordinaten (r, θ), d.h.

$$(x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta) =: g(r, \theta).$$

Die totale Ableitung von $g(r, \theta)$ existiert und stimmt mit der Jacobi-Matrix überein

$$g' = J_g = \begin{pmatrix} \partial_r x & \partial_\theta x \\ \partial_r y & \partial_\theta y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}, \tag{15.20}$$

da J_g stetig bezüglich (r, θ) ist.

Sei f eine total differenzierbare Funktion von (x, y) in einer offenen Teilmenge von $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Einsetzen x und y als Funktionen von r, θ ergibt uns f als Funktion von r, θ. Mit Hilfe von (15.20) erhalten wir

$$\begin{aligned} \partial_r f &= \partial_r (f(x, y)) = \partial_x f\, \partial_r x + \partial_y f\, \partial_r y \\ &= \partial_x f\ \cos\theta + \partial_y f\ \sin\theta \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \partial_\theta f &= \partial_\theta (f(x, y)) = \partial_x f\, \partial_\theta x + \partial_y f\, \partial_\theta y \\ &= r(-\partial_x f\ \sin\theta + \partial_y f\ \cos\theta). \end{aligned}$$

Zum Beispiel, für die Funktion

$$f(x, y) = xe^y$$

erhalten wir

$$\partial_r f = e^y \cos\theta + xe^y \sin\theta = e^{r\sin\theta}\cos\theta + re^{r\sin\theta}\sin\theta\cos\theta$$

und

$$\partial_\theta f = r(-e^y \sin\theta + xe^y \cos\theta) = -re^{r\sin\theta}\sin\theta + r^2 e^{r\sin\theta}\cos^2\theta.$$

Sei h die inverse Abbildung von g, d.h. h ergibt die Polarkoordinaten durch die kartesischen Koordinaten,

$$h(x, y) = (r, \theta).$$

Wir erhalten nach (15.19)

$$\begin{aligned} h' &= (g')^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\frac{1}{r}\sin\theta & \frac{1}{r}\cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x/r & y/r \\ -y/r^2 & x/r^2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Andererseits gilt

$$h' = \begin{pmatrix} \partial_x r & \partial_y r \\ \partial_x \theta & \partial_y \theta \end{pmatrix}$$

woraus folgt

$$\boxed{\begin{array}{ll} \partial_x r = \dfrac{x}{r}, & \partial_y r = \dfrac{y}{r} \\ \partial_x \theta = -\dfrac{y}{r^2}, & \partial_y \theta = \dfrac{x}{r^2} \end{array}} \tag{15.21}$$

Natürlich erhält man diese Identitäten auch direct aus $r = \sqrt{x^2+y^2}$ and $\tan\theta = y/x$.

Ist f eine total differenzierbare Funktion von (r,θ), so erhalten wir mit Hilfe von (15.21)

$$\begin{aligned} \partial_x f &= \partial_x f(r,\theta) = \partial_r f\,\partial_x r + \partial_\theta f\,\partial_x \theta = \frac{x}{r}\partial_r f - \frac{y}{r^2}\partial_\theta f \\ &= \partial_r f\ \cos\theta - \partial_\theta f\,\frac{\sin\theta}{r} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \partial_y f &= \partial_y f(r,\theta) = \partial_r f\,\partial_y r + \partial_\theta f\,\partial_y \theta = \frac{y}{r}\partial_r f + \frac{x}{r^2}\partial_\theta f \\ &= \partial_r f\ \sin\theta + \partial_\theta f\,\frac{\cos\theta}{r}. \end{aligned}$$

Zum Beispiel, für $f = r^a \sin b\theta$ erhalten wir

$$\partial_x f = ar^{a-1}\sin b\theta\cos\theta - br^{a-1}\cos b\theta\sin\theta$$

und

$$\partial_y f = ar^{a-1}a\sin b\theta\sin\theta + br^{a-1}\cos b\theta\cos\theta.$$

15.3 Richtungsableitung und Mittelwertsatz

In diesem Abschnitt betrachten wir zwei Anwendungen des Begriffes von totaler Ableitung.

Definition. Sei f eine reellwertige Funktion auf einer offenen Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Für jedes $x \in \Omega$ und für jeden Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ definieren wir die Richtungsableitung

$$\partial_v f(x) = \frac{\partial f}{\partial v}(x) := \lim_{t\to 0}\frac{f(x+tv) - f(x)}{t},$$

vorausgesetzt, dass der Limes existiert (wobei t eine reelle Variable ist).

In anderen Wörtern, $\partial_v f(x) = g'(0)$ wobei $g(t) = f(x+tv)$.

Die partielle Ableitung $\partial_j f$ ist ein spezieller Fall der Richtungsableitung. In der Tat betrachten wir den Basisvektor

$$e_j = (0, ..., 0, \underset{\widehat{j}}{1}, 0, .., 0)$$

wobei die Eins an der Position j steht. Dann gilt

$$\partial_j f = \partial_{e_j} f,$$

da

$$\begin{aligned}\partial_{e_j} f &= \lim_{t\to 0} \frac{f(x+te_j) - f(x)}{t} = \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{f(x_1, ..., x_j + t, ..., x_n) - f(x_1, ..., x_n)}{t} = \partial_j f.\end{aligned}$$

Satz 15.7 *Ist die Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ total differenzierbar in x dann existiert die Richtungsableitung $\partial_v f(x)$ für jedes $v \in \mathbb{R}^n$ und es gilt*

$$\partial_v f(x) = f'(x)\, v = \sum_{j=1}^{n} \partial_j f(x)\, v_j.$$

Beweis. Es folgt aus der Definition von totaler Differenzierbarkeit, dass

$$f(x+tv) - f(x) = f'(x)(tv) + o(t) \quad \text{für } t \to 0$$

Dividieren durch t ergibt

$$\partial_v f = \lim_{t\to 0} \frac{f(x+tv) - f(x)}{t} = \lim_{t\to 0} \left(f'(x)\, v + \frac{o(t)}{t} \right) = f'(x)\, v.$$

■

Insbesondere sehen wir, dass die Abbildung $v \mapsto \partial_v f(x)$ linear ist, was aus der Definition nicht offensichtlich ist.

Im nächsten Satz benutzen wir die Strecke $[x, y]$ zwischen zwei Punkten $x, y \in \mathbb{R}^n$, d.h.

$$[x, y] = \{(1-t)\, x + ty : 0 \le t \le 1\}.$$

Satz 15.8 (Mittelwertsatz) *Sei f eine reellwertige total differenzierbare Funktion auf einer offenen Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Seien x, y zwei Punkte in Ω mit $[x, y] \subset \Omega$. Dann es gibt einen Punkt $\xi \in [x, y]$ mit*

$$f(y) - f(x) = f'(\xi)(y - x). \tag{15.22}$$

Man kann (15.22) wie folgt umschreiben:

$$f(y) - f(x) = (\partial_{y-x} f)(\xi).$$

Beweis. Setzen wir $v = y - x$ und betrachten die Funktion

$$g(t) = f(x + tv) \quad \text{für} \quad t \in [0,1],$$

so dass $g(0) = f(x)$ und $g(1) = f(y)$. Die Funktion g ist in $[0,1]$ differenzierbar als Komposition von den Funktionen $t \mapsto x + tv$ und f. Nach dem Mittelwertsatz 8.10 (Analysis I) gibt es ein $t \in [0,1]$ mit

$$f(y) - f(x) = g(1) - g(0) = g'(t).$$

Die Kettenregel ergibt

$$\begin{aligned} g'(t) &= \partial_t (f(x + tv)) = \sum_{i=1}^n (\partial_i f)(x + tv)\, \partial_t (x + tv)_i \\ &= \sum_{i=1}^n (\partial_i f)(x + tv)\, v_i = f'(x + tv)\, v, \end{aligned}$$

woraus folgt

$$f(y) - f(x) = f'(x + tv)\, v.$$

Da $\xi := x + tv = (1 - t)\, x + ty$ in $[x, y]$ liegt, so erhalten wir (15.22) ■

15.4 Partielle Ableitungen höherer Ordnung und Satz von Schwarz

Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und und f eine reellwertige Funktion auf Ω. Existiert die partielle Ableitung $\partial_j f$ in Ω, so man kann diese Funktion weiter ableiten und die partielle Ableitung 2-ter Ordnung betrachten:

$$\partial_i (\partial_j f).$$

Existiert diese Ableitung, so bezeichnet man sie mit $\partial_{ij} f$ oder $\partial_{x_i x_j}$ oder $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$. If Fall $i \neq j$ heißt $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ die gemischte Ableitung.

Analog kann man die partiellen Ableitungen höherer Ordnung betrachten wie folgt

$$\partial_{i_1} (\partial_{i_2} (\ldots (\partial_{i_k} f))) = \partial_{i_1 i_2 \ldots i_k} f = \partial_{x_{i_1} \ldots x_{i_k}} f = \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \ldots \partial x_{i_k}}.$$

Die Zahl k hier heißt die Ordnung der Ableitung. Die Ableitung der Ordnung 0 ist die Funktion f selbst.

Satz 15.9 (Satz von Hermann Schwarz) *Nehmen wir an, dass die Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ in Ω die beiden gemischten partiellen Ableitungen $\partial_{ij} f$ und $\partial_{ji} f$ hat. Sind $\partial_{ij} f$ und $\partial_{ji} f$ in einem Punkt $x \in \Omega$ stetig, so gilt $\partial_{ij} f(x) = \partial_{ji} f(x)$.*

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, dass $x = 0$ und $i = 1$, $j = 2$. Im Beweis werden die Variablen $x_3, ..., x_n$ konstant sein. Somit können wir die Funktion f als eine Funktion nur von x_1, x_2 betrachten, d.h. wir können auch annehmen, dass $n = 2$. Bezeichnen wir die Koordinaten in $\mathbb{R}^2$ mit (x, y).

Da die Funktion $f = f(x, y)$ in einer Umgebung von $(0, 0)$ definiert ist, so gibt es ein $\varepsilon > 0$ so dass f im Quadrat

$$Q = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < \varepsilon, \ |y| < \varepsilon\right\}$$

definiert ist. Angenommen, dass die Ableitungen $\partial_{xy} f$ und $\partial_{yx} f$ in Q existieren und in $(0, 0)$ stetig sind, beweisen wir, dass

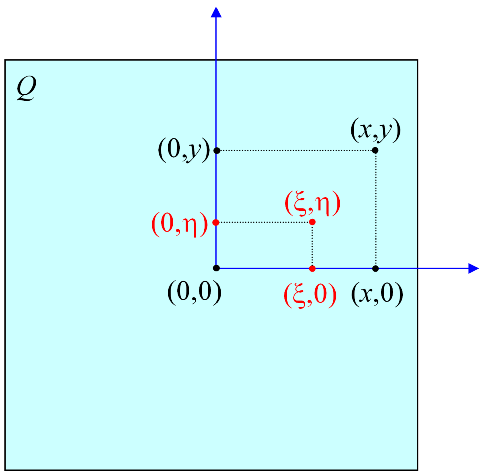
$$(\partial_{xy} f)(0, 0) = (\partial_{yx} f)(0, 0).$$

Betrachten wir im Q die Funktion

$$F(x, y) = f(x, y) - f(x, 0) - f(0, y) + f(0, 0)$$

und beweisen die folgende Aussage: für jedes $(x, y) \in Q$ existieren $\xi \in [0, x]$ und $\eta \in [0, y]$ mit

$$F(x, y) = (\partial_{yx} f)(\xi, \eta)\, xy. \tag{15.23}$$



Fixieren wir ein $(x, y) \in Q$ mit $x, y > 0$ und betrachten die Funktion

$$\varphi(t) = f(t, y) - f(t, 0) \text{ für } |t| < \varepsilon,$$

so dass

$$\begin{aligned} F(x, y) &= f(x, y) - f(x, 0) - (f(0, y) - f(0, 0)) \\ &= \varphi(x) - \varphi(0). \end{aligned}$$

Nach Voraussetzung ist φ differenzierbar. Nach dem Mittelwertsatz 8.10 existiert ein $\xi \in [0, x]$ mit

$$\varphi(x) - \varphi(0) = \varphi'(\xi)\, x = ((\partial_x f)(\xi, y) - (\partial_x f)(\xi, 0))\, x. \tag{15.24}$$

Die Funktion

$$\psi(s) = \partial_x f(\xi, s) \quad \text{für } |s| < \varepsilon$$

ist differenzierbar und somit existiert ein $\eta \in [0, y]$ mit

$$\psi(y) - \psi(0) = \psi'(\eta)\, y = \partial_y (\partial_x f)(\xi, \eta)\, y$$

d.h.

$$\partial_x f(\xi, y) - \partial_x f(\xi, 0) = (\partial_{yx} f)(\xi, \eta)\, y. \tag{15.25}$$

Einsetzen in (15.24) ergibt

$$\varphi(x) - \varphi(0) = (\partial_{yx} f)(\xi, \eta)\, xy,$$

woraus (15.23) folgt.

Analog beweist man die Existenz von $\widetilde{\xi} \in [0, x]$ und $\widetilde{\eta} \in [0, y]$ mit

$$F(x, y) = (\partial_{xy} f)(\widetilde{\xi}, \widetilde{\eta}) xy, \tag{15.26}$$

Beim Vergleichen von (15.23) und (15.26) erhalten wir, dass

$$(\partial_{yx} f)(\xi, \eta) = (\partial_{xy} f)(\widetilde{\xi}, \widetilde{\eta}). \tag{15.27}$$

Die Variablen $\xi, \eta, \widetilde{\xi}, \widetilde{\eta}$ sind die Funktionen von x, y. Nach Konstruktion konvergieren alle $\xi, \eta, \widetilde{\xi}, \widetilde{\eta}$ gegen 0 für $(x, y) \to (0, 0)$. Da $\partial_{yx} f$ und $\partial_{xy} f$ in $(0, 0)$ stetig sind, so erhalten wir aus (15.27) für $(x, y) \to (0, 0)$, dass

$$(\partial_{yx} f)(0, 0) = (\partial_{xy} f)(0, 0),$$

was zu beweisen war. ■

09.07.21 Vorlesung 25

Ohne die Voraussetzung von Stetigkeit können Sie die gemischten Ableitungen $\partial_{ij} f$ und $\partial_{ji} f$ verschieden sein, wie im nächsten Beispiel.

Beispiel. Betrachten wir die folgende Funktion in $\mathbb{R}^2$

$$f(x, y) = \begin{cases} xy\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

und zeigen, dass $\partial_{12} f(0, 0)$ und $\partial_{21} f(0, 0)$ verschieden sind. Nach Definition gilt

$$\partial_{12} f(0, 0) = \partial_1 (\partial_2 f)(0, 0) = \lim_{x \to 0} \frac{\partial_2 f(x, 0) - \partial_2 f(0, 0)}{x}.$$

So, berechnen wir zuerst $\partial_2 f(x, 0)$ für alle $x \in \mathbb{R}$:

$$\partial_2 f(x, 0) = \lim_{y \to 0} \frac{f(x, y) - f(x, 0)}{y} = \lim_{y \to 0} x \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = x,$$

woraus folgt

$$\partial_{12} f(0, 0) = \partial_1 (\partial_2 f)(0, 0) = 1.$$

Analog haben wir

$$\partial_1 f(0,y) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,y) - f(0,y)}{x} = \lim_{x\to 0} y \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = -y$$

und

$$\partial_{21} f(0,0) = \partial_2 (\partial_1 f)(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{\partial_1 f(0,y) - \partial_1 f(0,0)}{y} = -1.$$

Somit gilt $\partial_{12} f(0,0) \neq \partial_{21} f(0,0)$.

Definition. Eine Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ heißt *k-fach (partiell) stetig differenzierbar* wenn alle partielle Ableitungen von f der Ordnung $\leq k$ existieren und stetig in Ω sind. Die Menge von allen k-fach stetig differenzierbaren Funktionen auf Ω wird mit $C^k(\Omega)$ bezeichnet. Insbesondere wird mit $C(\Omega) = C^0(\Omega)$ die Menge von allen stetigen Funktionen auf Ω bezeichnet.

Es ist klar aus der Definition, dass $C^k(\Omega) \subset C^{k-1}(\Omega)$.

Korollar 15.10 *Für jede Funktion $f \in C^k(\Omega)$ ist der Wert von jeder partiellen Ableitung $\partial_{i_1 \ldots i_m} f$ der Ordnung $m \leq k$ unabhängig von der Reihenfolge von Ableiten ∂_{i_l}. D.h., für jede Folge $i_1, ..., i_m$ von $m \leq k$ Indizes und für jede Permutation $j_1, ..., j_m$ von $i_1, ..., i_m$ gilt in Ω*

$$\partial_{i_1 \ldots i_m} f = \partial_{j_1 \ldots j_m} f.$$

Beweis. Nach dem Satz 15.9 gilt folgendes: jede zwei aufeinanderfolgende Indizes in der Folge $i_1, ...i_m$, z.B. i_l und i_{l+1}, lassen sich vertauschen ohne den Wert von $\partial_{i_1 \ldots i_m} f$ zu ändern, da

$$\begin{aligned}
\partial_{i_1 \ldots i_l i_{l+1} \ldots i_m} f &= \partial_{i_1 \ldots i_{l-1}} \left(\partial_{i_l} \partial_{i_{l+1}}\right) \partial_{i_{l+2} \ldots i_m} f \\
&= \partial_{i_1 \ldots i_{l-1}} \left(\partial_{i_{l+1}} \partial_{i_l}\right) \partial_{i_{l+2} \ldots i_m} f \\
&= \partial_{i_1 \ldots i_{l+1} i_l \ldots i_m} f.
\end{aligned}$$

Da jede Permutation $j_1, ..., j_m$ von $i_1, ..., i_m$ sich als eine Reihe von Vertauschen von aufeinanderfolgenden Indizes darstellen lässt, so gilt $\partial_{i_1 \ldots i_m} f = \partial_{j_1 \ldots j_m} f$. ■

Nach Korollar 15.10, für jede Funktion $f \in C^k(\Omega)$ lässt sich jede partielle Ableitung $\partial_{i_1 \ldots i_m} f$ mit $m \leq k$ wie folgt darstellen:

$$\partial_{i_1 \ldots i_m} f = \partial_{\underbrace{1 \ldots 1}_{\alpha_1} \underbrace{2 \ldots 2}_{\alpha_2} \ldots \underbrace{n \ldots n}_{\alpha_n}} f \quad ,$$

wobei α_1 die Anzahl von 1 in der Folge $i_1 \ldots i_m$ ist, α_2 – die Anzahl von 2, usw., so dass

$$\alpha_1 + ... + \alpha_n = m.$$

Diese Ableitung wird auch wie folgt bezeichnet:

$$\partial_{i_1 \ldots i_m} f = \frac{\partial^m f}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}. \tag{15.28}$$

Definition. Jede Folge $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ von nichtnegativen ganzen Zahlen α_k heißt *Multiindex* der Dimension n. Die Menge von allen Multiindizes der Dimension n wird mit $\mathbb{I}^n$

bezeichnet. Für jeden Multiindex $\alpha \in \mathbb{I}^n$ definieren wir die Ordnung (den Betrag) von α mit

$$|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n.$$

Für jede Funktion $f \in C^k(\Omega)$ und für jeden Multiindex $\alpha \in \mathbb{I}^n$ mit $|\alpha| \leq k$ definieren wir die α-Ableitung von f mit

$$D^\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} ... \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Insbesondere $D^0 f = f$.

Z.B. im Fall $n = 3$ gilt

$$D^{(2,0,1)} f = \frac{\partial^3 f}{\partial x_1^2 \partial x_3} = \partial_{x_1 x_1 x_3} f.$$

Es folgt aus dem Korollar 15.10, dass für jede Funktion $f \in C^k(\Omega)$ und für beliebige Multiindizes α, β mit $|\alpha| + |\beta| \leq k$ gilt

$$D^{\alpha+\beta} f = D^\alpha \left(D^\beta f\right) = D^\beta \left(D^\alpha f\right).$$

15.5 Taylorformel

Im nächsten Satz benutzen wir die folgende Notation: für jeden Multiindex $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{I}^n$ setzen wir

$$\alpha! := \alpha_1! \alpha_2! ... \alpha_n!,$$

und für jeden Vektor $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$

$$x^\alpha := x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} ... x_n^{\alpha_n}$$

(wobei $x_i^{\alpha_i} = 1$ für $\alpha_i = 0$). Z.B. im Fall $n = 3$ haben wir

$$(2, 0, 1)! = 2!0!1! = 2$$

und

$$x^{(2,0,1)} = x_1^2 x_3.$$

Hauptsatz 15.11 (Taylorformel mit der Restgliedform nach Peano) *Sei Ω eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$. Für jede Funktion $f \in C^k(\Omega)$ mit $k \geq 0$ und für jedes $a \in \Omega$ gilt*

$$f(x) = \sum_{\{\alpha \in \mathbb{I}^n : |\alpha| \leq k\}} \frac{D^\alpha f(a)}{\alpha!} (x - a)^\alpha + o\left(\|x - a\|^k\right) \text{ für } x \to a. \tag{15.29}$$

Umgekehrt, gilt für reelle Koeffizienten c_α

$$f(x) = \sum_{\{\alpha \in \mathbb{I}^n : |\alpha| \leq k\}} c_\alpha (x - a)^\alpha + o\left(\|x - a\|^k\right) \text{ für } x \to a, \tag{15.30}$$

so haben wir $c_\alpha = \frac{D^\alpha f(a)}{\alpha!}$.

Nach der Offenheit von Ω liegt x in Ω (und somit $f(x)$ ist wohldefiniert), vorausgesetzt, dass $\|x-a\|$ hinreichend klein ist.

Definition. Die Funktion

$$\begin{aligned} T_k(x) &= \sum_{\{\alpha\in\mathbb{I}^n:|\alpha|\le k\}} \frac{D^\alpha f(a)}{\alpha!}(x-a)^\alpha \\ &= \sum_{\{\alpha\in\mathbb{I}^n:|\alpha|\le k\}} \frac{\partial^{|\alpha|} f(a)}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}} \frac{(x_1-a_1)^{\alpha_1}\ldots(x_n-a_n)^{\alpha_n}}{\alpha_1!\ldots\alpha_n!} \end{aligned} \tag{15.31}$$

heißt das *Taylor-Polynom* der Ordnung k der Funktion f im Punkt a. Die ausführliche Notation für das Taylor-Polynom ist $T_{k,f}(x;a)$

Offensichtlich ist $T_k(x)$ ein Polynom bezüglich der Variablen $x_1,...,x_n$ und $T_k(a) = f(a)$. Die Taylorformel lässt sich wie folgt umschreiben:

$$f(x) = T_k(x) + o(\|x-a\|^k) \text{ für } x\to a. \tag{15.32}$$

Somit ist $T_k(x)$ eine Approximation von $f(x)$ für x in der Nähe von a mit dem Approximationsfehler $o(\|x-a\|^k)$.

Die zweite Aussage des Satzes 15.11 bedeutet folgendes. Gilt

$$f(x) = P(x) + o(\|x-a\|^k) \text{ für } x\to a \tag{15.33}$$

für ein Polynom $P(x) = \sum c_\alpha x^\alpha$ von x des Grades $\le k$, so gilt $P\equiv T_k$. Somit ist T_k das einzige Polynom des Grades $\le k$, das (15.33) erfüllt.

Seien $n=1$ und Ω ein offenes Intervall. Dann ergibt (15.31)

$$T_k(x) = \sum_{\alpha=0}^{k} \frac{f^{(\alpha)}(a)}{\alpha!}(x-a)^\alpha$$

so dass

$$f(x) = \sum_{\alpha=0}^{k} \frac{f^{(\alpha)}(a)}{\alpha!}(x-a)^\alpha + o\left(|x-a|^k\right) \quad \text{für } x\to a,$$

was mit der Taylorformel des Satzes 9.2 übereinstimmt.

Sei n beliebig und $a=0$, so dass

$$T_k(x) = \sum_{\{\alpha\in\mathbb{I}^n:|\alpha|\le k\}} \frac{D^\alpha f(0)}{\alpha!} x^\alpha.$$

Stellen wir $T_k(x)$ expliziter für $k=0,1,2,3$ dar. Für $|\alpha|=0$ gilt $\alpha=(0,...,0)$ und somit

$$\frac{D^\alpha f(0)}{\alpha!} x^\alpha = f(0)$$

und somit

$$T_0(x) = f(0) = \text{const}.$$

Für $|\alpha|=1$ gilt

$$\alpha = (0,...,\underset{\widehat{i}}{1},...,0)$$

mit 1 an einer Position i und mit allen anderen Komponenten gleich 0. Somit haben wir

$$\frac{D^\alpha f(0)}{\alpha!} x^\alpha = \partial_i f(0)\, x_i$$

und

$$\sum_{\{\alpha \in \mathbb{I}^n : |\alpha|=1\}} \frac{D^\alpha f(0)}{\alpha!} x^\alpha = \sum_{i=1}^n \partial_i f(0)\, x_i = f'(0)\, x.$$

Es folgt, dass

$$T_1(x) = f(0) + \sum_{i=1}^n \partial_i f(0)\, x_i = f(0) + f'(0)\, x.$$

Für $|\alpha| = 2$ gibt es zwei Möglichkeiten: entweder

$$\alpha = (0, ..., \underset{\widehat{i}}{2}, ..., 0)$$

mit 2 an einer Position i, oder

$$\alpha = (0, ..., \underset{\widehat{i}}{1}, ..., \underset{\widehat{j}}{1}, ..., 0),$$

mit 1 an zwei Positionen $i < j$. Im ersten Fall haben wir

$$\frac{D^\alpha f(0)}{\alpha!} x^\alpha = \frac{\partial_{ii} f(0)}{2} x_i^2,$$

und im zweiten Fall

$$\frac{D^\alpha f(0)}{\alpha!} x^\alpha = \partial_{ij} f(0)\, x_i x_j,$$

woraus folgt

$$\sum_{\{\alpha \in \mathbb{I}^n : |\alpha|=2\}} \frac{D^\alpha f(0)}{\alpha!} x^\alpha = \sum_{i=1}^n \frac{\partial_{ii} f(0)}{2} x_i^2 + \sum_{\{1 \le i < j \le n\}} \partial_{ij} f(0)\, x_i x_j.$$

Somit erhalten wir

$$T_2(x) = f(0) + \sum_{i=1}^n \partial_i f(0)\, x_i + \sum_{i=1}^n \frac{\partial_{ii} f(0)}{2} x_i^2 + \sum_{\{1 \le i < j \le n\}} \partial_{ij} f(0)\, x_i x_j. \tag{15.34}$$

Für $|\alpha| = 3$ gibt es drei Möglichkeiten: entweder

$$\alpha = (0, ..., \underset{\widehat{i}}{3}, ..., 0)$$

mit 3 an einer Position i, oder

$$\alpha = (0, ..., \underset{\widehat{i}}{2}, ..., \underset{\widehat{j}}{1}, ..., 0),$$

mit 2 und 1 an den Positionen $i \neq j$, oder

$$\alpha = (0, ..., \underset{\widehat{i}}{1}, ..., \underset{\widehat{j}}{1}, ..., \underset{\widehat{l}}{1}, ..., 0),$$

mit 1 an drei Positionen $i < j < l$. Daraus folgt:

$$T_3(x) = T_2(x) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial_{iii} f(0)}{6} x_i^3 + \sum_{\{i \neq j\}} \frac{\partial_{iij} f(0)}{2} x_i^2 x_j + \sum_{\{1 \leq i < j < l \leq n\}} \partial_{ijl} f(0) x_i x_j x_l. \quad (15.35)$$

Zum Beispiel, sei $n = 2$. Dann bezeichnen wir die Koordinaten in $\mathbb{R}^2$ mit (x, y) anstatt (x_1, x_2). Es folgt aus (15.34), dass

$$T_2(x, y) = f(0) + \partial_x f(0)\, x + \partial_y f(0)\, y + \frac{1}{2} \partial_{xx} f(0)\, x^2 + \frac{1}{2} \partial_{yy} f(0)\, y^2 + \partial_{xy} f(0)\, xy, \quad (15.36)$$

und aus (15.35)

$$T_3(x, y) = T_2(x, y) + \frac{1}{6} \partial_{xxx} f(0)\, x^3 + \frac{1}{6} \partial_{yyy} f(0)\, y^3 + \frac{1}{2} \partial_{xxy} f(0)\, x^2 y + \frac{1}{2} \partial_{xyy} f(0)\, xy^2. \quad (15.37)$$

Beispiel. Bestimmen wir die Taylor-Polynome $T_2(x, y)$ und $T_3(x, y)$ der Funktion

$$f(x, y) = x^y$$

im Punkt $a = (1, 1)$. Analog zu (15.36) haben wir

$$\begin{aligned} T_2(x, y) &= f(a) + \partial_x f(a)(x-1) + \partial_y f(a)(y-1) \\ &\quad + \frac{1}{2} \partial_{xx} f(a)(x-1)^2 + \frac{1}{2} \partial_{yy} f(a)(y-1)^2 + \partial_{xy} f(a)(x-1)(y-1). \end{aligned}$$

Bestimmen wir die partiellen Ableitungen von f erster und zweiter Ordnung:

$$\partial_x f = y x^{y-1}, \qquad \partial_y f = x^y \ln x$$

$$\partial_{xx} f = y(y-1)\, x^{y-2}, \qquad \partial_{xy} f = y x^{y-1} \ln x + x^{y-1}, \qquad \partial_{yy} f = x^y \ln^2 x$$

so dass

$$\partial_x f(a) = 1, \qquad \partial_y f(a) = 0,$$
$$\partial_{xx} f(a) = 0, \quad \partial_{xy} f(a) = 1, \quad \partial_{yy} f(a) = 0,$$

Es folgt, dass

$$T_2(x, y) = 1 + (x-1) + (x-1)(y-1) = 1 - y + xy.$$

Analog zu (15.37) haben wir

$$\begin{aligned} T_3(x, y) &= T_2(x, y) + \frac{1}{6} \partial_{xxx} f(a)(x-1)^3 + \frac{1}{6} \partial_{yyy} f(a)(y-1)^3 \\ &\quad + \frac{1}{2} \partial_{xxy} f(a)(x-1)^2 (y-1) + \frac{1}{2} \partial_{xyy} f(a)(x-1)(y-1)^2. \end{aligned}$$

Bestimmen wir weiter die partiellen Ableitungen von f dritter Ordnung:

$$\partial_{xxx} f = y(y-1)(y-2)\, x^{y-3}, \quad \partial_{xxy} f = x^{y-2} \left(2y + y^2 \ln x - y \ln x - 1\right)$$

$$\partial_{xyy} f = x^{y-1} (\ln x)(y \ln x + 2), \qquad \partial_{yyy} f = x^y \ln^3 x$$

so dass

$$\partial_{xxx} f(a) = 0, \quad \partial_{xxy} f(a) = 1, \quad \partial_{xyy} f(a) = 0, \ \partial_{yyyf}(a) = 0.$$

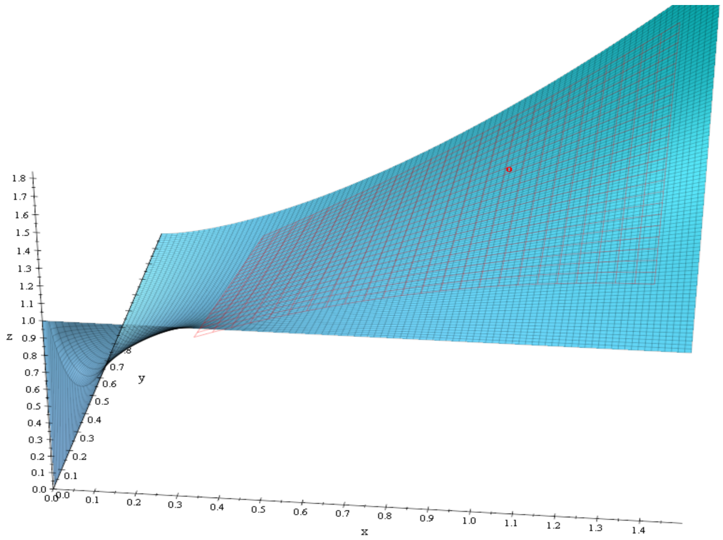
Es folgt, dass

$$T_3(x, y) = 1 + (x-1) + (x-1)(y-1) + \frac{1}{2}(x-1)^2(y-1).$$

Zum Beispiel, für $x = 1.02$ und $y = 1.1$ erhalten wir

$$1.02^{1.1} \approx T_3(1.02, 1.1) = 1 + 0.02 + 0.02 \times 0.1 + \frac{1}{2} \times 0.02^2 \times 0.1 = 1.02202$$

wobei alle 5 Nachkommastellen richtig sind.



Funktionen x^y (blau), $T_3(x, y)$ (rot) und der Punkt $(1, 1, 1)$ (rot)

15.6 Lokale Extrema

Wir benutzen hier die Taylorformel um lokale Extrema von Funktionen in $\mathbb{R}^n$ zu untersuchen.

Seien Ω eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ und $f : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

Definition. Ein Punkt $a \in \Omega$ heißt *lokale Maximumstelle* von f wenn es eine Kugel $U_r(a) \subset \Omega$ gibt so dass a eine Maximumstelle von f in $U_r(a)$ ist, d.h.

$$f(a) \geq f(x) \text{ für alle } x \in U_r(a).$$

Analog definiert man *lokale Minimumstelle*. Der Punkt a heißt *lokale Extremumstelle* von f, wenn a lokale Maximum- oder Minimumstelle ist.

In diesem Abschnitt besprechen wir die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für lokale Extrema. Wir fangen mit der Verallgemeinerung des Satzes von Fermat an.

Satz 15.12 *Sei $a \in \Omega$ eine lokale Extremumstelle von f in Ω. Ist f in a total differenzierbar, so gilt $f'(a) = 0$.*

Die Bedingung $f'(a) = 0$ ist äquivalent zu $\partial_1 f(a) = \partial_2 f(a) = ... = \partial_n f(a) = 0$.

Beweis. Sei a eine Maximumstelle von f in $U_r(a) \subset \Omega$. Fixieren wir ein $v \in \mathbb{R}^n$ und betrachten die folgende Funktion

$$g(t) = f(a + tv)$$

von reeller Variable t aus einem Intervall $(-\varepsilon, \varepsilon)$, wobei $\varepsilon > 0$ so klein ist, dass $a + tv \in U_r(a)$ für alle $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.

Die Funktion $g(t)$ hat in $t = 0$ eine Maximumstelle da

$$g(0) = f(a) \geq f(a + tv) \quad \text{für alle } t \in (-\varepsilon, \varepsilon).$$

Die Funktion $g(t)$ ist in $t = 0$ differenzierbar, da nach dem Satz 15.7

$$g'(0) = \lim_{t \to 0} \frac{g(t) - g(0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t} = \partial_v f(a) = f'(a)v.$$

Nach dem Satz von Fermat 8.7 erhalten wir $g'(0) = 0$, woraus folgt, dass $f'(a)v = 0$ für alle $v \in \mathbb{R}^n$ und somit $f'(a) = 0$, was zu beweisen war. ■

Definition. Sei f in Ω total differenzierbar. Die Punkte $x \in \Omega$ mit $f'(x) = 0$ heißen die *kritischen Punkte* von f.

Um die lokalen Extremumstellen von f zu bestimmen, man soll zuerst alle kritische Punkte finden und danach jeden kritischen Punkt weiter untersuchen.

Beispiel. Betrachten wir die Funktion

$$f(x, y) = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y}$$

im Bereich $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\}$. Es gilt

$$\partial_x f = y - \frac{50}{x^2} \quad \text{und} \quad \partial_y f = x - \frac{20}{y^2}.$$

Die Gleichungen für die kritischen Punkte sind

$$\partial_x f(x, y) = 0 \quad \text{und} \quad \partial_y f(x, y) = 0,$$

d.h.

$$\begin{cases} y - \frac{50}{x^2} = 0 \\ x - \frac{20}{y^2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 y = 50 \\ xy^2 = 20. \end{cases}$$

Es folgt

$$x^3 = \frac{(x^2 y)^2}{xy^2} = \frac{2500}{20} = 125 \quad \Rightarrow \quad x = 5$$

und

$$y^3 = \frac{(xy^2)^2}{x^2 y} = \frac{400}{50} = 8 \quad \Rightarrow \quad y = 2.$$

Somit gibt es einen einzigen kritischen Punkt $(5, 2)$.

Sei x ein kritischer Punkt von f. Um zu bestimmen ob x eine lokale Extremumstelle ist, verwenden wir die Ableitungen 2-ter Ordnung.

Definition. Für jede Funktion $f \in C^2(\Omega)$ definieren wir die *totale zweite Ableitung* $f''(x)$ als die folgende $n \times n$ Matrix:

$$f''(x) = (\partial_{ij} f(x))_{i,j=1}^n = \begin{pmatrix} \partial_{11} f(x) & \partial_{12} f(x) & ... & \partial_{1n} f(x) \\ \partial_{21} f(x) & \partial_{22} f(x) & ... & \partial_{2n} f(x) \\ ... & ... & ... & ... \\ \partial_{n1} f(x) & \partial_{n2} f(x) & ... & \partial_{nn} f(x) \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix heißt auch die *Hesse-Matrix* von f und wird auch mit H_f bezeichnet.

Nach dem Satz 15.9 gilt $\partial_{ij} f = \partial_{ji} f$ so dass die Hesse-Matrix symmetrisch ist.

Jede symmetrische $n \times n$ Matrix $A = (a_{ij})$ mit reellen Einträgen bestimmt eine *quadratische Form*

$$Q(u) = Q_A(u) := \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_i u_j$$

als eine Funktion von $u \in \mathbb{R}^n$.

Definition. Eine symmetrische $n \times n$ Matrix A (und ihre quadratische Form Q) heißt

- *positive definit* wenn $Q(u) > 0$ für alle $u \neq 0$ (Schreibweise $A > 0$);
- *positiv semidefinit* wenn $Q(u) \geq 0$ für alle $u \in \mathbb{R}^n$ (Schreibweise $A \geq 0$);
- *negativ definit* wenn $Q(u) < 0$ für alle $u \neq 0$ (Schreibweise $A < 0$);
- *negativ semidefinit* wenn $Q(u) \leq 0$ für alle $u \in \mathbb{R}^n$ (Schreibweise $A \leq 0$);
- *indefinit* wenn $Q(u)$ positive und negative Werte annimmt.

Bemerken wir, dass $Q(0) = 0$. Somit ist 0 eine Minimumstelle von Q genau dann, wenn $Q(u) \geq 0$ für alle $u \geq 0$, d.h. wenn $A \geq 0$. Analog ist 0 eine Maximumstelle von Q genau dann, wenn $A \leq 0$.

Beispiel. Die identische Matrix $A = \mathrm{id}$ erzeugt die quadratische Form $Q(u) = u_1^2 + ... + u_n^2$, die offensichtlich positiv definit ist, so dass $A > 0$.

Im Fall $n = 2$ betrachten wir die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

mit der quadratischen Form

$$Q(u) = 2u_1 u_2.$$

Da $Q(u)$ positive und negative Werte annimmt, so ist A in diesem Fall indefinit.

14.07.21 Vorlesung 26

Satz 15.13 *Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und f eine Funktion von $C^2(\Omega)$. Sei a ein kritischer Punkt von f, d.h. $f'(a) = 0$.*

(a) (Notwendige Bedingung für lokales Extremum) *Ist a eine lokale Maximumstelle von f, so gilt $f''(a) \leq 0$. Ist a eine lokale Minimumstelle von f so gilt $f''(a) \geq 0$.*

(b) (Hinreichende Bedingung für lokales Extremum) *Gilt $f''(a) < 0$ so ist a eine lokale Maximumstelle von f. Gilt $f''(a) > 0$ so ist a eine lokale Minimumstelle von f.*

Als eine Folgerung von (a) erhalten wir folgendes: ist $f''(a)$ indefinit so ist a keine Extremumstelle.

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir $a = 0$ an. Wir verwenden das Taylor-Polynom $T_2(x)$ der Funktion f an der Stelle 0, das nach (15.34) wie folgt aussieht:

$$\begin{aligned} T_2(x) &= f(0) + \sum_{i=1}^n \partial_i f(0)\, x_i + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \partial_{ii} f(0)\, x_i^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} \partial_{ij} f(0)\, x_i x_j \\ &= f(0) + f'(0)\, x + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \partial_{ij} f(0)\, x_i x_j, \end{aligned}$$

wobei wir benutzt haben, dass

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \partial_{ij} f(0)\, x_i x_j &= \frac{1}{2}\left(\sum_{i=j} + \sum_{i<j} + \sum_{i>j}\right) \partial_{ij} f(0)\, x_i x_j \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \partial_{ii} f(0)\, x_i^2 + \sum_{i<j} \partial_{ij} f(0)\, x_i x_j, \end{aligned}$$

da $\partial_{ij} f(0)\, x_i x_j = \partial_{ji} f(0)\, x_j x_i$.

Sei Q die quadratische Form der Matrix

$$\frac{1}{2} f''(0) = \frac{1}{2}\left(\partial_{ij} f(0)\right)_{i,j=1}^n$$

so dass

$$T_2(x) = f(0) + f'(0)\, x + Q(x).$$

Nach der Taylorformel des Satzes 15.11 gilt

$$f(x) = f(0) + f'(0)\, x + Q(x) + o\left(\|x\|^2\right) \text{ für } x \to 0.$$

Da $f'(0) = 0$, so folgt es, dass

$$f(x) - f(0) = Q(x) + o\left(\|x\|^2\right) \text{ für } x \to 0. \tag{15.38}$$

(a) Sei 0 eine lokale Minimumstelle. Beweisen wir, dass $f''(0) \geq 0$ d.h. $Q(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Ersetzen wir in (15.38) x mit tx für $t \in \mathbb{R}$ und erhalten

$$f(tx) - f(0) = Q(x)\, t^2 + o\left(t^2\right) \quad \text{für } t \to 0.$$

Da 0 eine lokale Minimumstelle ist, so gilt $f(tx) \geq f(0)$ für hinreichend kleinen Werte von t, woraus folgt
$$Q(x)\,t^2 + o\left(t^2\right) \geq 0.$$
Dividieren durch t^2 ergibt für $t \to 0$, dass $Q(x) \geq 0$, was zu beweisen war.

Analog beweist man $f''(0) \leq 0$ im Fall wenn 0 eine lokale Maximumstelle ist.

(b) Sei $f''(0) > 0$, d.h. $Q(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Beweisen, wir, dass
$$f(x) > f(0)$$
für alle $x \neq 0$, vorausgesetzt, dass $\|x\|$ hinreichend klein ist. Nach (15.38) reicht es zu beweisen, dass für hinreichend kleine Werte von $\|x\|$
$$Q(x) + o\left(\|x\|^2\right) > 0.$$
Die Funktion $Q(x)$ ist stetig auf $\mathbb{R}^n$, da Q eine lineare Kombination von stetigen Funktionen $x_i x_j$ ist. Betrachten wir die Menge
$$S = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$$
(der Rand der Kugel $U_1(0)$). Die Menge S ist offensichtlich beschränkt (da $S \subset U_2(0)$) und abgeschlossen, da S das Urbild von $\{1\}$ unter der stetigen Abbildung $x \mapsto \|x\|$ ist. Nach dem Extremwertsatz (Korollar 14.22) besitzt die Funktion $Q(x)$ ein Minimum auf S. Sei $m = \min_S Q$.

Da $Q(x)$ auf S positiv ist, so gilt $m > 0$. Für jedes $x \neq 0$ gilt $\frac{x}{\|x\|} \in S$, woraus folgt
$$Q\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \geq m,$$
und somit
$$Q(x) \geq m\,\|x\|^2.$$
Andererseits für jedes $\varepsilon > 0$ gilt
$$\left|o\left(\|x\|^2\right)\right| < \varepsilon\,\|x\|^2,$$
vorausgesetzt, dass $\|x\|$ hinreichend klein ist. Wählen wir ein $\varepsilon < m$ und erhalten, dass für alle $x \neq 0$ mit hinreichend kleiner Norm $\|x\|$ gilt
$$Q(x) + o\left(\|x\|^2\right) \geq (m - \varepsilon)\,\|x\|^2 > 0,$$
was zu beweisen war. Analog beweist man, dass im Fall $f''(0) < 0$ der Punkt 0 eine Maximumstelle ist. ∎

Bemerkung. Die Definitheit von einer symmetrischen Matrix $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ lässt sich mit Hilfe von Eigenwerten wie folgt bestimmen. Die Eigenwerte von A sind die Nullstellen des charakteristischen Polynom $\det(A - \lambda\,\mathrm{Id})$. Da A symmetrisch ist, so sind alle Eigenwerte $\lambda_1, ..., \lambda_n$ von A reell. Die quadratische Form $Q(u)$ von A lässt sich mit Hilfe von einer bijektiven linearen Transformation $v = v(u)$ zur Diagonalform führen:
$$Q(u) = \lambda_1 v_1^2 + ... + \lambda_n v_n^2.$$
Somit erhalten wir die äquivalenten Bedingungen:

1. $A > 0 \Leftrightarrow$ alle $\lambda_i > 0$

2. $A \geq 0 \;\Leftrightarrow$ alle $\lambda_i \geq 0$

3. $A < 0 \;\Leftrightarrow$ alle $\lambda_i < 0$

4. $A \leq 0 \;\Leftrightarrow$ alle $\lambda_i \leq 0$

5. A ist indefinit $\Leftrightarrow$ es gibt i, j mit $\lambda_i > 0$ und $\lambda_j < 0$.

Im Fall $n = 2$, für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

die Vorzeichen von λ_1 und λ_2 lassen sich leicht bestimmen ohne die Werte von λ_1 und λ_2 zu berechnen. Es ist bekannt, dass

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 &= \operatorname{Spur} A = a_{11} + a_{22} \\ \lambda_1 \lambda_2 &= \det A = a_{11} a_{22} - a_{12}^2. \end{aligned}$$

Im Fall $\det A < 0$ haben die Eigenwerte verschiedene Vorzeichen und somit ist die Matrix A indefinit. Im Fall $\det A > 0$ und $\operatorname{Spur} A > 0$ sind die beiden Eigenwerte positiv und somit $A > 0$. Im Fall $\det A > 0$ und $\operatorname{Spur} A < 0$ sind die beiden Eigenwerte negativ und somit $A < 0$.

Es gibt auch andere Methoden um die Definitheit von A zu bestimmen. Zum Beispiel, das Sylvester-Kriterium besagt folgendes: $A > 0$ genau dann, wenn alle führende Hauptminoren von A positiv sind, d.h. für alle $1 \leq k \leq n$,

$$\det \left(a_{ij}\right)_{i,j=1}^{k} > 0.$$

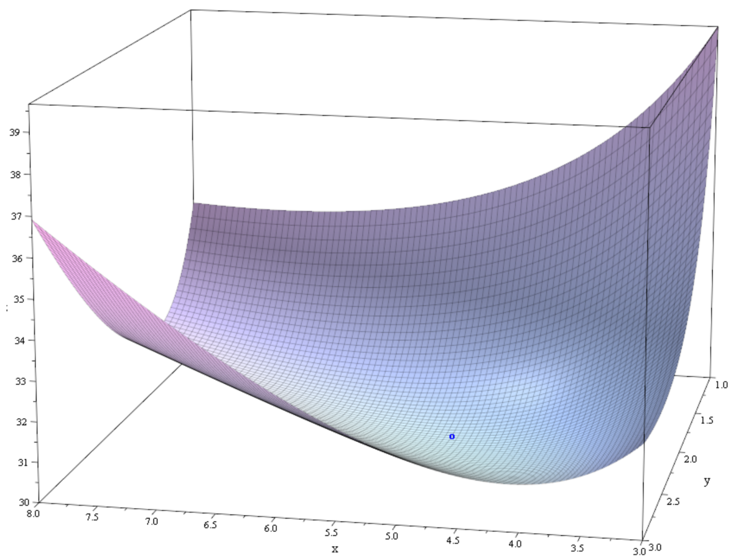
Beispiel. Betrachten wir wieder die Funktion

$$f(x, y) = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y}$$

im Bereich $\{x, y > 0\}$. Wir wissen schon, dass diese Funktion den einzigen kritischen Punkt $(5, 2)$ hat. Die Hesse-Matrix in diesem Punkt ist

$$\begin{pmatrix} \partial_{xx} f & \partial_{xy} f \\ \partial_{yx} f & \partial_{yy} f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{100}{x^3} & 1 \\ 1 & \frac{40}{y^3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Da det und Spur positiv sind, so ist die Hesse-Matrix positiv definit und $(5, 2)$ eine lokale Minimumstelle.



Die lokale Minimumstelle von $f(x,y) = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y}$

Beispiel. Bestimmen wir die kritischen Punkte der Funktion

$$f(x,y) = 2x^4 + y^4 - x^2 - 2y^2$$

in $\mathbb{R}^2$. Wir haben

$$\partial_x f = 8x^3 - 2x \quad \text{und} \quad \partial_y f = 4y^3 - 4y$$

so dass die Gleichungen für die kritischen Punkte sind

$$\begin{cases} 8x^3 - 2x = 0, \\ 4y^3 - 4y = 0. \end{cases}$$

Es folgt $x = 0, \pm\frac{1}{2}$ und $y = 0, \pm 1$, insgesamt 9 kritische Punkte. Die Hesse-Matrix ist

$$f'' = \begin{pmatrix} \partial_{xx} f & \partial_{xy} f \\ \partial_{xy} f & \partial_{yy} f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24x^2 - 2 & 0 \\ 0 & 12y^2 - 4 \end{pmatrix}.$$

Im Punkt $(0,0)$ ist die Hesse-Matrix

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

negativ definit, so dass $(0,0)$ eine lokale Maximumstelle. In den Punkten $(0,\pm 1)$ ist die Hesse-Matrix

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$$

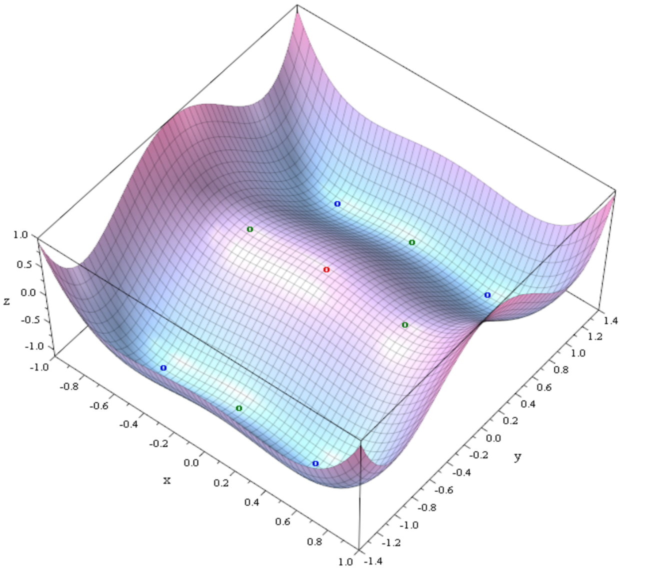
indefinit, so dass $(0,\pm 1)$ keine lokale Extremumstellen sind. In den Punkten $\left(\pm\frac{1}{2}, 0\right)$ ist die Hesse-Matrix

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

indefinit, so dass $\left(\pm\frac{1}{2},0\right)$ keine lokale Extremumstellen sind. In den Punkten $\left(\pm\frac{1}{2},\pm 1\right)$ ist die Hesse-Matrix

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$$

positiv definit, so dass diese Punkte lokale Minimumstellen sind.



Die kritischen Punkten von $f\left(x,y\right)=2x^4+y^4-x^2-2y^2$

Somit hat f es eine lokale Maximumstelle in $(0,0)$ und vier lokale Minimumstellen in den Punkten $\left(\pm\frac{1}{2},\pm 1\right)$. Die kritischen Punkte $(0,\pm 1)$ und $\left(\pm\frac{1}{2},0\right)$ sind keine lokale Extremumstellen. In der Nähe von diesen Punkten sieht der Graph der Funktion f wie ein Sattel aus.

Beispiel. Betrachten wir die Funktion $f\left(x,y\right)=\sin x\cos y$ in $\Omega=(-\pi,\pi)\times(-\pi,\pi)$. Da

$$\partial_x f=\cos x\cos y \quad \text{und} \quad \partial_y f=-\sin x\sin y,$$

so erfüllen die kritischen Punkte das System

$$\begin{cases} \cos x\cos y=0 \\ \sin x\sin y=0, \end{cases}$$

d.h. entweder $\cos x=0$ und $\sin y=0$ oder $\cos y=0$ und $\sin x=0$. Somit erhalten wir die folgenden kritischen Punkte:

$$\left(\frac{\pi}{2},0\right),\left(-\frac{\pi}{2},0\right),\left(0,\frac{\pi}{2}\right),\left(0,-\frac{\pi}{2}\right).$$

Bereichen wir die Hesse-Matrix von f:

$$f''\left(x\right)=\begin{pmatrix} \partial_{xx}f & \partial_{xy}f \\ \partial_{yx}f & \partial_{yy}f \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\sin x\cos y & -\cos x\sin y \\ -\cos x\sin y & -\sin x\cos y \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt:

$$f''(\frac{\pi}{2},0)=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}<0,$$

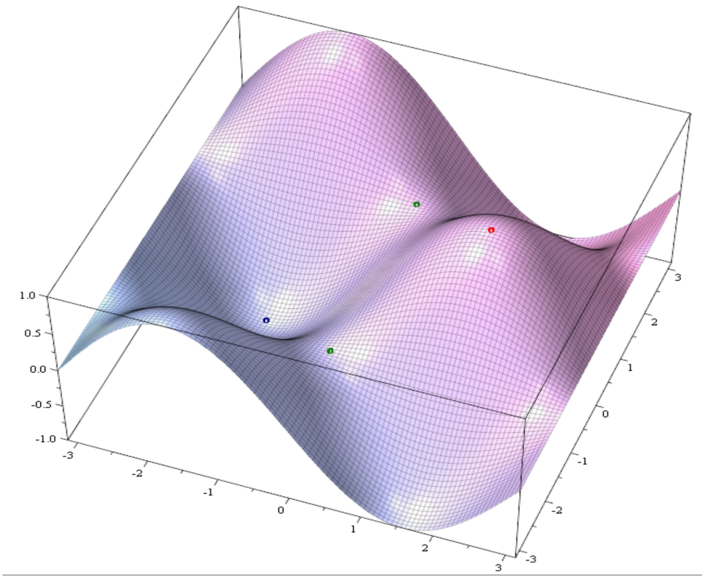
so dass $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ eine lokale Maximumstelle ist;

$$f''(-\frac{\pi}{2}, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} > 0,$$

so dass $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ eine lokale Minimumstelle ist;

$$f''(0, \frac{\pi}{2}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } f''(0, -\frac{\pi}{2}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

sind indefinit, so dass weder $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ noch $\left(0, -\frac{\pi}{2}\right)$ lokale Extremumstelle ist. In der Nähe von diesen Punkten sieht der Graph der Funktion wie ein Sattel aus.



Die Funktion $f(x, y) = \sin x \cos y$

15.7 Satz von der impliziten Funktion

Betrachten wir das folgende Problem: gegeben sei eine reellwertige Funktion $F(x, y)$ auf einer offenen Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, man bestimme y als Funktion von x aus der Gleichung $F(x, y) = 0$. Gibt es eine stetige Funktion $f(x)$ so dass

$$F(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = f(x) \tag{15.39}$$

(möglicherweise in einer Teilmenge von Ω) so sagt man, dass die Funktion $f(x)$ durch die Gleichung $F(x, y) = 0$ *implizit* definiert wird. Häufig wird der Begriff "implizite Funktion" benutzt, was bedeutet nicht anderes als "implizit definierte Funktion".

Betrachten wir die Menge

$$M = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : F(x, y) = 0\right\}.$$

Dann soll der Graph von der impliziten Funktion f in M liegen.

Beispiel. Die Menge von Punkten $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ die die Gleichung

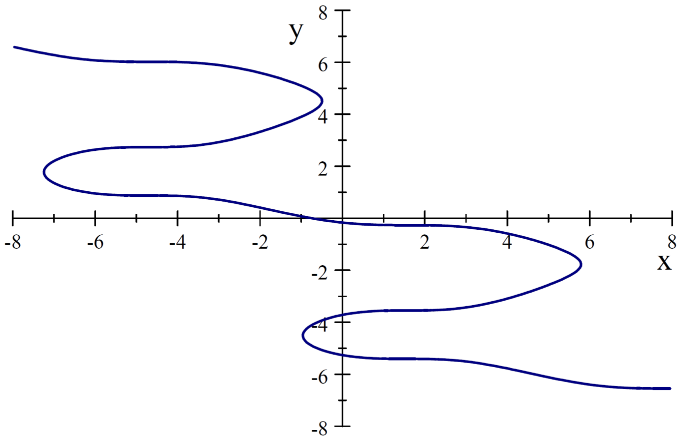
$$x^2 + y^2 = 1 \tag{15.40}$$

erfüllen, ist ein Kreis. Der Kreis ist kein Graph, aber besteht aus zwei Graphen von den stetigen Funktionen $y = \pm\sqrt{1 - x^2}$ auf $x \in [-1, 1]$. Diese zwei Funktionen werden implizit von der Gleichung (15.40) definiert.

Beispiel. Betrachten wir noch eine andere Gleichung:

$$x + \cos x + y + 5 \sin y = 0, \tag{15.41}$$

die sich nicht explizit lösen lässt.



Die Menge von Punkten (x, y), die (15.41) erfüllen

Die Menge M von Punkten $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ die (15.41) erfüllen, ist eine Kurve, die sich in mehreren Graphen von stetigen Funktionen teilen lässt: jedes Stück zwischen den Wendepunkten bestimmt einen Graph. Somit gibt es mehrere stetige Funktionen, die von (15.41) implizit definiert werden, mit verschiedenen Definitionsbereichen.

Betrachten wir jetzt eine allgemeinere Situation when x ein Punkt in $\mathbb{R}^n$ ist und y ein Punkt in $\mathbb{R}^m$. Wir betrachten das Paar (x, y) als Element von $\mathbb{R}^{n+m}$ mit den Komponenten

$$(x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_m).$$

Sei Ω eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^{n+m}$ wo eine Funktion $F : \Omega \to \mathbb{R}^m$ definiert ist. Wir möchten die Gleichung $F(x, y) = 0$ für jedes x bezüglich y lösen und somit eine Funktion $y = f(x)$ erhalten. Diese Gleichung sieht ausführlich wir folgt aus:

$$\begin{cases} F_1(x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_m) = 0 \\ F_2(x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_m) = 0 \\ ... \\ F_m(x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_m) = 0 \end{cases}$$

wobei $F_1, ..., F_m$ die Komponenten von F sind. Das ist ein System von m skalaren Gleichungen mit m Unbekannten $y_1, ..., y_m$ und mit n Parametern $x_1, ..., x_n$. Solches System kann sehr kompliziert sein, aber wir formulieren unterhalb die einfachen Bedingungen, die mindestens lokale Lösbarkeit garantieren.

Beispiel. Betrachten wir ein Beispiel, wo F eine lineare Abbildung bezüglich y ist, d.h.

$$F(x,y) = A(x)\,y + B(x),$$

wobei $A(x)$ eine $m \times m$ von x abhängige Matrix ist und $B(x) \in \mathbb{R}^m$. Die Gleichung $F(x,y) = 0$ ist ein lineares System

$$A(x)\,y + B(x) = 0,$$

das genau dann lösbar ist, wenn die Matrix $A(x)$ invertierbar ist. In diesem Fall erhalten wir

$$y = -A^{-1}(x)\,B(x).$$

Sei die Funktion $F : \Omega \to \mathbb{R}^m$ differenzierbar. Die Jacobi-Matrix von F lässt sich wie folgt darstellen

$$J_F = \begin{pmatrix} \partial_{x_1}F_1 & ... & \partial_{x_n}F_1 & \partial_{y_1}F_1 & ... & \partial_{y_m}F_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \partial_{x_1}F_m & ... & \partial_{x_n}F_m & \partial_{y_1}F_m & ... & \partial_{y_m}F_m \end{pmatrix} = (\partial_x F \mid \partial_y F), \tag{15.42}$$

wobei $\partial_x F$ die Jacobi-Matrix von F bezüglich x ist und $\partial_y F$ die Jacobi-Matrix von F bezüglich y ist. Es ist klar, dass $\partial_x F$ eine $m \times n$ Matrix ist und $\partial_y F$ eine $m \times m$ Matrix. Insbesondere ist $\partial_y F$ eine quadratische Matrix.

Zum Beispiel, im Fall $F = A(x)\,y + B(x)$ haben wir $\partial_y F(x,y) = A(x)$. Somit ist in diesem Fall die Lösbarkeit der Gleichung $F(x,y) = 0$ äquivalent zur Invertierbarkeit der Matrix $\partial_y F$.

Definition. Let Ω eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^k$. Eine Funktion $F : \Omega \to \mathbb{R}^m$ heißt *l-fach stetig differenzierbar* wenn alle partielle Ableitungen $D^\alpha F_j$ der Ordnung $|\alpha| \leq l$ von allen Komponenten F_j existieren und stetig in Ω sind. Man sagt in diesem Fall, dass F eine Funktion der Klasse $C^l(\Omega, \mathbb{R}^m)$ ist.

Hauptsatz 15.14 (Der Satz von der impliziten Funktion) *Seien Ω eine offene Menge in $\mathbb{R}^{n+m}$ und F eine Funktion der Klasse $C^l(\Omega, \mathbb{R}^m)$ mit $l \geq 1$. Gelten für einen Punkt $(a,b) \in \Omega$ die Bedingungen*

$$F(a,b) = 0 \quad \textit{und} \quad \partial_y F(a,b) \ \textit{ist invertierbar}, \tag{15.43}$$

so existieren offene Mengen $U \subset \mathbb{R}^n$ und $V \subset \mathbb{R}^m$ mit $a \in U$, $b \in V$, $U \times V \subset \Omega$, und eine Funktion $f : U \to V$ mit

$$F(x,y) = 0 \ \Leftrightarrow \ y = f(x) \quad \textit{für alle } x \in U,\ y \in V. \tag{15.44}$$

Darüber hinaus ist f von der Klasse $C^l(U, \mathbb{R}^m)$ und es gilt für alle $x \in U$ die Identität

$$f'(x) = -(\partial_y F)^{-1}(\partial_x F)(x, f(x)) \tag{15.45}$$

16.07.21 Vorlesung 27

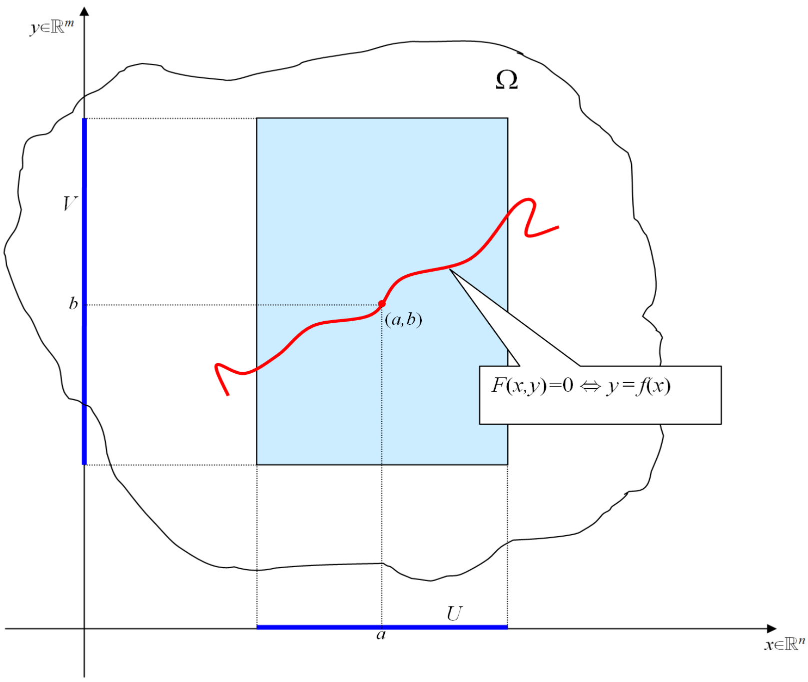


Bild zum Satz 15.14

Betrachten wir die Mengen

$$M = \{(x, y) \in \Omega : F(x, y) = 0\}$$

und

$$N = \{(x, y) \in \Omega : \det \partial_y F(x, y) = 0\}.$$

Die Bedingung (15.43) bedeutet, dass $(a, b) \in M \setminus N$. Die Existenz von f mit (15.44) bedeutet, dass die Menge M in der Nähe von (a, b) (nämlich in $U \times V$) der Graph einer Funktion ist. Somit lässt sich der Satz 15.14 wie folgt kurz umformulieren: in der Nähe von jedem Punkt $(a, b) \in M \setminus N$ ist die Menge M ein Graph. Oder noch kürzer: die Menge $M \setminus N$ ist lokal ein Graph. Das Wort "lokal" bedeutet genau "in der Nähe von jedem Punkt", und "ein Graph" bedeutet "der Graph einer Funktion von x".

Beispiel. Betrachten wir wieder die Funktion (15.41), d.h.

$$F(x, y) = x + \cos x + y + 5 \sin y$$

mit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Wir haben

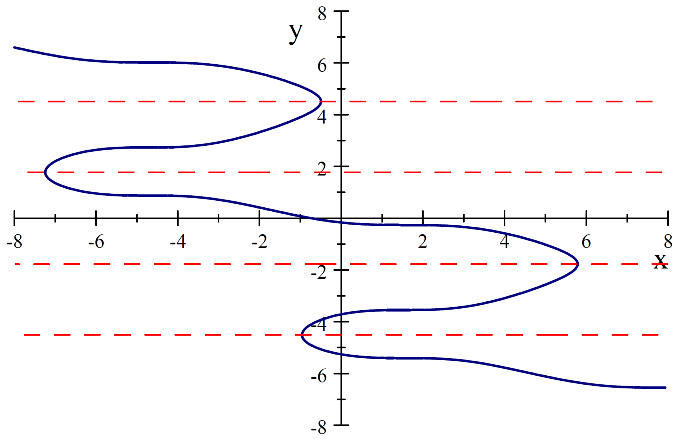
$$\partial_y F = 1 + 5 \cos y.$$

Betrachten wir die Mengen M und N wie oberhalb, d.h.

$$M = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + \cos x + y + 5 \sin y = 0\right\}$$

und

$$\begin{aligned} N &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \cos y = -\frac{1}{5}\right\} \\ &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = \pm \arccos\left(-\frac{1}{5}\right) + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}\right\}. \end{aligned}$$



Die Mengen M und N

Am obigen Bild M ist die Kurve und N ist die Vereinigung von waagerechten Geraden. Der Schnitt $M \cap N$ besteht aus allen Wendepunkten der Kurve M. Die Menge M außerhalb des Schnittes ist lokal der Graph einer Funktion $y = f(x)$.

Sei $y = f(x)$ eine implizit von $F(x,y) = 0$ gegebene Funktion. Es folgt aus (15.45), dass

$$f'(x) = -\frac{\partial_x F}{\partial_y F} = -\frac{1 - \sin x}{1 + 5\cos y} = -\frac{1 - \sin x}{1 + 5\cos f(x)}.$$

Obwohl die Funktion $f(x)$ nicht explizit bekannt ist, die Formel (15.45) ergibt die Ableitung $f'(x)$ explizit durch x und $f(x)$.

Bemerkung. Die Formel (15.45) lässt sich leicht gewinnen, vorausgesetzt, dass die implizite Funktion $y = f(x)$ existiert und differenzierbar ist. Dann erfüllt f sie für alle $x \in U$ die Gleichung

$$F(x, f(x)) \equiv 0.$$

Ableiten der zusammengesetzten Funktion $g(x) = F(x, f(x))$ ergibt nach der Kettenregel

$$g'(x) = F'(x,y)\begin{pmatrix} \mathrm{Id} \\ f'(x) \end{pmatrix} = (\partial_x F \mid \partial_y F)\begin{pmatrix} \mathrm{Id} \\ f'(x) \end{pmatrix} = \partial_x F + (\partial_y F) f'(x),$$

woraus die folgende Identität in U folgt

$$\partial_x F + (\partial_y F) f'(x) = 0,$$

und somit auch (15.45).

Dieser Argument gilt als Beweis von (15.45) nur dann, wenn die Differenzierbarkeit von f schon bekannt ist. Allerdings im Beweis des Satzes 15.14 werden wir die Differenzierbarkeit von f zusammen mit (15.45) erhalten, aber nicht zuvor.

15.8 Satz von der inversen Funktion

Hauptsatz 15.15 (Satz von der inversen Funktion) *Seien W eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ und f eine Funktion der Klasse $C^l(W, \mathbb{R}^n)$ mit $l \geq 1$. Ist $f'(p)$ in einem Punkt $p \in W$ invertierbar, so existieren offene Teilmengen U und V von $\mathbb{R}^n$, so dass $p \in U \subset W$, $f(p) \in V$, und $f|_U$ eine Bijektion von U nach V ist; insbesondere ist die inverse Funktion $f^{-1} : V \to U$ wohldefiniert. Darüber hinaus ist f^{-1} der Klasse $C^l(V, \mathbb{R}^n)$ und es gilt*

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \left(f'(x)\right)^{-1} \tag{15.46}$$

für alle $y \in V$ und $x = f^{-1}(y)$.

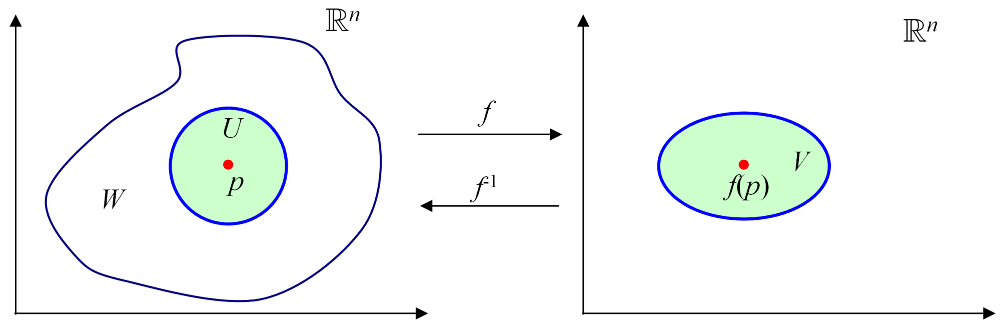


Bild zum Satz 15.15

Eine kurze Umformulierung des Satzes 15.15: in der Nähe von jedem Punkt p, wo die Matrix $f'(p)$ invertierbar ist, ist auch die Funktion f invertierbar. Betrachten wir die Menge

$$W_0 = \{p \in W : \det f'(p) = 0\}.$$

Dann in $W \setminus W_0$ ist f lokal invertierbar.

Bemerkung. Sei f eine reellwertige differenzierbare Funktion auf einem Intervall J. Nun sei angenommen, dass $f'(x) \neq 0$ für alle $x \in J$. Nach der Aufgabe 3 ist f streng monotone auf J. Nach dem Satz 7.11 existiert die inverse Funktion f^{-1} auf dem Intervall $I = f(J)$, und nach dem Satz 8.6 ist f^{-1} auf I differenzierbar und es gilt

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

für alle $y \in I$ und $x = f^{-1}(y)$.

Der Satz 15.15 ergibt die Existenz von f^{-1} nur lokal, auch wenn $f'(x)$ in jedem Punkt $x \in W$ invertierbar ist, d.h. $\det f'(x) \neq 0$. Für die globale Existenz von f^{-1} in Dimension $n \geq 2$ benötigt man zusätzliche Bedingungen, die hier nicht besprochen werden.

Beispiel. Betrachten wir die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ wie folgt:

$$f(x, y) = \left(x^2 - y^2, 2xy\right). \tag{15.47}$$

Die totale Ableitung

$$f'(x, y) = J_f(x, y) = \begin{pmatrix} \partial_x f_1 & \partial_y f_1 \\ \partial_x f_2 & \partial_y f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}$$

ist genau dann invertierbar, wenn $\det f'(x,y) = 4(x^2+y^2) \neq 0$ d.h. wenn $(x,y) \neq 0$. Setzen wir $W = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ und erhalten nach dem Satz 15.15, dass f in W lokal invertierbar.

Mit Hilfe von der komplexen Variable $z = x + iy$ können wir die Funktion (15.47) wie folgt darstellen: $f(z) = z^2$. Jede komplexe Zahl $w \in W$ hat genau zwei Werte von $\sqrt{w}$, d.h. es gibt zwei Werte von z mit $f(z) = w$. Es folgt, dass das Bild $f(W)$ gleich W ist, aber die Funktion $f : W \to W$ nicht injektiv ist und somit nicht (global) invertierbar ist.

15.9 * Beweise

15.9.1 Taylorformel

Beweis von dem Satz 15.11. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir $a = 0$ an. Setzen wir

$$R_k(x) := f(x) - T_k(x) \tag{15.48}$$

und beweisen per Induktion nach k, dass

$$R_k(x) = o\left(\|x\|^k\right) \text{ für } x \to 0. \tag{15.49}$$

Induktionsanfang. Für $k = 0$ wird (15.49)

$$f(x) - f(0) = o(1) \text{ für } x \to 0,$$

was nach der Stetigkeit von f gilt.

Induktionsschritt von $k-1$ nach k. Fixieren wir einen Index $i = 1, ..., n$ und bemerken, dass $\partial_i f \in C^{k-1}(\Omega)$.

Behauptung. *Das Taylor-Polynom der Ordnung $k-1$ von $\partial_i f$ ist gleich $\partial_i T_k$, d.h.*

$$T_{k-1,\partial_i f}(x) = \partial_i T_{k,f}(x). \tag{15.50}$$

Nach (15.31) haben wir

$$\partial_i T_k(x) = \sum_{\{\alpha \in \mathbb{I}^n : |\alpha| \leq k\}} \frac{D^\alpha f(0)}{\alpha!} \partial_i x^\alpha. \tag{15.51}$$

Im Fall $\alpha_i = 0$ hängt x^α von x_i nicht ab, woraus folgt $\partial_i x^\alpha = 0$. Somit können wir annehmen, dass in der obigen Summe nur die Werte von α mit $\alpha_i \geq 1$ benutzt werden. Setzen wir

$$\beta = (0, ..., \underset{\hat{i}}{1}, ..., 0). \tag{15.52}$$

Dann ist $\alpha - \beta$ ein Multiindex der Ordnung $|\alpha| - 1$ und es gelten die Identitäten:

$$\partial_i x^\alpha = \partial_i \left(x_1^{\alpha_1} ... x_i^{\alpha_i} ... x_n^{\alpha_n}\right) = \alpha_i (x_1^{\alpha_1} ... x_i^{\alpha_i - 1} ... x_n^{\alpha_n}) = \alpha_i x^{\alpha - \beta},$$

$$\alpha! = \alpha_1! ... \alpha_i! ... \alpha_n! = \alpha_i \left(\alpha_1! ... (\alpha_i - 1)! ... \alpha_n!\right) = \alpha_i (\alpha - \beta)!,$$
$$D^\alpha f = D^{\alpha-\beta} D^\beta f = D^{\alpha-\beta} \partial_i f.$$

Einsetzen in (15.51) und Wechsel $\gamma = \alpha - \beta$ ergeben:

$$\begin{aligned} \partial_i T_k(x) &= \sum_{\{\alpha\in\mathbb{I}^n:|\alpha|\leq k,\alpha_i\geq 1\}} \frac{D^{\alpha-\beta}\partial_i f(0)}{\alpha_i(\alpha-\beta)!}\alpha_i x^{\alpha-\beta} \\ &= \sum_{\{\gamma\in\mathbb{I}^n:|\gamma|\leq k-1\}} \frac{D^{\gamma}(\partial_i f)(0)}{\gamma!}x^{\gamma} = T_{k-1,\partial_i f}(x), \end{aligned} \tag{15.53}$$

was (15.50) beweist.

Nach (15.50) und nach der Induktionsvoraussetzung für die Funktion $\partial_i f \in C^{k-1}(\Omega)$ erhalten wir

$$(\partial_i f)(x) = \partial_i T_k(x) + o\left(\|x\|^{k-1}\right) \text{ für } x \to 0,$$

was äquivalent zu

$$\partial_i R_k(x) = o\left(\|x\|^{k-1}\right) \text{ für } x \to 0 \tag{15.54}$$

ist.

Die Funktion $R_k(x)$ ist in einer Kugel $U_\varepsilon(0)$ wohldefiniert und gehört zur Klasse $C^k(B_\varepsilon(0))$. Da $k \geq 1$, so ist R_k differenzierbar in dieser Kugel. Nach dem Mittelwertsatz 15.8 erhalten wir, dass für ein Punkt $\xi \in [0,x]$

$$R_k(x) = R_k(x) - R_k(0) = R_k'(\xi)\,x = \sum_{i=1}^{n} \partial_i R_k(\xi)\,x_i.$$

Da $\|\xi\| \leq \|x\|$, so erhalten wir aus (15.54)

$$|R_k(x)| \leq \sum_{i=1}^{n} |\partial_i R_k(\xi)|\,\|x\|_\infty = o\left(\|\xi\|^{k-1}\right)\|x\|_\infty = o\left(\|x\|^k\right),$$

woraus (15.49) folgt.

Jetzt beweisen wir die Eindeutigkeit des Taylor-Polynoms. Gilt (15.30), so setzen wir

$$b_\alpha = \frac{D^\alpha f(0)}{\alpha!} - c_\alpha$$

und

$$Q(x) = \sum_{\{\alpha\in\mathbb{I}^n:|\alpha|\leq k\}} b_\alpha x^\alpha,$$

so dass $Q(x)$ ein Polynom von x des Grades $\leq k$ ist. Es folgt aus (15.29) and (15.30), dass

$$Q(x) = o\left(\|x\|^k\right) \quad \text{für } k \to \infty. \tag{15.55}$$

Wir müssen beweisen, dass $b_\alpha = 0$ für alle α, was wir aus (15.55) gewinnen.

Zuerst zeigen wir, dass $Q(x) \equiv 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Setzen wir $x = tv$ für $v \in \mathbb{R}^n$ und $t \in \mathbb{R}$ und stellen $Q(x)$ wie folgt dar:

$$Q(x) = \sum_{\{\alpha\in\mathbb{I}^n:|\alpha|\leq k\}} b_\alpha (tv)^\alpha = \sum_{\{\alpha\in\mathbb{I}^n:|\alpha|\leq k\}} b_\alpha t^{|\alpha|} v^\alpha = \sum_{j=0}^{k} Q_j(v)\,t^j,$$

wobei $Q_j(v)$ die Polynome von v sind. Für festes v und für $t \to 0$ erhalten wir aus (15.55)

$$\sum_{j=0}^{k} Q_j(v)\, t^j = o\left(t^k\right) \text{ für } t \to 0.$$

Da die linke Seite hier ein Polynom von t des Grades $\leq k$ ist, so erhalten wir nach der Taylorformel aus Analysis 1, dass alle Koeffizienten von diesem Polynom verschwinden, d.h.

$$Q_j(v) = 0 \text{ für alle } j = 0, ..., k \text{ und für alle } v \in \mathbb{R}^n,$$

woraus folgt

$$Q(x) = 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}^n. \tag{15.56}$$

Beweisen wir jetzt per Induktion nach k, dass unter der Bedingung (15.56) alle Koeffizienten b_α von Q verschwinden. Für $k = 0$ ist das offensichtlich, da $Q(x) \equiv b_0 = \text{const}$. Für Induktionsschritt bemerken wir, dass analog zu (15.53) und mit β aus (15.52)

$$\partial_i Q(x) = \sum_{\{\alpha \in \mathbb{I}^n : |\alpha| \leq k, \alpha_i \geq 1\}} \alpha_i b_\alpha x^{\alpha - \beta} = \sum_{\{\gamma \in \mathbb{I}^n : |\gamma| \leq k-1\}} b'_\gamma x^\gamma,$$

wobei $\gamma = \alpha - \beta$ und $b'_\gamma = \alpha_i b_\alpha$. Da $\partial_i Q(x) \equiv 0$ und $\partial_i Q$ ein Polynom des Grades $\leq k-1$ ist, so erhalten wir nach der Induktionsvoraussetzung, dass $b'_\gamma = 0$ für alle γ, woraus folgt, dass $b_\alpha = 0$ für alle α mit $\alpha_i \geq 1$. Da i beliebig ist, so erhalten wir $b_\alpha = 0$ für alle $\alpha \neq 0$. Für $\alpha = 0$ gilt $b_0 = Q(0) = 0$ auch. Somit sind alle b_α gleich 0, was zu beweisen war. ■

15.9.2 Satz von der impliziten Funktion

Beweis von dem Satz 15.14. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, dass $a = 0$ in $\mathbb{R}^n$ und $b = 0$ in $\mathbb{R}^m$. In den Vektorräumen $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^m$, $\mathbb{R}^{n+m}$ wählen wir die ∞-Norm. Da F in 0 differenzierbar ist und $F(0) = 0$, so haben wir

$$F(h) = F'(0)\, h + \varphi(h), \tag{15.57}$$

wobei die Funktion $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^m$ erfüllt

$$\varphi(h) = o(\|h\|) \text{ für } h \to 0.$$

We behaupten, dass

$$\varphi \in C^l(\Omega, \mathbb{R}^m), \quad \varphi(0) = 0, \quad \varphi'(0) = 0. \tag{15.58}$$

In der Tat, es folgt aus (15.57), dass

$$\varphi(h) = F(h) - F'(0)\, h,$$

woraus die ersten zwei Eigenschaften in (15.58) folgen. Da

$$\varphi'(h) = F'(h) - F'(0),$$

so erhalten wir auch $\varphi'(0) = 0$.

Da $h \in \mathbb{R}^{n+m}$, so bezeichnen wir $h = (x, y)$ mit $x \in \mathbb{R}^n$ und $y \in \mathbb{R}^m$. Setzen wir

$$A = \partial_x F(0) \quad \text{und} \quad B = \partial_y F(0).$$

Dann gilt

$$F'(0) = (A \mid B)$$

und

$$F'(0)\, h = (A \mid B) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = Ax + By.$$

Somit erhalten wir aus (15.57)

$$F(x, y) = Ax + By + \varphi(x, y). \tag{15.59}$$

Die Gleichung $F(x, y) = 0$ lässt sich wie folgt umschreiben:

$$Ax + By + \varphi(x, y) = 0.$$

Da die Matrix B invertierbar ist, so ist diese Gleichung äquivalent zu

$$y = -B^{-1}(Ax + \varphi(x, y)).$$

Setzen wir

$$G(x, y) = -B^{-1}(Ax + \varphi(x, y)) \tag{15.60}$$

und erhalten die folgende Äquivalenz:

$$F(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = G(x, y).$$

Die weitere Idee von Beweis ist, dass die Abbildung $y \mapsto G(x, y)$ für jedes x in der Nähe von 0 in $\mathbb{R}^n$ eine Kontraktionsabbildung in der Nähe von 0 in $\mathbb{R}^m$ ist. Nach dem Fixpunktsatz von Banach können wir daraus beschließen, dass diese Abbildung einen Fixpunkt hat, dass heißt, die Gleichung $y = G(x, y)$ bezüglich y lösbar ist, was y als eine Funktion von x liefert. Um diese Idee rigoros zu machen, wir müssen den Definitionsbereich der Abbildung $y \mapsto G(x, y)$ bestimmen, wo diese Abbildung eine Selbstabbildung und auch eine Kontraktion ist. Darüber hinaus soll der Definitionsbereich ein vollständiger metrischer Raum sein.

Die Funktion $G(x, y)$ erfüllt die folgenden Eigenschaften:

$$G \in C^l(\Omega, \mathbb{R}^m), \; G(0) = 0, \quad \partial_y G(0) = 0,$$

die trivial aus (15.58) und (15.60) folgen. Wählen wir hinreichend kleine positive Konstanten ε und δ aus den folgenden Bedingungen (i)-(iii).

(i) Da alle partielle Ableitungen $\partial_{y_i} G_j$ stetig sind und in 0 verschwinden, so gilt für hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ die Eigenschaft:

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \forall y \in \mathbb{R}^m \text{ mit } \|x\| \le \varepsilon, \; \|y\| \le \varepsilon \;\text{ gilt }\; (x, y) \in \Omega \text{ und } \left|\partial_{y_i} G_j(x, y)\right| \le \frac{1}{2m} \tag{15.61}$$

für alle i, j.

(ii) Da $\det \partial_y F$ stetig ist und $\det \partial_y F(0) \neq 0$ nach der Invertierbarkeit von $\partial_y F(0)$, so gilt für hinreichend kleines ε auch die folgende Eigenschaft:

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \ \forall y \in \mathbb{R}^m \text{ mit } \|x\| \leq \varepsilon, \ \|y\| \leq \varepsilon \text{ ist } \partial_y F(x,y) \text{ invertierbar.} \tag{15.62}$$

(iii) Da die Funktion $x \mapsto G(x,0)$ stetig ist und $G(0,0) = 0$, so existiert für jedes $\varepsilon > 0$ (insbesondere für ε wie in (15.61) und (15.62)) ein $\delta \in (0, \varepsilon]$ mit

$$\forall x \in \mathbb{R}^m \text{ mit } \|x\| \leq \delta \text{ gilt } \|G(x,0)\| < \frac{1}{2}\varepsilon. \tag{15.63}$$

Da $\delta \leq \varepsilon$ so liegt der Punkt $(x,0)$ in Ω und somit ist $G(x,0)$ wohldefiniert.

Bezeichnen wir mit U und V die folgenden Kugeln

$$U = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < \delta\}, \ V = \{y \in \mathbb{R}^m : \|y\| < \varepsilon\}$$

und betrachten auch die abgeschlossenen Kugeln

$$\overline{U} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq \delta\}, \ \ \overline{V} = \{y \in \mathbb{R}^m : \|y\| \leq \varepsilon\}.$$

Nach der Wahl von ε und δ gilt $\overline{U} \times \overline{V} \subset \Omega$. Der weitere Beweis wird schrittweise durchgeführt.

Schritt 1. *Zeigen wir, dass für alle $x \in \overline{U}$ und $y, y' \in \overline{V}$ gilt*

$$\|G(x,y) - G(x,y')\| \leq \frac{1}{2}\|y - y'\|. \tag{15.64}$$

Nach dem Mittelwertsatz erhalten wir für jede Komponente G_j of G und für ein $\xi \in [y, y']$, dass

$$\begin{aligned} |G_j(x,y) - G_j(x,y')| &= |\partial_y G_j(x,\xi)(y - y')| \\ &= \left| \sum_{i=1}^m \partial_{y_i} G_j(x,\xi)(y_i - y_i') \right| \leq \frac{1}{2m} m \|y - y'\|_\infty, \end{aligned}$$

woraus (15.64) folgt. Hier haben wir (15.61) benutzt, was die Konstante $\frac{1}{2m}$ in (15.61) erklärt.

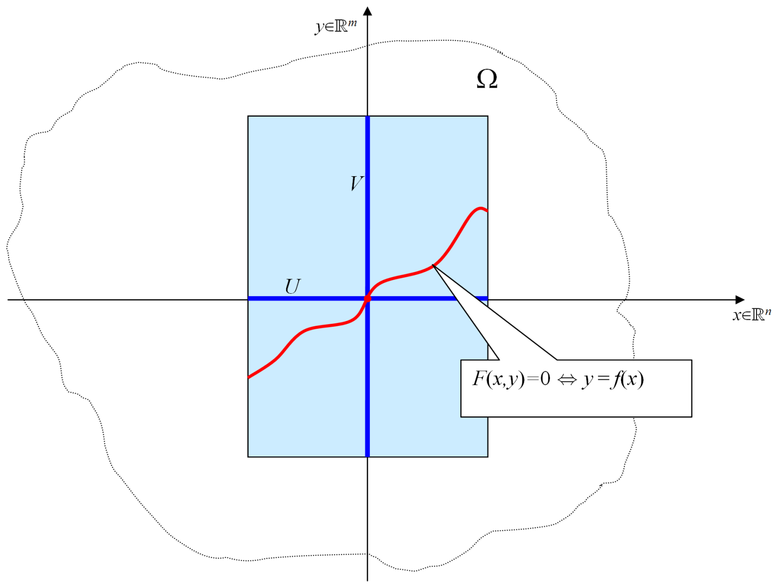
Schritt 2. *Zeigen wir, dass für alle $x \in \overline{U}$ und $y \in \overline{V}$ gilt $G(x,y) \in V$.*

We erhalten mit Hilfe von (15.64) und (15.63)

$$\|G(x,y)\| \leq \|G(x,y) - G(x,0)\| + \|G(x,0)\| < \frac{1}{2}\|y\| + \frac{1}{2}\varepsilon \leq \varepsilon.$$

Schritt 3. *Beweisen wir, dass es eine Funktion $f : \overline{U} \to \overline{V}$ gibt, so dass*

$$y = f(x) \Leftrightarrow F(x,y) = 0 \ \ \textit{für alle } x \in \overline{U} \textit{ und } y \in \overline{V}. \tag{15.65}$$



Funktion f

Für jedes $x \in \overline{U}$ betrachten wir die Selbstabbildung von $\overline{V}$

$$\overline{V} \ni y \mapsto G(x, y) \in \overline{V},$$

die nach Schritt 2 wohldefiniert ist. Die Menge $\overline{V}$ ist eine abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{R}^m$ und somit ist ein vollständiger metrischer Raum (siehe Aufgabe). Nach (15.64) ist diese Abbildung eine Kontraktion. Nach dem Fixpunktsatz von Banach (Satz 14.15) gibt es genau einen Fixpunkt dieser Abbildung, den wir mit $f(x)$ bezeichnen. Diese Funktion ist für jedes $x \in \overline{U}$ definiert und nimmt die Werte in $\overline{V}$ an. Nach Definition von f erhalten wir, dass für $x \in \overline{U}$ und $y \in \overline{V}$ die Gleichung $G(x, y) = y$ äquivalent zu $y = f(x)$ ist. Da $G(x, y) = y$ äquivalent zu $F(x, y) = 0$ ist, so erhalten wir (15.65).

Schritt 4. *Beweisen wir: es gibt eine Konstante C mit*

$$\|f(x) - f(x')\| \leq C\|x - x'\| \text{ für alle } x, x' \in \overline{U}. \tag{15.66}$$

Die Funktionen, die (15.66) erfüllen, heißen *Lipschitz-stetig*. Es ist klar, dass eine Lipschitz-stetige Funktion auch stetig ist. Insbesondere ist die Funktion f stetig in $\overline{U}$.

Es folgt aus der Identität $f(x) = G(x, f(x))$, dass

$$\begin{aligned} \|f(x) - f(x')\| &= \|G(x, f(x)) - G(x', f(x'))\| \\ &\leq \|G(x, f(x)) - G(x', f(x))\| \\ &\quad + \|G(x', f(x)) - G(x', f(x'))\|. \end{aligned} \tag{15.67}$$

Nach (15.64) gilt

$$\|G(x', f(x)) - G(x', f(x'))\| \leq \frac{1}{2}\|f(x) - f(x')\|.$$

Um den ersten Glied in (15.67) abzuschätzen, benutzen wir für jede Komponente G_j von G den Mittelwertsatz: es gibt ein $\xi \in [x, x']$ mit

$$G_j(x, f(x)) - G_j(x', f(x)) = \partial_x G_j(\xi, f(x))(x - x') = \sum_{i=1}^{n} \partial_{x_i} G_j\left(\xi_j, f(x)\right)(x_i - x_i').$$

Da die Funktion $\partial_{x_i} G_j(x, y)$ stetig ist, so ist sie nach dem Extremwertsatz beschränkt auf $\overline{U} \times \overline{V}$, da diese Menge beschränkt und abgeschlossen ist. Also, es existiert eine Konstante M mit $|\partial_{x_i} G_j(x, y)| \le M$ für alle $x \in \overline{U}$, $y \in \overline{V}$ alle i, j, woraus folgt

$$|G_j(x, f(x)) - G_j(x', f(x))| \le Mn\|x - x'\|$$

und somit

$$\|G(x', f(x)) - G(x', f(x'))\| \le Mn\|x - x'\|.$$

Es folgt aus (15.67) dass

$$\|f(x) - f(x')\| \le Mn\|x - x'\| + \frac{1}{2}\|f(x) - f(x')\|,$$

was (15.66) mit $C = 2Mn$ ergibt.

Schritt 5. *Beweisen wir: die Funktion $f : U \to \mathbb{R}^m$ ist in U differenzierbar und*

$$f'(x) = -\left(\partial_y F\right)^{-1} \partial_x F(x, f(x)). \tag{15.68}$$

Fixieren wir ein $x_0 \in U$ und beweisen, dass f differenzierbar in x_0 ist. Setzen wir $y_0 = f(x_0)$. Nach der Differenzierbarkeit von F in (x_0, y_0) gilt

$$F(x, y) - F(x_0, y_0) = A(x - x_0) + B(y - y_0) + \varphi(x, y) \tag{15.69}$$

mit

$$A = \partial_x F(x_0, y_0), \quad B = \partial_y F(x_0, y_0)$$

und

$$\varphi(x, y) = o(\|x - x_0\| + \|y - y_0\|) \text{ für } x \to x_0 \text{ und } y \to y_0. \tag{15.70}$$

Wir benutzen (15.69) mit $x \in U$ und $y = f(x)$. Nach Definition von f haben wir

$$F(x, y) = F(x_0, y_0) = 0. \tag{15.71}$$

Nach (15.62) ist die Matrix B invertierbar. Es folgt aus (15.69) und (15.71), dass

$$f(x) - f(x_0) = y - y_0 = -B^{-1} A(x - x_0) - B^{-1} \varphi(x, f(x)). \tag{15.72}$$

Um die Differenzierbarkeit von f in x_0 daraus zu gewinnen, reicht es zu zeigen, dass

$$B^{-1} \varphi(x, f(x)) = o(\|x - x_0\|) \text{ für } x \to x_0.$$

Da die Norm der Matrix B^{-1} endlich ist, so reicht es zu beweisen, dass

$$\varphi(x, f(x)) = o(\|x - x_0\|) \text{ für } x \to x_0. \tag{15.73}$$

Nach (15.70) haben wir

$$\varphi(x, f(x)) = o(\|x - x_0\| + \|f(x) - f(x_0)\|) \text{ für } x \to x_0,$$

woraus (15.73) folgt, da nach (15.66)

$$\|f(x) - f(x_0)\| \le C\|x - x_0\|.$$

Es folgt aus (15.72), dass

$$f'(x_0) = -B^{-1}A = -\partial_y F(x_0, f(x_0))^{-1} \partial_x F(x_0, f(x_0)).$$

Schritt 6. *Beweisen wir, dass* $f \in C^l(U, \mathbb{R}^m)$.

Induktionsanfang für $l = 1$. Da die Funktion f und alle partiellen Ableitungen von F stetig sind, so es folgt aus (15.68), dass auch $f'(x)$ stetig ist, woraus $f \in C^1$ folgt.

Induktionsschritt von $l - 1$ nach l. Beweisen wir, dass $F \in C^l$ ergibt $f \in C^l$. Nach der Induktionsvoraussetzung gilt $f \in C^{l-1}$. Da $\partial_x F$ und $\partial_y F$ von der Klasse C^{l-1} sind, so folgt es aus (15.68), dass $f' \in C^{l-1}$, woraus $f \in C^l$ folgt. ■

15.9.3 Satz von der inversen Funktion

Beweis von dem Satz 15.15. Setzen wir

$$F(x, y) = y - f(x),$$

so dass die Gleichung $y = f(x)$ äquivalent zu

$$F(x, y) = 0$$

ist. Die Funktion $F(x, y)$ ist für alle $(x, y) \in \Omega := W \times \mathbb{R}^n$ definiert und nimmt die Werte in $\mathbb{R}^n$ an. Offensichtlich haben wir $F \in C^l(\Omega, \mathbb{R}^n)$.

Mit Hilfe von dem Satz von der impliziten Funktion (Satz 15.14) lösen wir die Gleichung $F(x, y) = 0$ bezüglich x und somit erhalten x als Funktion von y. Dafür brauchen wir die Invertierbarkeit von $\partial_x F$ in einem Punkt. Offensichtlich haben wir

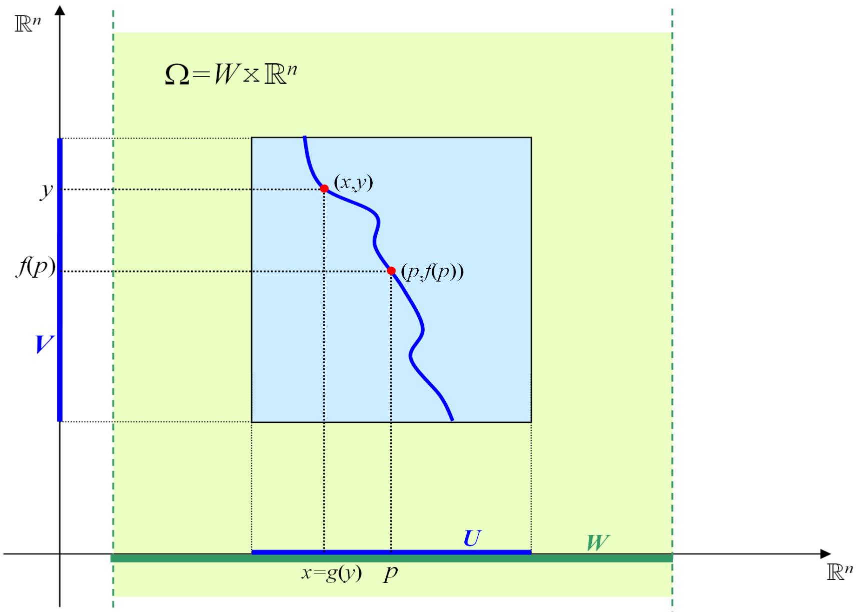
$$\partial_x F(x, y) = -f'(x).$$

Da $f'(p)$ invertierbar, so erhalten wir, dass $\partial_x F(p, f(p))$ invertierbar. Da auch $F(p, f(p)) = 0$, so erhalten wir nach dem Satz 15.14 folgendes: es gibt die Umgebungen $U \subset W$ von p und $V \subset \mathbb{R}^n$ von $f(p)$ und eine Funktion $g : V \to U$ von der Klasse C^l mit

$$F(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = g(y) \text{ für alle } x \in U \text{ und } y \in V,$$

d.h.

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = g(y) \text{ für alle } x \in U \text{ und } y \in V. \tag{15.74}$$



Funktion $g : V \to U$

Weiter bestimmen wir $f \circ g$ und $g \circ f$. Für jedes $y \in V$ setzen wir $x = g(y)$. Da $x \in U$, so erhalten aus (15.74) $f(g(y)) = f(x) = y$, d.h.

$$f \circ g = \mathrm{Id}_V\,. \tag{15.75}$$

Allerdings $g \circ f$ ist nicht unbedingt gleich Id_U . Für jedes $x \in U$ setzen wir $y = f(x)$. Es ist uns nicht gegeben, dass $f(x) \in V$. Im Fall $f(x) \in V$ gilt $y \in V$ und wir erhalten aus (15.74), dass

$$g(f(x)) = x \ \text{ für alle } x \in U \text{ mit } \ f(x) \in V.$$

Die zusätzliche Bedingung $f(x) \in V$ ist äquivalent zu $x \in f^{-1}(V)$ wobei f^{-1} hier die Urbildabbildung ist. Somit erhalten wir

$$g(f(x)) = x \ \text{ für alle } x \in U \cap f^{-1}(V) =: U_0. \tag{15.76}$$

Da f stetig ist, so ist die Menge $f^{-1}(V)$ offen und somit ist U_0 auch offen. Wir haben auch $p \in U_0$ da $p \in U$ und $f(p) \in V$.

Bemerken wir, dass das Bild von g in U_0 liegt da nach (15.75) $f(g(V)) = V$, woraus folgt $g(V) \subset f^{-1}(V)$ und somit $g(V) \subset f^{-1}(V) \cap U = U_0$. Es folgt, dass die Bedingung (15.74) auch für U_0 anstatt U gilt. Dann erhalten wir aus (15.76)

$$g \circ f = \mathrm{Id}_{U_0},$$

was zusammen mit (15.75) ergibt, dass $g : V \to U_0$ die inverse Funktion von $f : U_0 \to V$ ist. Es bleibt nur U_0 in U umbenennen.

Um (15.46) zu beweisen, leiten wir die Identität $f \circ g = \mathrm{Id}_V$ ab. Nach der Kettenregel gilt für jedes $y \in V$

$$\mathrm{id} = (f \circ g)' = f'(x)\, g'(y)\,,$$

wobei $x = g(y) = f^{-1}(y)$, was $g'(y) = f'(x)^{-1}$ ergibt. $\blacksquare$

15.10 Parameterintegral

Satz 15.16 *Sei $g(x,y)$ eine stetige Funktion auf $I \times J$ wobei I und $J = [\alpha, \beta]$ zwei kompakte Intervalle in $\mathbb{R}$ sind.*

(a) Dann ist die Funktion

$$f(x) = \int_\alpha^\beta g(x,y)\,dy$$

stetig für alle $x \in I$.

(b) Nehmen wir an, dass die partielle Ableitung $\partial_x g$ existiert und stetig auf $I \times J$ ist. Dann ist die Funktion f differenzierbar auf I und für alle $x \in I$ gilt

$$f'(x) = \int_\alpha^\beta \partial_x g(x,y)\,dy. \tag{15.77}$$

Die Identität (15.77) lässt sich wie folgt umschreiben:

$$\partial_x \int_\alpha^\beta g(x,y)\,dy = \int_\alpha^\beta \partial_x g(x,y)\,dy$$

so dass die Operationen ∂_x und $\int dy$ vertauschbar sind.

Beweis. (a) Da $g(x,y)$ stetig in $I \times J$ ist, so ist g nach dem Satz 14.25 gleichmäßig stetig in $I \times J$. Sei $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in I mit $\lim x_k = x \in I$. Es folgt, dass

$$g(x_k, y) \to g(x,y) \text{ für } k \to \infty,$$

und zwar die Konvergenz gleichmäßig bezüglich $y \in J$ ist. Nach dem Satz 13.8 erhalten wir $f(x_k) \to f(x)$, so dass f stetig ist.

(b) Fixieren wir ein $x \in I$ und beweisen, dass

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \to \int_\alpha^\beta \partial_x g(x,y)\,dy \text{ für } h \to 0,$$

was äquivalent zu

$$\int_\alpha^\beta \frac{g(x+h,y) - g(x,y)}{h}dy \to \int_\alpha^\beta \partial_x g(x,y)\,dy \tag{15.78}$$

für $h \to 0$ ist. Wir haben für alle $y \in [\alpha, \beta]$

$$\frac{g(x+h,y) - g(x,y)}{h} \to \partial_x g(x,y) \text{ für } h \to 0. \tag{15.79}$$

Wir werden beweisen, dass die Konvergenz in (15.79) gleichmäßig bezüglich $y \in [\alpha, \beta]$ ist, woraus (15.78) nach dem Satz 13.8 folgen wird. Die gleichmäßige Konvergenz bedeutet in diesem Fall, dass

$$\sup_{y\in J} \left| \frac{g(x+h,y) - g(x,y)}{h} - \partial_x g(x,y) \right| \to 0 \quad \text{für } h \to 0. \tag{15.80}$$

Nach dem Mittelwertsatz gibt es ein $\xi = \xi(y) \in [x, x+h]$ mit

$$g(x+h, y) - g(x, y) = \partial_x g(\xi, y)\, h.$$

Da die Funktion $\partial_x g$ stetig auf $I \times J$ ist, so ist sie auch gleichmäßig stetig, d.h. für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ so dass

$$\begin{gathered} x_1, x_2 \in I,\ \ |x_1 - x_2| < \delta \text{ und } \forall y_1, y_2 \in J,\ |y_1 - y_2| < \delta \\ \Downarrow \\ |\partial_x g(x_1, y_1) - \partial_x g(x_2, y_2)| < \varepsilon \end{gathered} \tag{15.81}$$

Gilt $|h| < \delta$ so gilt auch $|x - \xi| < \delta$ und somit nach (15.81)

$$|\partial_x g(\xi, y) - \partial_x g(x, y)| < \varepsilon \ \text{ für alle } y \in J.$$

Es folgt, dass für alle $y \in J$

$$\left| \frac{g(x+h, y) - g(x, y)}{h} - \partial_x g(x, y) \right| = |\partial_x g(\xi, y) - \partial_x g(x, y)| < \varepsilon,$$

woraus (15.80) folgt. ■

Beispiel. Leiten wir die folgende Funktion ab:

$$f(x) = \int_1^2 \frac{\ln(x+y)}{y} dy$$

wobei $x \in (0, +\infty)$. Nach dem Satz 15.16 erhalten wir

$$\begin{aligned} f'(x) &= \int_1^2 \partial_x \frac{\ln(x+y)}{y} dy = \int_1^2 \frac{dy}{(x+y)\, y} \\ &= \frac{1}{x} \int_1^2 \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x+y} \right) dy \\ &= \frac{1}{x} \left[\ln \frac{y}{x+y} \right]_{y=1}^{y=2} \\ &= \frac{1}{x} \ln \frac{2(x+1)}{x+2}. \end{aligned}$$

Satz 15.17 *Sei $g(x, y)$ eine stetige Funktion auf $I \times J$ wobei I ein beliebiges Intervall ist und $J = (\alpha, \beta)$ mit $-\infty \le \alpha < \beta \le +\infty$.*

(a) Gilt

$$\int_\alpha^\beta \sup_{x \in I} |g(x, y)|\, dy < \infty, \tag{15.82}$$

so ist die Funktion

$$f(x) = \int_\alpha^\beta g(x, y)\, dy$$

stetig für alle $x \in I$.

(*b*) *Zusätzlich nehmen wir an, dass die partielle Ableitung $\partial_x g$ existiert und stetig auf $I \times J$ ist und dass*

$$\int_\alpha^\beta \sup_{x \in I} |\partial_x g(x,y)|\, dy < \infty. \tag{15.83}$$

Dann ist die Funktion f differenzierbar auf I und für alle $x \in I$ gilt

$$f'(x) = \int_\alpha^\beta \partial_x g(x,y)\, dy.$$

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass das Intervall I kompakt ist, da die Stetigkeit und Differenzierbarkeit von f in x nur von f in der Nähe von x abhängen. Wählen wir a, b mit $\alpha < a < b < \beta$.

(*a*) Sei $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in I mit $\lim x_k = x \in I$. Wir haben

$$\begin{aligned} f(x_k) - f(x) &= \int_\alpha^\beta (g(x_k,y) - g(x,y))\, dy \\ &= \int_a^b (g(x_k,y) - g(x,y))\, dy + \left(\int_\alpha^a + \int_b^\beta\right)(g(x_k,y) - g(x,y))\, dy. \end{aligned}$$

Das erste Integral konvergiert gegen 0 nach dem Satz 15.16. Für das zweite Integral gilt

$$\left|\left(\int_\alpha^a + \int_b^\beta\right)(g(x_k,y) - g(x,y))\, dy\right| \le 2\left(\int_\alpha^a + \int_b^\beta\right) \sup_{\xi \in I} |g(\xi,y)|\, dy.$$

Nach (15.82) kann die rechte Seite aufgrund der Wahl von a, b beliebig klein gemacht werden, woraus folgt $f(x_k) \to f(x)$ für $k \to \infty$.

(*b*) Wir haben

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \int_\alpha^\beta \frac{g(x+h,y) - g(x,y)}{h} dy \\ &= \int_a^b \frac{g(x+h,y) - g(x,y)}{h} dy \qquad (15.84) \\ &\quad + \left(\int_\alpha^a + \int_b^\beta\right) \frac{g(x+h,y) - g(x,y)}{h} dy. \qquad (15.85) \end{aligned}$$

Das Integral (15.84) konvergiert für $h \to 0$ gegen

$$\int_a^b \partial_x g(x,y)\, dy$$

nach dem Satz 15.16. Andererseits gilt

$$\int_a^b \partial_x g(x,y)\, dy = \int_\alpha^\beta \partial_x g(x,y)\, dy - \left(\int_\alpha^a + \int_b^\beta\right) \partial_x g(x,y)\, dy.$$

Für das Integral (15.85) bemerken wir zuerst, dass nach dem Mittelwertsatz

$$\frac{g(x+h,y) - g(x,y)}{h} = \partial_x g(\xi,y)$$

für ein ξ zwischen x und $x+h$, woraus folgt

$$\left|\frac{g(x+h,y)-g(x,y)}{h}\right| \leq \sup_{\xi\in I}|\partial_x g(\xi,y)|,$$

wobei die rechte Seite unabhängig von h ist. Es folgt, dass

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-\int_\alpha^\beta \partial_x g(x,y)\,dy\right| \\
\leq\ & \left|\int_a^b \frac{g(x+h,y)-g(x,y)}{h}dy-\int_a^b \partial_x g(x,y)\,dy\right| \\
&+\left(\int_\alpha^a+\int_b^\beta\right)|\partial_x g(x,y)|\,dy \\
&+\left(\int_\alpha^a+\int_b^\beta\right)\left|\frac{g(x+h,y)-g(x,y)}{h}\right|dy \\
\leq\ & \left|\int_a^b \frac{g(x+h,y)-g(x,y)}{h}dy-\int_a^b \partial_x g(x,y)\,dy\right| \qquad (15.86)\\
&+2\left(\int_\alpha^a+\int_b^\beta\right)\sup_{\xi\in I}|\partial_x g(\xi,y)|\,dy. \qquad (15.87)
\end{aligned}$$

Das Integral (15.87) kann nach (15.83) aufgrund der Wahl von a,b beliebig klein gemacht werden, und zwar unabhängig von h, wohingegen der Ausdruck (15.86) konvergiert gegen 0 für $h\to 0$ nach dem Satz 15.16. Somit erhalten wir, dass

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\int_\alpha^\beta \partial_x g(x,y)\,dy,$$

was zu beweisen war. ■

Beispiel. Betrachten wir die Funktion

$$f(x)=\int_0^\infty e^{-xy}\frac{\sin y}{y}dy$$

und beweisen, dass f in $x\in(0,+\infty)$ differenzierbar ist und

$$f'(x)=\int_0^\infty \partial_x e^{-xy}\frac{\sin y}{y}dy.$$

Es reicht dies für $x\in(\varepsilon,+\infty)$ für jedes $\varepsilon>0$ zu beweisen. Dafür überprüfen wir die Bedingungen (15.82) und (15.83) in $I=(\varepsilon,+\infty)$. Da $|\sin y|\leq y$ und $|\sin y|\leq 1$, so erhalten wir

$$\int_0^\infty \sup_{x\in(\varepsilon,+\infty)}\left|e^{-xy}\frac{\sin y}{y}\right|dy \leq \int_0^\infty \sup_{x\in(\varepsilon,+\infty)}\left|e^{-xy}\right|dy=\int_0^\infty e^{-\varepsilon y}dy=\frac{1}{\varepsilon}<\infty$$

und

$$\int_0^\infty \sup_{x\in(\varepsilon,+\infty)}\left|\partial_x e^{-xy}\frac{\sin y}{y}\right|dy=\int_0^\infty \sup_{x\in(\varepsilon,+\infty)}\left|e^{-xy}\sin y\right|dy \leq \int_0^\infty e^{-\varepsilon y}dy<\infty.$$

Nach dem Satz 15.17 erhalten wir, für alle $x > 0$,

$$f'(x) = \int_0^\infty \partial_x e^{-xy} \frac{\sin y}{y} dy = -\int_0^\infty e^{-xy} \sin y dy.$$

Mit Hilfe von partieller Integration erhält man

$$\int_0^\infty e^{-xy} \sin y \, dy = \frac{1}{x^2+1}$$

(siehe Aufgabe 59 (iii)), so dass

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2+1}.$$

Es folgt, dass für alle $x > 0$ gilt

$$f(x) = -\int \frac{dx}{x^2+1} = C - \arctan x. \tag{15.88}$$

Da $\left|\frac{\sin y}{y}\right| \leq 1$ und somit

$$|f(x)| \leq \int_0^\infty e^{-xy} dy = \frac{1}{x},$$

so erhalten wir

$$f(x) \to 0 \quad \text{für} \quad x \to +\infty.$$

So folgt aus (15.88), dass

$$C = \arctan(+\infty) = \pi/2$$

und somit, für alle $x > 0$,

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan x = \arctan \frac{1}{x},$$

d.h.

$$\boxed{\int_0^\infty e^{-xy} \frac{\sin y}{y} dy = \arctan \frac{1}{x}} \tag{15.89}$$

Z.B. für $x = 1$ erhalten wir

$$\int_0^\infty e^{-y} \frac{\sin y}{y} dy = \frac{\pi}{4},$$

und für $x = \sqrt{3}$ gilt

$$\int_0^\infty e^{-\sqrt{3}y} \frac{\sin y}{y} dy = \frac{\pi}{6}.$$

21.07.21 Vorlesung 28

Beispiel. Mit Hilfe von (15.89) beweisen wir noch einmal den Satz 12.15, d.h.

$$\int_0^\infty \frac{\sin y}{y} dy = \frac{\pi}{2}.$$

Wir werden beweisen, dass

$$\int_0^\infty \frac{\sin y}{y} dy = \lim_{x\to 0+} \int_0^\infty e^{-xy} \frac{\sin y}{y} dy. \tag{15.90}$$

Für $x \to 0+$ erhalten wir aus (15.89) und (15.90), dass

$$\int_0^\infty \frac{\sin y}{y} dy = \lim_{x\to 0} \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}.$$

Für jedes $a \in (0, +\infty)$ haben wir nach dem Satz 15.16(a)

$$\lim_{x\to 0+} \int_0^a e^{-xy} \frac{\sin y}{y} dy = \int_0^a \frac{\sin y}{y} dy.$$

Wir zeigen, dass

$$\sup_{x>0} \left| \int_a^\infty e^{-xy} \frac{\sin y}{y} dy \right| \to 0 \text{ für } a \to \infty. \tag{15.91}$$

Ist (15.91) schon bekannt, so beweisen wir (15.90) wie folgt. Bemerken zuerst, dass

$$\left| \int_0^\infty e^{-xy} \frac{\sin y}{y} dy - \int_0^\infty \frac{\sin y}{y} dy \right| \leq \left| \int_0^a \left(e^{-xy} \frac{\sin y}{y} - \frac{\sin y}{y} \right) dy \right| \tag{15.92}$$

$$+ \left| \int_a^\infty e^{-xy} \frac{\sin y}{y} dy \right| + \left| \int_a^\infty \frac{\sin y}{y} dy \right|. \tag{15.93}$$

Fixieren wir ein $\varepsilon > 0$ und wählen a so groß dass

$$\sup_{x>0} \left| \int_a^\infty e^{-xy} \frac{\sin y}{y} dy \right| < \varepsilon \quad \text{und} \quad \left| \int_a^\infty \frac{\sin y}{y} dy \right| < \infty,$$

was nach (15.91) und nach der Konvergenz des Dirichlet-Integrals möglich ist. Da die rechte Seite von (15.92) gegen 0 für $x \to 0+$ konvergiert, so erhalten wir, dass

$$\limsup_{x\to 0+} \left| \int_0^\infty e^{-xy} \frac{\sin y}{y} dy - \int_0^\infty \frac{\sin y}{y} dy \right| \leq 2\varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig ist, so erhalten wir (15.90).

Um (15.91) zu beweisen verwenden wir die Ungleichung (12.30) die im Beweis des Satzes 12.12 bewiesen wurde. Setzen wir

$$f(y) = \frac{\sin y}{y}, \quad g(y) = e^{-xy}$$

und, für ein $a > 0$,

$$F_a(y) = \int_a^y f(t)\, dt = \int_a^y \frac{\sin t}{t} dt$$

Diese Funktionen erfüllen die Bedingungen des Dirichlet-Kriteriums (Satz 12.12(b)): $g(y)$ ist stetig differenzierbar, monoton, $g(y) \to 0$ für $y \to +\infty$ und $F_a(y)$ ist beschränkt. Somit erhalten wir nach (12.30)

$$\left| \int_a^\infty e^{-xy} \frac{\sin y}{y} dy \right| = \left| \int_a^\infty f(y)\, g(y)\, dy \right| \leq \sup_{y\in[a,\infty)} |F_a(y)|\, |g(a)|\,. \tag{15.94}$$

Es folgt aus der Konvergenz des Dirichlet-Integrals dass

$$\sup_{y\in[a,\infty)} |F_a(y)| = \sup_{y\in[a,\infty)} \left| \int_0^y f(t)\, dt - \int_0^a f(t)\, dt \right| \to 0 \quad \text{für } a \to \infty.$$

Da $|g(a)| \leq 1$, so folgt (15.91) aus (15.94).

Chapter 16

Flächen in $\mathbb{R}^n$

Es gibt die folgenden zwei Wege um einen Unterraum von $\mathbb{R}^n$ zu bestimmen.

Für jede lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ ist das Bild

$$\operatorname{im} A = \{Au : u \in \mathbb{R}^m\}$$

ein Unterraum von $\mathbb{R}^n$. Man sagt, dass der Unterraum $S = \operatorname{im} A$ durch die *parametrische* Gleichung $v = Au$ gegeben wird, was folgendes bedeutet: jeder Punkt $v \in S$ lässt sich als $v = Au$ mit $u \in \mathbb{R}^m$ darstellen. Der Punkt u heißt *Parameter.* Wir haben

$$\dim S = \dim \operatorname{im} A = \operatorname{rg} A,$$

da die linear unabhängigen Spalten von A eine Basis in $\operatorname{im} A$ liefern und der Rang $\operatorname{rg} A$ gleich die maximale Anzahl von den linear unabhängigen Spalten (oder Zeilen) der Matrix A ist.

Für jede lineare Abbildung $B : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ ist der Kern

$$\ker B = \{x \in \mathbb{R}^n : Bx = 0\}$$

ein Unterraum von $\mathbb{R}^n$. Man sagt, dass der Unterraum $S = \ker B$ durch die Gleichung $Bx = 0$ gegeben wird. Nach dem Rangsatz gilt

$$\dim S = \dim \ker B = n - \operatorname{rg} B.$$

Es ist leicht zu sehen, dass jeder Unterraum von $\mathbb{R}^n$ sich in den beiden Formen darstellen lässt: sowohl parametrisch wie als Kern.

16.1 Parametrische Gleichung einer Fläche

Seien M eine Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ und m eine ganze Zahl zwischen 1 und n.

Definition. Die Menge M heißt *m-dimensionale Fläche* wenn es eine offene Menge $U \subset \mathbb{R}^m$ und eine Abbildung $f : U \to \mathbb{R}^n$ gibt, so dass gilt:

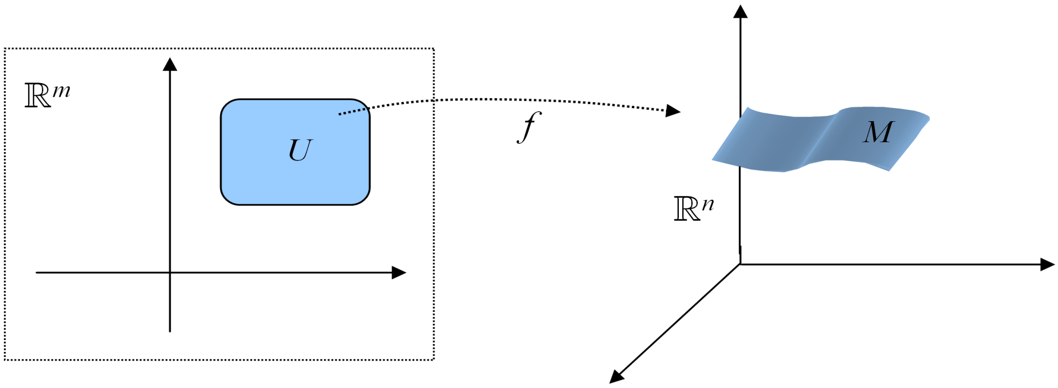
1. $M = f(U)$;

2. f ist injektiv;

3. f ist stetig differenzierbar;

4. f' ist nichtsingulär, d.h. $\operatorname{rg} f'(u) = m$ für alle $u \in U$.

Das Paar (U, f) heißt eine *Parametrisierung* von M. Das Dreifache (M, U, f) heißt eine *parametrisierte Fläche*. Die parametrisierte Fläche gehört zur Klasse C^l wenn $f \in C^l(U, \mathbb{R}^n)$.



m-dimensionale parametrisierte Fläche (M, U, f)

Wir bezeichnen die Punkte in U mit u und nennen u Parameter. Nach Definition gilt für jeden Punkt $x \in M$ die eindeutige Darstellung $x = f(u)$ mit $u \in U$. Man sagt auch, dass M mit der *parametrischen Gleichung* $x = f(u)$ gegeben wird. Die Komponenten $u_1, ..., u_m$ von dem Parameter u heißen die *lokalen Koordinaten* von x. In ausführlicher Form sieht die parametrische Gleichung wie folgt aus:

$$\begin{cases} x_1 = f_1(u_1, .., u_m) \\ \dots \\ x_n = f_n(u_1, ..., u_m). \end{cases}$$

Die Ableitung $f' = \left(\frac{\partial f_i}{\partial u_j}\right)$ ist eine $n \times m$ Matrix (die Jacobi-Matrix) und die Bedingung $\operatorname{rg} f'(x) = m$ bedeutet, dass der Rang von $f'(u)$ an jeder Stelle $u \in U$ maximal ist.

Im Fall $m = 1$ nehmen wir an, dass U ein offenes Intervall ist. Die 1-dimensionale parametrisierte Fläche (M, U, f) ist offensichtlich eine parametrisierte Kurve.

Beispiel. (*m-dimensionale Ebene*) Sei $A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ eine lineare Abbildung oder, was äquivalent ist, eine $n \times m$ Matrix. Angenommen sei, dass $m \leq n$ und $\operatorname{rg} A = m$. Betrachten wir eine *affine* Abbildung

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n \\ f(u) &= Au + b \end{aligned}$$

wobei $b \in \mathbb{R}^n$. Die Abbildung f ist injektiv da nach dem Rangsatz

$$\dim \ker A = m - \operatorname{rg} A = 0$$

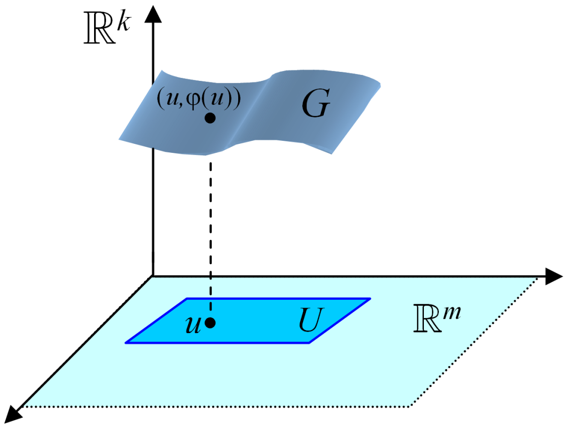
und somit $f(u_1) = f(u_2)$ ergibt $A(u_1 - u_2) = 0$ und $u_1 = u_2$. Da $f' = A$ und somit $\operatorname{rg} f' = m$, so ist die Menge $M = f(\mathbb{R}^m)$ eine m-dimensionale Fläche. Offensichtlich ist

M das Bild des Unterraums im A unter Translation $x \mapsto x+b$, d.h. M eine m-dimensionale *Ebene* ist.

Beispiel. *(Graphen)* Seien U eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^m$ und $\varphi : U \to \mathbb{R}^k$ eine stetig differenzierbare Funktion. Betrachten wir den Graph von φ

$$G = \{(u, \varphi(u)) \in \mathbb{R}^n : u \in U\}, \tag{16.1}$$

wobei das Paar $(u, \varphi(u))$ ein Element von $\mathbb{R}^n$ mit $n = m + k$ ist.



Der Graph G der Funktion φ

Lemma 16.1 *Der Graph G wie oberhalb ist eine m-dimensionale Fläche.*

Beweis. Es folgt aus (16.1), dass $G = f(U)$ wobei die Abbildung $f : U \to \mathbb{R}^n$ wie folgt definiert wird:

$$f(u) = (u, \varphi(u)).$$

Die Abbildung f ist offensichtlich injektiv und stetig differenzierbar. Es gilt

$$f'(u) = \left(\begin{array}{|c|} \hline \mathrm{id} \\ \hline \varphi'(u) \\ \hline \end{array}\right), \tag{16.2}$$

wobei id die identische $m \times m$ Matrix ist und $\varphi'(u)$ eine $k \times m$ Matrix. Da die ersten m Zeilen der Matrix $f'(u)$ linear unabhängig sind, so erhalten wir $\operatorname{rg} f'(u) = m$. Somit ist (U, f) eine Parametrisierung und G ist eine m-dimensionale Fläche. ∎

Der nächste Satz wird ohne Beweis angegeben.

Satz. *Jede m-dimensionale Fläche ist lokal der Graph einer stetig differenzierbaren Funktion.*

Im Beweis dieses Satzes wird der Satz von der impliziten Funktion benutzt und die Bedingung, dass die Parametrisierung der Fläche nichtsingulär sein soll, spielt eine wichtige Role. Dafür betrachten wir ein Beispiel.

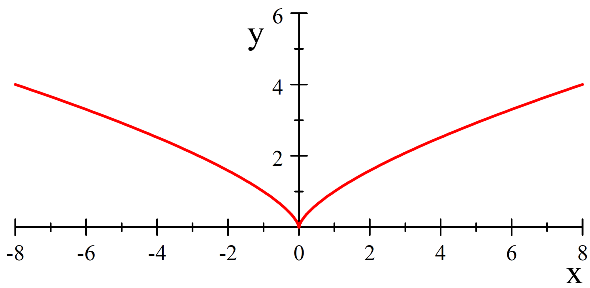
Beispiel. Die Abbildung

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \\ f(u) &= (u^3, u^2) \end{aligned}$$

erfüllt die Bedingungen 1-3 von der Definition der Parametrisierung, aber die Bedingung 4 gilt nicht im Punkt $u = 0$ da

$$f'(0) = \left(3u^2, 2u\right)|_{u=0} = (0, 0)$$

und somit $\operatorname{rg} f'(0) = 0 < 1$. Das Bild von f ist eine Kurve und sogar der Graph der Funktion $y = x^{2/3}$, aber diese Funktion ist in 0 nicht differenzierbar.



Die Kurve $f(u) = (u^3, u^2)$ ist der Graph der Funktion $y = x^{2/3}$

16.2 Tangentialebene

Definition. Seien U eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^m$ und $f : U \to \mathbb{R}^n$ eine differenzierbare Abbildung. Die *Tangentialabbildung* von f im Punkt $u \in U$ ist die folgende affine Abbildung

$$\begin{gathered} \tau : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n \\ \tau(h) = f(u) + f'(u)\, h. \end{gathered} \tag{16.3}$$

In anderen Wörtern ist $\tau(h)$ das Taylor-Polynom der Ordnung 1 der Funktion f in u. Nach der Differenzierbarkeit von f gilt

$$f(u+h) = f(u) + f'(u)\, h + o(\|h\|) = \tau(h) + o(\|h\|)$$

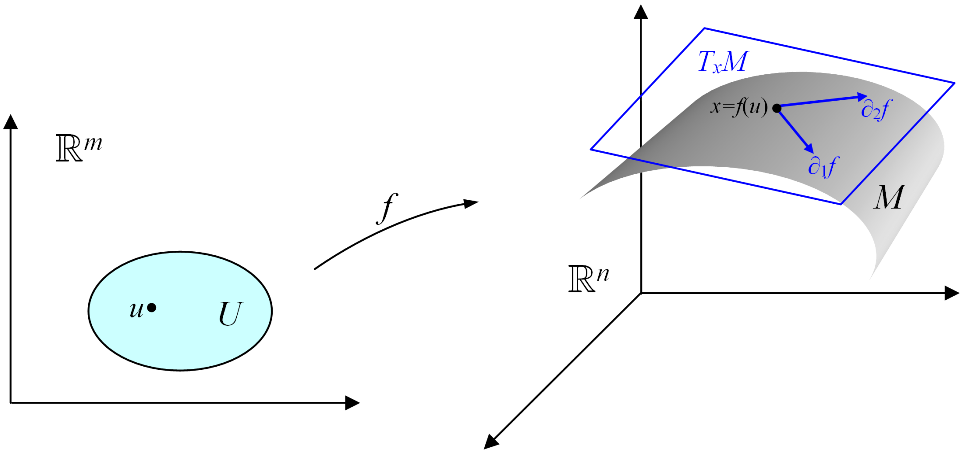
für $h \to 0$, so dass $\tau(h)$ eine affine Approximation von $f(u+h)$ für die kleinen Werte von $\|h\|$ ist.

Definition. Sei (M, U, f) eine m-dimensionale parametrisierte Fläche in $\mathbb{R}^n$. Die *Tangentialebene* T_xM an M im Punkt $x = f(u) \in M$ ist das Bild der Tangentialabbildung τ von f im Punkt u.

Es folgt aus (16.3), dass

$$\boxed{T_xM = \operatorname{im} \tau = x + \operatorname{im} f'(u)}.$$

Da $\operatorname{rg} f'(u) = m$, so ist T_xM eine m-dimensionale Ebene und $(\mathbb{R}^n, \tau)$ ist die Parametrisierung von T_xM. Die Ebene T_xM ist eine affine Approximation der Fläche M in der Nähe von x.



Tangentialebene T_xM

In Anwendungen ist es bequem die parametrische Gleichung (16.3) wie folgt darzustellen:

$$\tau(h) = f(u) + h_1\partial_1 f(u) + h_2\partial_2 f(u) + ... + h_m\partial_m f(u),$$

wobei $h_1, ..., h_m$ die Komponenten von h sind und $\partial_1 f, ..., \partial_m f$ die Spalten der Matrix f' sind, die eine Basis in im $f'(u)$ liefern.

Beispiel. Betrachten wir die Parametrisierung des Kreises

$$\begin{aligned} f &: (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2 \\ f(u) &= (\cos u, \sin u) \end{aligned}$$

Da $f'(u) = (-\sin u, \cos u)$, so ist die Tangente (=1-dimensionale Tangentialebene) wie folgt gegeben:

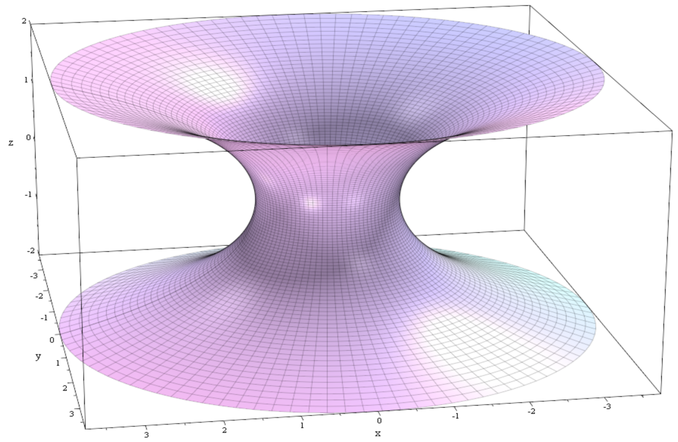
$$\begin{aligned} \tau(h) &= (\cos u, \sin u) + h(-\sin u, \cos u) \\ &= (\cos u - h\sin u, \sin u + h\cos u). \end{aligned}$$

Die Richtung $(-\sin u, \cos u)$ der Tangente ist offensichtlich orthogonal zum Radiusvektor $(\cos u, \sin u)$.

Beispiel. Betrachten wir die Parametrisierung

$$\begin{aligned} f &: U \to \mathbb{R}^3 \\ f(u, v) &= (\cosh u\cos v, \cosh u\sin v, u) \end{aligned}$$

wobei $U = \mathbb{R} \times (0, 2\pi)$, d.h. $u \in \mathbb{R}$ und $v \in (0, 2\pi)$. Die Fläche $M = \operatorname{im} f$ heißt *Katenoid.*



Katenoid

Berechnen wir die totale Ableitung:

$$f' = (\partial_u f, \partial_v f) = \begin{pmatrix} \sinh u \cos v & -\cosh u \sin v \\ \sinh u \sin v & \cosh u \cos v \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Im Fall $u \neq 0$ haben wir

$$\det \begin{pmatrix} \sinh u \cos v & -\cosh u \sin v \\ \sinh u \sin v & \cosh u \cos v \end{pmatrix} = 2 \cosh u \sinh u \neq 0,$$

woraus folgt $\operatorname{rg} f' = 2$. Im Fall $u = 0$ haben wir

$$f' = \begin{pmatrix} 0 & -\sin v \\ 0 & \cos v \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

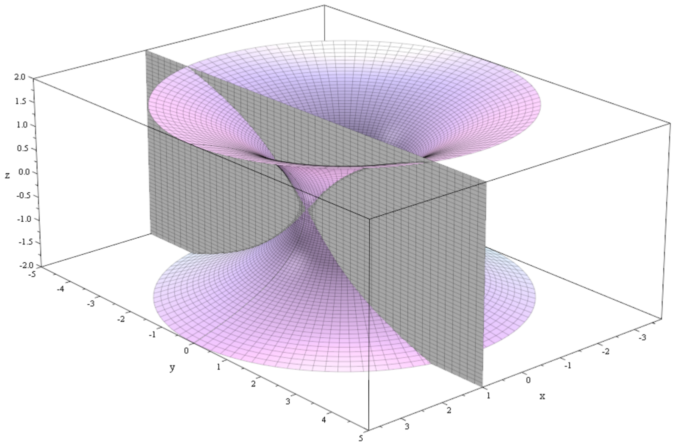
woraus wieder folgt $\operatorname{rg} f' = 2$. Somit ist f' nichtsingulär und (U, f) ist eine Parametrisierung. Die Tangentialabbildung von f im Punkt (u, v) ist

$$\begin{aligned} \tau(h) &= f(u,v) + h_1 \partial_u f + h_2 \partial_v f \\ &= f(u,v) + h_1 (\sinh u \cos v, \sinh u \sin v, 1) + h_2 (-\cosh u \sin v, \cosh u \cos v, 0). \end{aligned}$$

Zum Beispiel für $u = v = 0$ haben wir $x = f(0,0) = (1,0,0)$ und

$$\tau(h) = (1,0,0) + h_1 (0,0,1) + h_2 (0,1,0).$$

Die Tangentialebene $T_x M = \operatorname{im} \tau$ geht durch $(1,0,0)$ und wird von den Vektoren $(0,0,1)$ und $(0,1,0)$ erzeugt.



Das Katenoid und eine Tangentialebene

23.07.21 Vorlesung 29

16.3 Implizite Flächen

Satz 16.2 *Seien Ω eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ und $F : \Omega \to \mathbb{R}^k$, $k < n$, eine stetig differenzierbare Funktion. Nehmen wir an, dass in einem Punkt $p \in \Omega$ gilt*

$$F(p) = 0 \quad \textit{und} \quad \operatorname{rg} F'(p) = k.$$

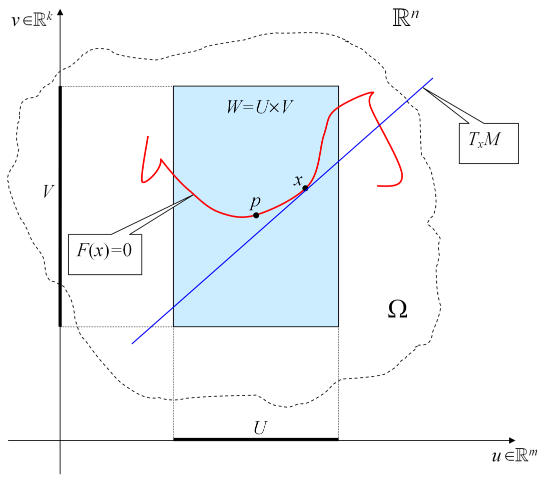
Dann existiert eine offene Menge W mit $p \in W \subset \Omega$ so dass die Null-Niveaumenge

$$M = \{x \in W : F(x) = 0\}$$

eine m-dimensionale Fläche ist, wobei $m = n - k$.

Darüber hinaus hat die Tangentialebene $T_x M$ für jedes $x \in M$ die folgende Darstellung:

$$T_x M = x + \ker F'(x). \tag{16.4}$$



Die implizite Fläche M und die Tangentialebene $T_x M$

Die von der Gleichung $F(x) = 0$ gegebene Menge heißt eine *implizite Fläche*. Der Satz 16.2 besagt, dass jede implizite Fläche in der Nähe von jedem Punkt p mit nichtsingulärem $F'(p)$ eine Fläche ist.

Es folgt aus (16.4), dass $y \in T_x M$ äquivalent zu $y - x \in \ker F'(x)$ ist, d.h. zu

$$F'(x)(y - x) = 0.$$

Das ist die Gleichung der Tangentialebene $T_x M$.

Beweis. Die Matrix $F'(x)$ hat k Zeilen und n Spalten. Da $\operatorname{rg} F'(p) = k$, so existieren k linear unabhängige Spalten von $F'(p)$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, dass die letzten k Spalten, d.h. die Spalten $m+1, ..., n$ linear unabhängig sind:

$$F'(p) = \left(\boxed{k \times m} \; \boxed{k \times k} \right)$$

Jedes $x \in \mathbb{R}^n$ stellen wir in der Form $x = (u, v)$ dar wobei

$$u = (x_1, ..., x_m) \in \mathbb{R}^m \quad \text{and} \quad v = (x_{m+1}, ..., x_n) \in \mathbb{R}^k,$$

und schreiben die Gleichung $F(x) = 0$ in der Form $F(u, v) = 0$. Da

$$F'(p) = (\partial_u F(p) \;|\; \partial_v F(p))$$

und die Matrix $\partial_v F(p)$ aus den letzten k Spalten von der Matrix $F'(p)$ besteht, so erhalten wir nach der Voraussetzung, dass $\partial_v F(p)$ invertierbar ist.

Nach dem Satz von der impliziten Funktion (Satz 15.14) existieren offene Mengen $U \subset \mathbb{R}^m$, $V \subset \mathbb{R}^k$ mit $p \in U \times V \subset \Omega$ und eine C^1-Funktion $\varphi : U \to V$ mit

$$F(u, v) = 0 \;\Leftrightarrow v = \varphi(u) \text{ für alle } u \in U \text{ und } v \in V. \tag{16.5}$$

Setzen wir $W = U \times V$ und bemerken, dass nach (16.5)

$$\begin{aligned} M &= \{x \in W : F(x) = 0\} \\ &= \{(u, v) \in U \times V : F(u, v) = 0\} \\ &= \{(u, v) \in U \times V : v = \varphi(u)\} \end{aligned}$$

so dass M der Graph der Funktion $v = \varphi(u)$ in U ist. Nach Lemma 16.1 ist M eine m-dimensionale Fläche.

Beweisen wir jetzt (16.4). Die Fläche M als ein Graph hat die Parametrisierung $x = f(u)$, wobei

$$f(u) = (u, \varphi(u)) : U \to \mathbb{R}^n$$

Die Tangentialebene an M im Punkt $x = f(u)$ ist

$$T_x M = x + \operatorname{im} f'(u).$$

Es bleibt zu beweisen, dass

$$\operatorname{im} f'(u) = \ker F'(x).$$

Nach (16.5) gilt $F(u, \varphi(u)) = 0$ für alle $u \in U$, was äquivalent zu $F \circ f = 0$. Ableiten von dieser Identität ergibt nach dem Kettenregel

$$F'(x) f'(u) = 0$$

für alle $u \in U$, wobei $x = f(u)$. Es folgt, dass

$$\operatorname{im} f'(u) \subset \ker F'(x). \tag{16.6}$$

Da $\operatorname{rg} F'(x) = k$ in der Nähe von p, so erhalten wir nach dem Rangsatz

$$\dim \ker F'(x) = n - \operatorname{rg} F'(x) = n - k = m.$$

Andererseits nach dem Beweis von Lemma 16.1 gilt

$$\dim \operatorname{im} f'(u) = \operatorname{rg} f'(u) = m.$$

Somit haben die Unterräume $\ker F'(x)$ und $\operatorname{im} f'(u)$ die gleichen Dimensionen, woraus folgt, dass sie übereinstimmen. ■

Beispiel. Betrachten wir in $\mathbb{R}^n$ die Gleichung

$$x_1^2 + ... + x_n^2 = 1,$$

die die Einheitssphäre S bezüglich der 2-Norm bestimmt. Die Sphäre S ist die Null-Niveaumenge der Funktion

$$F(x) = x_1^2 + ... + x_n^2 - 1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

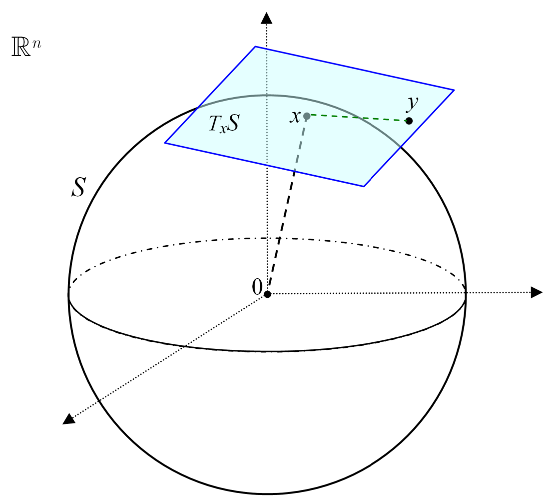
Wir haben

$$F'(x) = (\partial_1 F, ..., \partial_n F) = 2(x_1, ..., x_n).$$

Es ist klar, dass $\operatorname{rg} F'(x) = 1$ für jedes $x \in S$ so dass S lokal eine Fläche ist. Die Gleichung der Tangentialebene ist

$$\sum_{i=1}^n x_i (y_i - x_i) = 0.$$

Insbesondere sehen wir, dass $y - x$ orthogonal zu x ist.



Die Tangentialebene zur Sphäre

Chapter 17

* Verschiedenes

17.1 Holomorphe und harmonische Funktionen

Hier beweisen wie wieder den Fundamentalsatz der Algebra mit Hilfe von dem Begriff von holomorphen Funktionen.

Definition. Sei Ω eine offene Teilmenge von $\mathbb{C}$. Eine Funktion $f \to \Omega \to \mathbb{C}$ heißt *holomorph*, wenn $f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$ und die reellwertigen Funktionen u und v unendlich oft stetig differenzierbar in Ω und die folgenden Gleichungen erfüllen:

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ v_x = -u_y \end{cases} . \tag{17.1}$$

Die Gleichungen (17.1) heißen *Cauchy-Riemann-Gleichungen.*

Offensichtlich ist die Konstante holomorph. Auch die Funktion $f(z) = z$ ist holomorph, da $u = x$ und $v = y$. Die Funktion $f(z) = \overline{z} = x - iy$ ist im Gegensatz nicht holomorph.

Lemma 17.1 *Seien f und g zwei holomorphe Funktionen in Ω. Dann auch die folgenden Funktionen sind holomorph: $f + g$, fg, f/g (vorausgesetzt $g \neq 0$).*

Beweis. Sei $f = u + iv$ und $g = a + ib$. Dann erfüllen u und v die Gleichungen (17.1), und die Funktionen a und b erfüllen

$$\begin{cases} a_x = b_y \\ b_x = -a_y \end{cases}$$

Es ist offensichtlich, dass $f + g$ auch holomorph ist. Beweisen wir, dass fg holomorph. Wir haben

$$fg = (ua - vb) + i(ub + va).$$

und

$$\begin{aligned} (ua - vb)_x &= u_x a + u a_x - v_x b - v b_x \\ &= v_y a + u b_y + u_y b + v a_y \\ &= (ub + va)_y \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}(ub+va)_x &= u_x b + u b_x + v_x a + v a_x \\ &= v_y b - u a_y - u_y a + v b_y \\ &= -(ua - vb)_y\,,\end{aligned}$$

so dass fg holomorph ist.

Beweisen wir jetzt, dass f/g holomorph ist. Es reicht zu beweisen, dass $1/g$ holomorph ist. Wir haben

$$\frac{1}{g} = \frac{a}{a^2+b^2} - i\frac{b}{a^2+b^2}$$

und

$$\begin{aligned}\left(\frac{a}{a^2+b^2}\right)_x &= \frac{a_x\left(a^2+b^2\right) - 2a\left(aa_x+bb_x\right)}{\left(a^2+b^2\right)^2} \\ &= \frac{\left(-a^2+b^2\right)a_x - 2abb_x}{\left(a^2+b^2\right)^2},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(-\frac{b}{a^2+b^2}\right)_y &= -\frac{b_y\left(a^2+b^2\right) - 2b\left(aa_y+bb_y\right)}{\left(a^2+b^2\right)^2} \\ &= \frac{\left(-a^2+b^2\right)b_y + 2aba_y}{\left(a^2+b^2\right)^2}.\end{aligned}$$

Da $a_x = b_y$ und $-b_x = a_y$, so erhalten wir

$$\left(\frac{a}{a^2+b^2}\right)_x = \left(-\frac{b}{a^2+b^2}\right)_y,$$

d.h. die erste Cauchy-Riemann-Gleichung für die Funktion $\frac{1}{g}$. Die zweite Gleichung wird analog bewiesen. ∎

Man kann beweisen, dass auch Komposition von holomorphen Funktionen wieder holomorph ist.

Sei $P(z)$ ein Polynom über $\mathbb{C}$. Es folgt aus dem Lemma 17.1, dass P holomorph in $\mathbb{C}$ ist und auch die Funktion $\frac{1}{P}$ holomorph im Bereich $\{P \neq 0\}$ ist. Man kann beweisen, dass die Summe der Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ immer holomorph in jedem Bereich ist, wo die Reihe konvergiert. Insbesondere ist die Funktion $f(z) = e^{az}$ holomorph für jedes $a \in \mathbb{C}$.

Definition. Eine Funktion $u : \Omega \to \mathbb{R}$ heißt *harmonisch* wenn $u \in C^2(\Omega)$ und in Ω

$$u_{xx} + u_{yy} = 0.$$

Eine Funktion $u \in C^2(\Omega)$ heißt subharmonisch wenn in Ω

$$u_{xx} + u_{yy} \geq 0. \tag{17.2}$$

Bemerken wir, dass der Realteil $u = \operatorname{Re} f$ und Imaginärteil $v = \operatorname{Im} f$ einer holomorphen Funktion f unbedingt harmonisch sind, da nach (17.1)

$$u_{xx} = (v_y)_x = v_{yx} = v_{xy} = (v_x)_y = -u_{yy}$$

und somit $u_{xx} + y_{yy} = 0$. Z.B., die Funktion $u(x,y) = e^x \cos y$ ist harmonisch als der Realteil von e^{iz}.

17.2 Maximum-Prinzip und Fundamentalsatz der Algebra

Lemma 17.2 (Maximum-Prinzip) *Sei Ω eine beschränkte offene Teilmenge von $\mathbb{R}^2$. Sei $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion die in Ω subharmonisch ist. Dann gilt*

$$\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u. \tag{17.3}$$

Beweis. Sei zuerst

$$u_{xx} + u_{yy} > 0 \text{ in } \Omega. \tag{17.4}$$

Es gilt eine Maximumstelle von u in $\overline{\Omega}$, sei $z_0 = (x_0, y_0)$. Ist $z_0 \in \partial\Omega$, so gilt (17.3) offensichtlich. Sei $z_0 \in \Omega$. Da diese eine Maximumstelle ist, so gelten

$$u_{xx}(z_0) \leq 0 \text{ und } u_{yy}(z_0) \leq 0,$$

was im Widerspruch zur Annahme (17.4) steht.

Jetzt betrachten wir den allgemeinen Fall von (17.2). Dafür betrachten wir für jedes $\varepsilon > 0$ die Funktion

$$u_\varepsilon(x, y) = u(x, y) + \varepsilon\left(x^2 + y^2\right).$$

Es gilt

$$(u_\varepsilon)_{xx} = u_{xx} + 2\varepsilon \quad \text{und} \quad (u_\varepsilon)_{yy} = u_{yy} + 2\varepsilon$$

so dass

$$(u_\varepsilon)_{xx} + (u_\varepsilon)_{yy} = (u_{xx} + u_{yy}) + 4\varepsilon > 0.$$

Nach dem ersten Fall gilt also

$$\max_{\overline{\Omega}} u_\varepsilon = \max_{\partial\Omega} u_\varepsilon.$$

Für $\varepsilon \to 0$ erhalten wir (17.3). ∎

Jetzt geben wir noch einen (zweiten) Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra.

Hauptsatz 17.3 *(*Fundamentalsatz der Algebra*) Jedes Polynom $P(z)$ über $\mathbb{C}$ von dem Grad $n \geq 1$ hat mindestens eine Nullstelle $z \in \mathbb{C}$.*

Beweis. Angenommen, dass P keine Nullstelle hat, betrachten wir die Funktion $f(z) = \frac{1}{P(z)}$ die in $\mathbb{C}$ holomorph ist. Setzen wir $u = \operatorname{Re} f$ und $v = \operatorname{Im} f$ so dass u und v harmonische Funktionen auf $\mathbb{R}^2$ sind. Da $|P(z)| \to +\infty$ für $|z| \to \infty$, so erhalten wir $f(z) \to 0$ für $|z| \to \infty$, d.h. für jedes $\varepsilon > 0$ existiert $R > 0$ mit

$$|f(z)| < \varepsilon \text{ für alle } z \text{ mit } |z| \geq R.$$

Insbesondere für die Kreisscheibe $K_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq R\}$ gilt

$$\max_{\partial K_R} |f| \leq \varepsilon.$$

Es folgt, dass auch

$$\max_{\partial K_R} |u| \leq \varepsilon \quad \text{und} \quad \max_{\partial K_R} |v| \leq \varepsilon.$$

Nach dem Maximum-Prinzip gilt auch

$$\max_{K_R} |u| \leq \varepsilon \quad \text{und} \quad \max_{K_R} |v| \leq \varepsilon,$$

insbesondere

$$|u(0)| \leq \varepsilon \quad \text{und} \quad |v(0)| \leq \varepsilon.$$

Da ε beliebig ist, so folgt es $u(0) = v(0) = 0$ und $f(0) = 0$ was unmöglich ist, da $f(0) = 1/P(0) \neq 0$. ■

17.3 Kurvenintegral und Windungszahl

Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ eine stetig differenzierbare parametrisierte Kurve. Wir bezeichnen mit $|\gamma|$ das Bild von γ, d.h. die Kurve $\gamma([a,b])$. Sei Ω eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ die $|\gamma|$ enthält, und sei $f : \Omega \to \mathbb{R}^2$ eine stetige Abbildung mit den Komponenten

$$f(x,y) = (P(x,y), Q(x,y)).$$

Setzen wir auch

$$\gamma(t) = (x(t), y(t))$$

und definieren das *Kurvenintegral* von f entlang γ mit

$$\int_\gamma Pdx + Qdy := \int_a^b (P(x(t), y(t))\, x'(t) + Q(x(t), y(t))\, y'(t))\, dt.$$

Lemma 17.4 *Sei $\tau : [\alpha, \beta] \to [a,b]$ eine surjective monoton steigende stetig differenzierbare Funktion. Betrachten wir die parametrisierte Kurve $\widetilde{\gamma} = \gamma \circ \tau$, d.h.*

$$\widetilde{\gamma}(s) = \gamma(\tau(s)), \quad s \in [\alpha, \beta].$$

Dann gilt $|\widetilde{\gamma}| = |\gamma|$ und

$$\int_{\widetilde{\gamma}} Pdx + Qdy = \int_\gamma Pdx + Qdy.$$

Beweis. Die Identität $|\widetilde{\gamma}| = |\gamma|$ ist offensichtlich. Setzen wir

$$\widetilde{\gamma}(s) = (\widetilde{x}(s), \widetilde{y}(s))$$

wobei

$$\widetilde{x}(s) = x(\tau(s)) \quad \text{und} \quad \widetilde{y}(s) = y(\tau(s)).$$

Die Substitution $t = \tau(s)$ ergibt

$$\begin{aligned}
\int_\gamma Pdx + Qdy &= \int_a^b (P(\gamma(t))\, x'(t) + Q(\gamma(t))\, y'(t))\, dt \\
&= \int_\alpha^\beta (P(\widetilde{\gamma}(s))\, x'(\tau(s)) + Q(\widetilde{\gamma}(s))\, y'(\tau(s)))\, \tau'(s)\, ds \\
&= \int_\alpha^\beta (P(\widetilde{\gamma}(s))\, \widetilde{x}'(s) + Q(\widetilde{\gamma}(s))\, \widetilde{y}'(s))\, ds \\
&= \int_{\widetilde{\gamma}} Pdx + Qdy,
\end{aligned}$$

wobei we benutzt haben. dass

$$\widetilde{x}'(s) = x'(\tau(s))\,\tau'(s) \quad \text{und} \quad \widetilde{y}'(s) = y'(\tau(s))\,\tau'(s)\,.$$

■

Definition. Angenommen, dass $|\gamma|$ den Ursprung 0 nicht enthält, definieren wir

$$A_0(\gamma) := \int_\gamma \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = \int_a^b \frac{x(t)\,y'(t) - y(t)\,x'(t)}{x(t)^2 + y(t)^2} dt. \tag{17.5}$$

Stellen wir γ in Polarkoordinaten $(r\,,\theta)$ dar:

$$\gamma(t) = (r(t)\,,\theta(t))$$

wobei $r(t)$ und $\theta(t)$ erfüllen sollen

$$x(t) = r(t)\cos\theta(t) \quad \text{und} \quad y(t) = r(t)\sin\theta(t)\,. \tag{17.6}$$

Die Funktion

$$r(t) = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}$$

ist automatisch stetig differenzierbar, wobei der Polarwinkel $\theta(t)$ von (17.6) nur bis zur additiven Konstante $2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, definiert ist.

Lemma 17.5 *Liegt $|\gamma|$ in $\mathbb{R}^2 \setminus 0$ so gibt es einen stetig differenzierbaren Polarwinkel $\theta(t)$ auf $[a,b]$, der mit dem Polarradius*

$$r(t) = \sqrt{x(t)^2 + y^2(t)}$$

die Identitäten (17.6) erfüllt. Für dieses $\theta(t)$ gilt

$$A_0(\gamma) = \theta(b) - \theta(a)\,. \tag{17.7}$$

Somit ist $A_0(\gamma)$ gleich den Winkel zwischen den Vektoren $\gamma(b)$ und $\gamma(a)$.

Beweis. Betrachten wir zunächst den Fall wenn $|\gamma|$ in der Halbebene $H_+ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$ liegt. Für jedes $(x,y) \in H_+$ setzen wir

$$r(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{und} \quad \theta(x,y) = \arctan\frac{y}{x},$$

so dass r und θ als Funktionen von $(x,y) \in H_+$ stetig differenzierbar sind. Da $\tan\theta = \frac{y}{x}$ und $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$ so folgt es dass $\cos\theta > 0$ und

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2\theta}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{r}$$

und

$$\sin\theta = \tan\theta\cos\theta = \frac{y}{r}.$$

Somit ist das Paar (r,θ) die Polarkoordinaten von $(x,y)\in H_+$, und (r,θ) ist von (x,y) stetig differenzierbar abhängig.

Somit können wir jede Kurve γ mit $|\gamma|\subset H_+$ in Polarkoordinaten darstellen:

$$\gamma(t)=(r(x(t),y(t)),\theta(x(t),y(t))),\quad t\in[a,b],$$

und $\theta(x(t),y(t))$ stetig differenzierbar ist.

Das Gleiche gilt wenn $|\gamma|\subset H_-:=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: x<0\}$. In diesem Fall setzen wir

$$\theta(x,y)=\pi+\arctan\frac{y}{x}$$

so dass $\theta\in(\pi/2,3\pi/2)$, $\cos\theta<0$ und somit

$$\cos\theta=-\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}=-\frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{x}{r}.$$

Analog definiert man $\theta(t)$ als eine stetig differenzierbare Funktion für jede Kurve γ die in der Halbebene $\{y>0\}$ oder $\{y<0\}$ liegt.

Für beliebige Kurve γ mit $|\gamma|\subset\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$ gibt es ein ε so dass $|\gamma(t)|>\varepsilon$ für alle $t\in[a,b]$. Sei $\{t_k\}_{k=0}^n$ eine Zerlegung des Intervalls $[a,b]$ so dass für jedes $k=0,...,n-2$ gilt

$$\|\gamma(t)-\gamma(s)\|<\varepsilon/2\ \text{ für alle } t,s\in[t_k,t_{k+2}].$$

Bezeichnen wir mit γ_k die Kurve γ auf dem Intervall $[t_k,t_{k+2}]$. Dann liegt $|\gamma_k|$ in einer Halbebene. In der Tat, liegt $\gamma_k(t_k)=(x(t_k),y(t_k))$ in einer Viertelebene V, z.B. in

$$V=\{(x,y): x,y\geq 0\}.$$

Da $\|\gamma_k(t_k)\|>\varepsilon$, so gilt entweder $x(t_k)>\varepsilon/2$ oder $y(t_k)>\varepsilon/2$. Sei $x(t_k)>\varepsilon/2$. Es folgt, dass für alle $t\in[t_k,t_{k+2}]$ gilt

$$|x(t)-x(t_k)|<\varepsilon/2$$

woraus folgt $x(t)>0$. Somit liegt $|\gamma_k|$ im H_+.

Somit gibt es einen stetig differenzierbaren Polarwinkel $\theta_k(t)$ für jede Kurve γ_k. Auf jedem Intervall $[t_k,t_{k+1}]$ mit $k\geq 1$ gibt es zwei Polarwinkeln $\theta_{k-1}(t)$ und $\theta_k(t)$. Für die Differenz davon gilt

$$\theta_k(t)-\theta_{k-1}(t)=2\pi n_k\ \text{ für jedes } t\in[t_k,t_{k+1}]$$

für ein $n_k\in\mathbb{Z}$. Die Zahl n_k ist von $t\in[t_k,t_{k+1}]$ unabhängig da die Differenz $\theta_k(t)-\theta_{k-1}(t)$ eine stetige Funktion auf $[t_k,t_{k+1}]$ ist.

Jetzt definieren wir die Funktion $\theta(t)$ auf $[a,b]$ wie folgt: für jedes $k=0,...,n-1$

$$\theta(t)=\theta_k(t)-2\pi(n_1+...+n_k)\quad \text{für } t\in[t_k,t_{k+1}].$$

Dann ist $\theta(t)$ der Polarwinkel von $\gamma_k(t)$ und somit der Polarwinkel von $\gamma(t)$ für jedes $t\in[a,b]$.

Beweisen wir, dass die Funktion θ auf $[a,b]$ stetig differenzierbar ist. Es folgt, dass auf $[t_k,t_{k+1}]$ gilt

$$\begin{aligned}\theta(t)&=(\theta_{k-1}(t)+2\pi n_k)-2\pi(n_1+...+n_k)\\&=\theta_{k-1}(t)-2\pi(n_1+...+n_{k-1}).\end{aligned}$$

Somit gilt die Identität

$$\theta(t) = \theta_{k-1}(t) - 2\pi(n_1 + ... + n_{k-1})$$

auf dem Intervall $[t_{k-1}, t_{k+1}] = [t_{k-1}, t_k] \cup [t_k, t_{k+1}]$. Da θ auf jedem Intervall $[t_{k-1}, t_{k+1}]$ stetig differenzierbar ist, so folgt es dass θ auch auf $[a, b]$ stetig differenzierbar ist.

Für $r(t)$ und $\theta(t)$ wie oberhalb gilt

$$\frac{x}{x^2+y^2} = \frac{r\cos\theta}{r^2} = \frac{\cos\theta}{r}, \quad \frac{y}{x^2+y^2} = \frac{\sin\theta}{r}$$

$$x' = r'\cos\theta - (r\sin\theta)\,\theta', \quad y' = r'\sin\theta + (r\cos\theta)\,\theta'$$

und

$$\begin{aligned}\frac{xy'-yx'}{x^2+y^2} &= \frac{\cos\theta}{r}\left(r'\sin\theta + (r\cos\theta)\,\theta'\right) - \frac{\sin\theta}{r}\left(r'\cos\theta - (r\sin\theta)\,\theta'\right)\\ &= \left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right)\theta' = \theta'.\end{aligned}$$

Somit erhalten wir aus (17.5)

$$A_0(\gamma) = \int_a^b \theta' dt = \theta(b) - \theta(a),$$

was zu beweisen war. ■

Sei jetzt $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ geschlossen ist, d.h. $\gamma(a) = \gamma(b)$. Dann gilt $r(a) = r(b)$ und

$$\theta(b) = \theta(a) + 2\pi n$$

für ein $n \in \mathbb{Z}$. Es folgt, dass

$$A_0(\gamma) = 2\pi n.$$

Definition. Die ganze Zahl n heißt die *Windungszahl* (auch *Index* genannt) der geschlossenen Kurve γ bezüglich 0 und wird mit $\operatorname{ind}_0\gamma$ bezeichnet. In anderen Wörtern, gilt

$$\operatorname{ind}_0\gamma := \frac{1}{2\pi}A_0(\gamma) = \frac{1}{2\pi}\int_\gamma \frac{xdy - ydx}{x^2+y^2}, \tag{17.8}$$

vorausgesetzt, dass $0 \notin |\gamma|$.

Beispiel. Sei $\gamma(t) = (r\cos t, r\sin t)$, $t \in [0, 2\pi n]$, die n-fach Kreislinie von Radius r, wobei $n \in \mathbb{N}$. Es gilt

$$\begin{aligned}\operatorname{ind}_0\gamma &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi n} \frac{(r\cos t)(r\sin t)' - r\sin t\,(r\cos t)'}{(r\cos t)^2 + (r\sin t)^2}dt\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi n} \frac{r^2\left(\cos^2 t + \sin^2 t\right)}{r^2\left(\cos^2 t + \sin^2 t\right)}dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi n} dt = n.\end{aligned}$$

Beispiel. Nehmen wir an, dass das Bild $|\gamma|$ in einer von vier Halbebenen von $\mathbb{R}^2$ liegt, und beweisen, dass

$$\operatorname{ind}_0\gamma = 0.$$

Wie im Beweis von Lemma 17.5, der Polarwinkel θ in der Halbebene ist eine Funktion von (x, y). Da

$$(x(a), y(a)) = (x(b), y(b)),$$

so folgt es aus (17.7), dass

$$\operatorname{ind}_0 \gamma = \theta(x(b), y(b)) - \theta(x(a), y(a)) = 0,$$

Beispiel. Betrachten wir die Kreislinie

$$\gamma_r(t) = (a + r\cos t, b + r\sin t), \ t \in [0, 2\pi],$$

mit dem Mittelpunkt (a, b) wobei $0 < r < \sqrt{a^2 + b^2}$. Dann $0 \notin |\gamma_r|$ und gilt

$$\begin{aligned}
\operatorname{ind}_0 \gamma_r &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(a + r\cos t)(b + r\sin t)' - (b + r\sin t)(a + r\cos t)'}{(a + r\cos t)^2 + (b + r\sin t)^2} dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{ar\cos t + br\sin t + r^2}{a^2 + b^2 + 2ar\cos t + 2br\sin t + r^2} dt.
\end{aligned}$$

Der Integrand ist eine stetige Funktion bezüglich $(r, t) \in \left(0, \sqrt{a^2 + b^2}\right) \times [0, 2\pi]$, woraus folgt, dass auch $\operatorname{ind}_0 \gamma_r$ stetig bezüglich r ist. Da $\operatorname{ind}_0 \gamma_r$ ganze Zahl ist, so ist $\operatorname{ind}_0 \gamma_r$ eine Konstante und von r unabhängig ist. Da für $r \to 0$ das Integral offensichtlich gegen 0 konvergiert, so erhalten wir

$$\operatorname{ind}_0 \gamma_r = 0$$

für alle $r < \sqrt{a^2 + b^2}$. Alternativ kann man bemerken, dass für kleine Werten von r liegt $|\gamma_r|$ in einer Halbebene, so dass $\operatorname{ind}_0 \gamma_r = 0$ nach dem obigen Beispiel gilt.

Setzen wir $b = 0$ und $a = 1$. Dann für alle $0 < r < 1$ erhalten wir die folgende nicht-triviale Identität

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos t + r}{\cos t + \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)} dt = 0.$$

Definition. Für eine geschlossene stetig differenzierbare Kurve γ und für beliebigen Punkt $w \in \mathbb{R}^2 \setminus |\gamma|$ definieren wir den Index $\operatorname{ind}_w \gamma$ mit

$$\operatorname{ind}_w \gamma = \operatorname{ind}_0(\gamma - w) = \frac{1}{2\pi} \int_\gamma \frac{(x - w_x)\,dy - (y - w_y)\,dx}{(x - w_x)^2 + (y - w_y)^2}. \tag{17.9}$$

Der folgende Satz 17.6 ist eine 2-dimensionale Version von dem Zwischenwertsatz aus Analysis 1. Umformulieren wir zunächst dem Zwischenwertsatz wie folgt. Für jedes Paar $\{\alpha, \beta\}$ von reellen Zahlen und jedes $c \in \mathbb{R} \setminus \{\alpha, \beta\}$ setzen wir

$$\operatorname{ind}_c\{\alpha, \beta\} = \begin{cases} 1, \text{ falls } \alpha < c < \beta \\ -1, \text{ falls } \beta < c < \alpha, \\ 0, \text{ sonst.} \end{cases}$$

Dann ergibt der Zwischenwertsatz folgendes. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Gilt für ein $c \in \mathbb{R} \setminus \{f(a), f(b)\}$

$$\operatorname{ind}_c\{f(a), f(b)\} \neq 0,$$

so liegt c im $f([a, b])$.

Hauptsatz 17.6 *Sei $f : D \to \mathbb{R}^2$ eine stetig differenzierbare Abbildung von der abgeschlossen Kreisscheibe $D \subset \mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$. Sei γ die parametrisierte Kreislinie ∂D. Gilt für einen Punkt $w \in \mathbb{R}^2 \setminus |f \circ \gamma|$*

$$\operatorname{ind}_w f \circ \gamma \neq 0,$$

so liegt w im $f(D)$.

Für jedes $w \in |f \circ \gamma|$ gilt offensichtlich $w \in f(D)$.

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, dass $w = 0$ (sonst bezeichnen wir $f - w$ wieder mit f). Sei

$$D = \left\{ z \in \mathbb{R}^2 : \|z\| \leq R \right\}.$$

Betrachten wir eine Familie von parametrisierten Kreislinien

$$\gamma_r(t) = (r\cos t, r\sin t), \quad t \in [0, 2\pi],$$

wobei $r \in [0, R]$ als der Parameter der Familie betrachtet wird. Betrachten wir die Kurve $\widetilde{y}$

$$\widetilde{\gamma}_r = f \circ \gamma_r.$$

Nehmen wir das Gegenteil an, dass 0 nicht im $f(D)$ liegt. Dann $0 \notin |\widetilde{\gamma}_r|$ für jedes $r \in [0, R]$ so dass $\operatorname{ind}_0 \widetilde{\gamma}$ für alle r definiert ist. Wir haben

$$\operatorname{ind}_0 \widetilde{\gamma}_r = \frac{1}{2\pi} \int_{\widetilde{\gamma}_r} \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\widetilde{x}_r(t)\, \widetilde{y}_r'(t) - \widetilde{y}_r(t)\, \widetilde{x}_r'(t)}{\widetilde{x}_r(t)^2 + \widetilde{y}_r(t)^2} dt$$

wobei

$$\widetilde{\gamma}_r(t) = (\widetilde{x}_r(t), \widetilde{y}_r(t)).$$

Sei $f = (P, Q)$. Dann

$$\widetilde{\gamma}_r = f \circ \gamma_r = (P(r\cos t, r\sin t), Q(r\cos t, r\sin t)).$$

Wir sehen, dass die Funktionen

$$\widetilde{x}_r(t) = P(r\cos t, r\sin t) \quad \text{und} \quad \widetilde{y}_r(t) = Q(r\cos t, r\sin t)$$

stetig differenzierbar in $(r, t) \in [0, R] \times [0, 2\pi]$ sind, woraus folgt, dass der Integrand

$$\frac{\widetilde{x}_r(t)\, \widetilde{y}_r'(t) - \widetilde{y}_r(t)\, \widetilde{x}_r'(t)}{\widetilde{x}_r(t)^2 + \widetilde{y}_r(t)^2}$$

stetig in $(r, t) \in [0, R] \times [0, 2\pi]$ ist. Es folgt aus dem Satz 15.16, dass $\operatorname{ind}_0 \widetilde{\gamma}_r$ stetig in $r \in [0, R]$ ist. Da die Zahl $\operatorname{ind}_0 \widetilde{\gamma}_r$ ganz ist, so folgt es daraus, dass $\operatorname{ind}_0 \widetilde{\gamma}_r$ eine Konstante in $r \in [0, R]$ ist.

Andererseits bemerken wir, dass für $r = 0$ ist $|\gamma_0|$ ein Punkt 0 und somit ist $|\widetilde{\gamma}_0|$ ein Punkt $f(0)$. Es folgt, dass

$$\operatorname{ind}_0 \widetilde{\gamma}_0 = 0$$

und somit $\operatorname{ind}_0 \widetilde{\gamma}_r = 0$ für alle $r \in [0, R]$. Insbesondere gilt auch

$$\operatorname{ind}_0 f \circ \gamma = \operatorname{ind}_0 \widetilde{\gamma}_R = 0,$$

was im Widerspruch zur Voraussetzung steht. ∎

17.4 Anwendungen von Windungszahl

17.4.1 Fundamentalsatz der Algebra

Jetzt geben wir noch einen (dritten) Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra.

Hauptsatz 17.7 *Jedes Polynom $f(z)$ über $\mathbb{C}$ von dem Grad $n \geq 1$ hat mindestens eine Nullstelle $z \in \mathbb{C}$.*

Beweis. Betrachten wir die Kreisscheibe $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq R\}$ wobei R groß genug ist. Sei γ die folgende Parametrisierung der Kreislinie ∂D:

$$\gamma(t) = R(\cos t + i \sin t).$$

Um zu beweisen, dass $f(z) = 0$ für ein z gilt, reicht es zu zeigen, dass $0 \in f(D)$, was nach dem Satz 17.6 der Fall ist, wenn

$$\operatorname{ind}_0 f \circ \gamma \neq 0.$$

Sei $f(z) = z^n + g(z)$ wobei $g(z)$ ein Polynom des Grades $\leq n-1$ ist. Wählen wir R so groß, dass

$$\sup_{\{z:|z|=R\}} |g(z)| \leq \frac{1}{2} R^n. \tag{17.10}$$

Betrachten wir eine Familie von Kurven

$$\gamma_\lambda(t) = \gamma(t)^n + \lambda g(\gamma(t))$$

wobei $\lambda \in [0,1]$. Insbesondere ist $\gamma_0(t) = \gamma(t)^n$ eine n-fach Kreislinie und $\gamma_1(t) = f(\gamma(t))$.

Es folgt aus (17.10), dass $|\gamma_\lambda|$ den Ursprung 0 nicht enthält. Da

$$\gamma_0(t) = R^n(\cos nt + i \sin nt),$$

so erhalten wir

$$\operatorname{ind}_0 \gamma_0 = n.$$

Es folgt aus (17.8) nach dem Satz 15.16, dass der Index $\operatorname{ind}_0 \gamma_\lambda$ eine stetige Funktion von λ ist. Somit ist $\operatorname{ind}_0 \gamma_\lambda$ eine Konstante als Funktion von λ. Daraus folgt, dass

$$\operatorname{ind}_0 f \circ \gamma = \operatorname{ind}_0 \gamma_1 = \operatorname{ind}_0 \gamma_0 = n$$

und somit $\operatorname{ind}_0 f \circ \gamma \neq 0$, was zu beweisen war. ■

17.4.2 Fixpunktsatz von Brouwer

Hauptsatz 17.8 (Fixpunktsatz von Brouwer) *Sei $f : D \to D$ eine stetige Selbstabbildung von der abgeschlossenen Kreisscheibe D in $\mathbb{R}^2$. Dann hat f einen Fixpunkt, d.h. einen Punkt $z \in D$ mit $f(z) = z$.*

Beweis. Wir beweisen diesen Satz im Fall wenn f stetig differenzierbar ist. Nehmen wir das Gegenteil an, dass f keinen Fixpunkt hat, d.h. $f(z) \neq z$ für alle $z \in D$. Dann gibt es eine eindeutige Gerade durch $f(z)$ und z. Betrachten wir den Halbgerade

$$G = \{tz + (1-t)\, g(z) : t \geq 0\}$$

die an $f(z)$ anfängt und durch z geht. Sei $g(z)$ der Punkt von Durchschnitt von ∂D mit G. Dann erhalten wir eine stetig differenzierbare Abbildung $g : D \to \partial D$. Bemerken auch, dass für $z \in \partial D$ gilt $g(z) = z$.

Eine stetige Abbildung $F : X \to Y$ wobei $Y \subset X$, heißt *Retraktion* wenn $F|_Y = \mathrm{Id}$. So ist g eine Retraktion. Wir zeigen allerdings, so es keine Retraktion von D nach ∂D gibt.

Sei γ die standarte Parametrisierung der Kreislinie ∂D. Da $g \circ \gamma = \gamma$, so folgt es, dass

$$\mathrm{ind}_0\, g \circ \gamma = \mathrm{ind}_0\, \gamma = 1.$$

Nach dem Satz 17.6 beschließen wir, dass $0 \in g(D)$ was unmöglich ist, da $g(D) = \partial D$ und $0 \notin \partial D$. ■

17.4.3 Das Komplement einer abgeschlossenen Kurve

Satz 17.9 (a) *Der Index* $\mathrm{ind}_w\, \gamma$ *ist eine stetige Funktion von* $w \in \mathbb{R}^2 \setminus |\gamma|$.

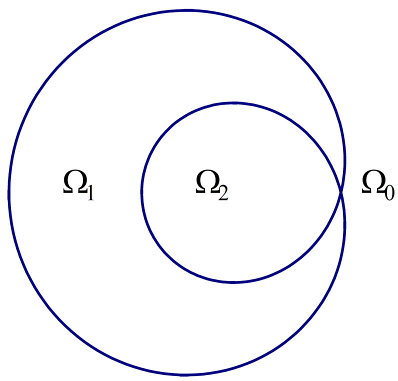
(b) *Für jedes* $k \in \mathbb{Z}$ *ist sie Menge*

$$\Omega_k = \left\{ w \in \mathbb{R}^2 \setminus |\gamma| : \mathrm{ind}_w\, \gamma = k \right\}.$$

offen und

$$\bigsqcup_{k \in \mathbb{Z}} \Omega_k = \mathbb{R}^2 \setminus |\gamma|. \tag{17.11}$$

(c) *Die Menge* Ω_0 *ist unbeschränkt während* Ω_k *für* $k \neq 0$ *ist immer beschränkt.*



Mengen Ω_k

Beweis. (a) Das folgt aus (17.9).

(b) Da $\mathrm{ind}_w\, \gamma$ nur die ganzen Werte annimmt, so gilt

$$\Omega_k = \left\{ w \in \mathbb{R}^2 \setminus |\gamma| : \mathrm{ind}_w\, \gamma \in (k - 1/2, k + 1/2) \right\}.$$

Da das Intervall $(k-1/2, k+1/2)$ offen ist und die Funktion $w \mapsto \operatorname{ind}_w \gamma$ stetig, so ist Ω_k offen. Die Identität (17.11) folgt nach der Definition von Ω_k.

(c) Ist w weit genug von $|\gamma|$ so liegt $|\gamma|$ in einer Halbebene bezüglich w, woraus folgt, dass $\operatorname{ind}_w \gamma = 0$. Somit enthält Ω_0 alle w die weit genug von $|\gamma|$ liegen, woraus die beiden Aussagen folgen. ■

Die folgenden zwei Sätze geben wir ohne Beweis an.

Hauptsatz 17.10 (Satz von Jordan) *Sei γ eine einfache geschlossene stetig differenzierbare Kurve. Dann in der Folge $\{\Omega_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ gibt es nur zwei nicht-leere Mengen: Ω_0 und Ω_i wobei entweder $i=1$ oder $i=-1$. Darüber sind die Mangen Ω_0 und Ω_i zusammenhängend und es gilt*

$$\partial\Omega_0 = \partial\Omega_i = |\gamma|\,.$$

Die Menge Ω_i heißt das *Innere* von γ, Ω_0 heißt das *Äußere* von γ.

Satz 17.11 *Sei γ eine einfache geschlossene stetig differenzierbare Kurve. Sei Ω das Innere von γ. Der Flächeninhalt von Ω ist gleich*

$$F(\Omega) = \int_\gamma y\,dx = -\int_\gamma x\,dy = \frac{1}{2}\int_\gamma (y\,dx - x\,dy)\,.$$

Jetzt benutzen wir die komplexwertige Notation für eine parametrisierte geschlossene Kurve $\gamma(t) = (x(t), y(t))$. Setzen wir

$$z(t) = x(t) + iy(t)\,.$$

Dann gilt

$$\frac{1}{z} = \frac{x-iy}{x^2+y^2}$$

und

$$dz = dx + idy$$

so dass

$$\frac{dz}{z} = \frac{x\,dx + y\,dy}{x^2+y^2} + i\frac{xdy - y\,dx}{x^2+y^2}.$$

Bemerken wir, dass

$$\int_\gamma \frac{x\,dx + y\,dy}{x^2+y^2} = \frac{1}{2}\int_a^b \frac{d\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2} = \left[\frac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right)\right]_a^b = \ln\|\gamma(b)\| - \ln\|\gamma(a)\| = 0.$$

Somit erhalten wir, dass

$$\operatorname{ind}_0 \gamma = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dz}{z}.$$

Für beliebigen Punkt $w \in \mathbb{C}\setminus|\gamma|$ gilt

$$\operatorname{ind}_w \gamma = \operatorname{ind}_0(\gamma - w) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dz}{z-w}.$$