Уравнение Лейбензона на римановых многообразиях

Александр Григорьян
Университет Билефельда

Семинар-совещание, посвящённое 80-летию В. М. Миклюкова
Волгоград, апрель 2024

1 Введение

Рассмотрим уравнение

$$\partial_t u = \Delta_p u^q \tag{1}$$

где $p, q > 0$, $u(x, t)$ неизвестная неторицательная функция, а Δ_p – p-Лапласиан, то есть

$$\Delta_p v = \operatorname{div}\left(|\nabla v|^{p-2}\nabla v\right).$$

Уранение (1) было введено Леонидом Самуиловичем Лейбензоном в 1930-40е годы для описания движения турбулентной сжимаемой жидкости в пористой среде. При этом $u(x,t)$ обозначает объёмную долю жидкости в данной точке в данный момент времени. Параметр p характеризует турбулентность жидкости, а q – сжимаемость.

Физический смысл имеют следующие значения параметров: $\frac{3}{2} \leq p \leq 2$ and $q \geq 1$. Значение $p = 2$ соответствует ламинарному течению (=отсутствие турбулетности). В этом случае (1) становится уравнением пористой среды $\partial_t u = \Delta u^q$, если $q > 1$, и классическим уравнением теплопроводности $\partial_t u = \Delta u$, если $q = 1$.

Мы будем предполагать, что $p > 1$ и $q > 0$.

Григорий Исаакович Баренблатт построил в 1952 году автомодельные решения уравнения (1) в $\mathbb{R}^n$. Рассмотрим сначала случай, когда

$$\boxed{q\,(p-1)>1},$$

то есть $\delta := q(p-1)-1>0$. В этом случае решение Баренблатта имеет вид

$$u\,(x,t)=\frac{1}{t^{n/\beta}}\left(C-\omega\left(\frac{|x|}{t^{1/\beta}}\right)^{\frac{p}{p-1}}\right)_+^{\gamma}\,, \tag{2}$$

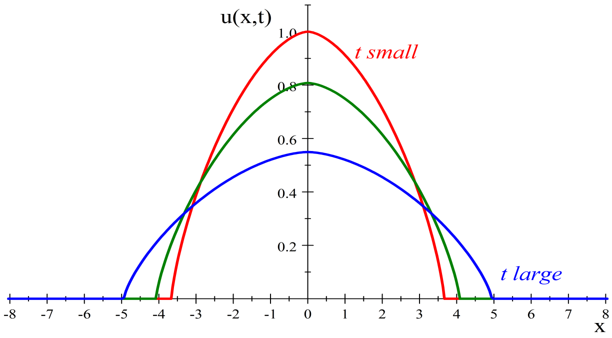
где

$$\beta=p+n\delta\ ,\quad \gamma=\tfrac{p-1}{\delta},\quad \omega=\tfrac{\delta}{pq}\beta^{-\frac{1}{p-1}}. \tag{3}$$

Отметим, что параметр β определяет масштабирование пространство/время и является аналогом понятия *размерность блуждания* для случайных процессов.

Очевидно, что решение $u(x,t)$ обращается в нуль при $|x|>ct^{1/\beta}$, так что $u(\cdot,t)$ имеет *компактный носитель* для всех $t>0$. Тем самым u имеет *конечную скорость распространения.*

Вот графики функций $x \mapsto u(x,t)$ для различных значений t в случае $n = 1$.



Если $q\,(p-1) < 1$, то $\delta, \gamma, \omega < 0$, и решение Баренблатта

$$u\,(x,t) = \frac{1}{t^{n/\beta}} \left(C + |\omega| \left(\frac{|x|}{t^{1/\beta}} \right)^{\frac{p}{p-1}} \right)^{-|\gamma|}$$

положительно при всех x, t.

В пограничном случае $q\,(p-1) = 1$ решение Баренблатта даётся другой формулой:

$$u\,(x,t) = \frac{1}{t^{n/p}} \exp \left(-c \left(\frac{|x|}{t^{1/p}} \right)^{\frac{p}{p-1}} \right),$$

где $c = (p-1)^2\, p^{-\frac{p}{p-1}}$, но также является положительным. Таким образом, решение Баренблатта имеет конечную скорость распространения тогда и только тогда, когда $q\,(p-1) > 1$.

2 Распространение решения внутри шара

Пусть M будет геодезически полным римановым многообразием размерности n. Рассмотрим уравнение Лейбензона на M:

$$\partial_t u = \Delta_p u^q, \tag{4}$$

где $u = u(x,t) \geq 0$, $x \in M$, $t > 0$, и оператор $\Delta_p v = \operatorname{div}\left(|\nabla v|^{p-2}\nabla v\right)$ определяется римановой метрикой. Предположим, что

$$\boxed{p > 1 \quad \text{и} \quad \delta := q(p-1) - 1 > 0}. \tag{5}$$

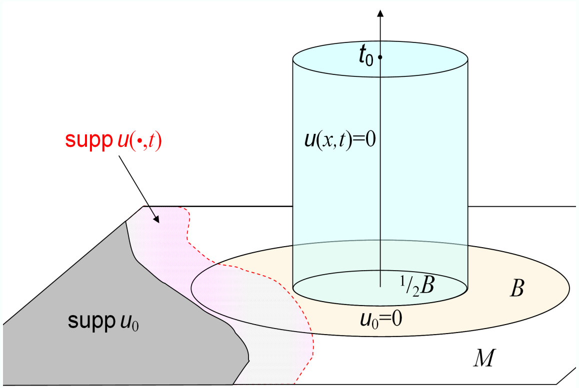
Теорема 1 *Пусть $u(x,t)$ является ограниченным решением (4) в $M \times \mathbb{R}_+$. Предположим, что $u_0 := u(\cdot,0) = 0$ в шаре B радиуса R. Тогда*

$$u(\cdot,t) = 0 \ in\ \tfrac{1}{2}B \quad \text{для всех} \quad t \leq t_0,$$

где

$$\boxed{t_0 = \eta R^p \|u_0\|_{L^\infty(M)}^{-\delta}},$$

а константа $\eta > 0$ определяется внутренней геометрией шара B.



Заметим, что область значений (5) параметров p, q такая же, как и для решений Баренблатта с конечной скоростью распространия.

Теорема 1 доказана в совместной работе с Philipp Sürig 2023. Случай $q = 1$ (и, тем самым, $p > 2$) был известен ранее: аналог теоремы 1 в этом случае был доказан S. Dekkers в 2005. Теорема 1 является новой даже в случае $p = 2$. В этом случае условие (5) эквивалентно $q > 1$, а уравнение (4) становится уравнением *пористой среды* $\partial_t u = \Delta u^q$.

Замечание. Константа η в определении t_0 зависит от p, q, n, а также от *нормированной константы Соболева* c_B in B: для любой функции $u \in W_0^{1,p}(B)$

$$\left(\fint_B |\nabla u|^p \, d\mu\right)^{1/p} \geq \frac{c_B}{R} \left(\fint_B |u|^{p\kappa} \, d\mu\right)^{1/p\kappa}, \tag{6}$$

где μ – риманова мера, а κ – показатель Соболева, то есть $\kappa = \frac{n}{n-p}$ если $n > p$, и $\kappa > 1$ любое, если $n \leq p$.

Заметим, что $c_B > 0$ благодаря компактности шара, но точное значение c_B определяется внутренней геометрией шара. Известно, что $c_B \geq \text{const} > 0$ на полных некомпактных многообразиях неотрицательной кривизны Риччи (в частности, в $\mathbb{R}^n$). В этом случае значение η можно считать независимым от шара B.

3 Скорость распространения носителя

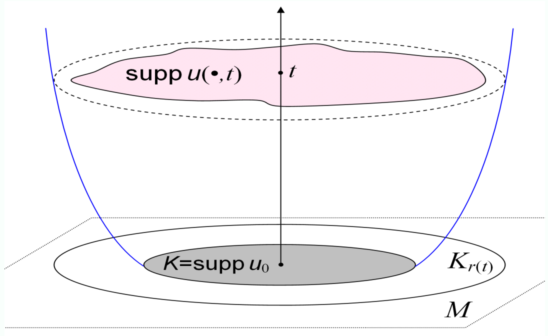
Пусть u будет ограниченным решением (4) с начальным условием $u(\cdot,0)=u_0$. Для любого множества $K\subset M$ и $r>0$ обозначим через K_r замкнутую r-окрестность K.

Следствие 2 *Пусть $K:=\operatorname{supp} u_0$ будет компактом. Тогда существует возрастающая функция $r:(0,T)\to\mathbb{R}_+$, где $T\in(0,\infty]$, такая, что*

$$\operatorname{supp} u\,(\cdot,t)\subset K_{r(t)}$$

для всех $t\in(0,T)$.

То есть, скорость распространения u ограничена функцией $r(t)$.



Неизвестно, можно ли всегда взять $T=\infty$. Было бы интересно либо доказать, что носитель $\operatorname{supp} u\,(\cdot,t)$ всегда компактный для всех $t>0$, либо построить контрпример, то есть, многообразие M и решение u такое, что $\operatorname{supp} u_0$ компактный, а $\operatorname{supp} u(\cdot,t)$ неограниченный при достаточно больших t.

Пусть известно, что константа c_B в (6) может быть взята одной и той же для всех шаров (например, это так, если M имеет неотрицательную кривизну Риччи). Тогда константа η из теоремы 1 одна и та же для всех шаров, откуда можно получить следующее утверждение.

Следствие 3 *Если* $c_B \geq \mathrm{const} > 0$ *для всех шаров, то для любого ограниченного решения* u, *имеющего начальную функцию* u_0 *с компактным носителем* K, *скорость распространения ограничена функцией* $r(t) = Ct^{1/p}$ *для всех* $t > 0$, *то есть*

$$\operatorname{supp} u(\cdot, t) \subset K_{Ct^{1/p}}.$$

Функция $r = Ct^{1/p}$ получается просто обращением формулы $t_0 = cR^p$ из теоремы 1. Отметим для сравнения, что в $\mathbb{R}^n$ скорость распространения решения Баренблатта даётся функцией $r(t) = Ct^{1/\beta}$, где

$$\beta = p + n\delta. \tag{7}$$

Отсюда следует, что для любого ограниченного решения с компактным начальным носителем скорость распространения ограничена функцией $r(t) = Ct^{1/\beta}$ для $t > 1$.

Так как $\beta > p$, то следствие 3 не даёт точной скорости распространения даже в $\mathbb{R}^n$. Чтобы улучшить функцию $r(t)$, нужно увеличить значение t_0 в теореме 1.

4 Точная скорость распространения

Вместо предыдущих условий (5) на p, q, мы наложим на p, q более ограничительные условия:

$$\boxed{p > 2 \quad \text{and} \quad \tfrac{1}{p-1} < q \leq 1}.$$

В частности, по прежнему $\delta := q(p-1) - 1 > 0$.

Теорема 4 *Пусть u будет ограниченное решение уравнения (4) в $M \times \mathbb{R}_+$, где $u_0 := u(\cdot, 0) \in L^1$. Предположим, что $u_0 = 0$ в шаре $B \subset M$ радиуса R.*

Тогда

$$u(\cdot, t) = 0 \text{ в } \tfrac{1}{2}B \text{ для всех } t \leq t_0$$

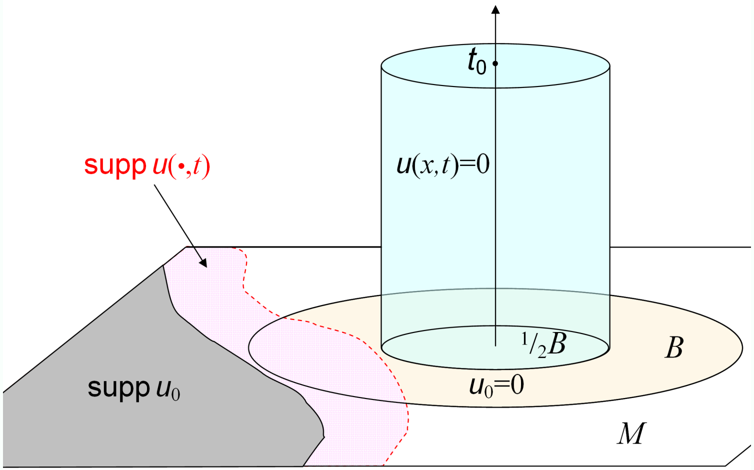
где

$$\boxed{t_0 = \eta R^p \mu(B)^{\delta/\sigma} \|u_0\|_{L^\sigma(M)}^{-\delta}}.$$

Здесь σ любое число, такое, что

$$\sigma \geq 1 \quad \text{and} \quad \sigma > \delta, \qquad (*)$$

и $\eta = \eta(p, q, n, \sigma, c_B) > 0$.



Следствие 5 *Пусть* $c_B \geq \text{const} > 0$. *Предположим, что для некоторой точки* $x_0 \in \operatorname{supp} u_0$ *и некоторых* $\alpha, c, r_0 > 0$

$$\mu(B(x_0, r)) \geq cr^{\alpha} \quad \textit{for all } r \geq r_0. \tag{8}$$

Тогда скорость распространения и ограничена функцией $r(t) = Ct^{1/\beta}$ *(для* $t > 1$*), где*

$$\beta = p + \alpha\delta/\sigma, \tag{9}$$

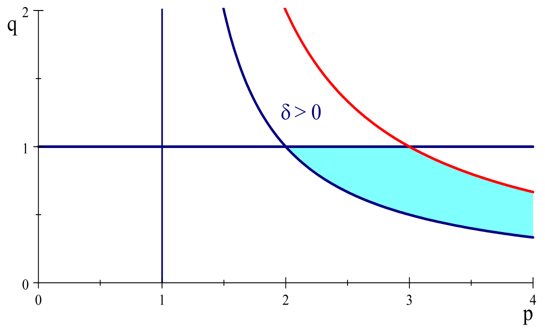
а σ *то же,что и в* $(*)$.

В случае $M = \mathbb{R}^n$ имеем $\alpha = n$, и при $\sigma = 1$ получим $\beta = p + n\delta$, что совпадает со значением β в $\mathbb{R}^n$ (см. (7)). Однако, значение $\sigma = 1$ допустимо в $(*)$ только если $\delta < 1$, то есть, если $q(p-1) < 2$.

На этом рисунке показана область значений p и q:

$$p > 2 \quad \text{and} \quad 1 < q(p-1) < 2.$$

Для этих p, q мы получаем точную оценку скорости распространения в $\mathbb{R}^n$, а также в классе модельных многообразий с $c_B \geq \text{const} > 0$ и с любым $\alpha \in (0, n]$.



Гипотеза. Утверждение теоремы 4 с $\sigma = 1$ справедливо всегда, когда $p > 1$, $\delta > 0$.