

Homologie und Kohomologie

Skript

Andriy Haydys und Martin Callies

19. Januar 2017

Dies ist ein Entwurf. Insbesondere, es fehlen noch (fast) alle Bilder. Sollen Sie Fehler finden, geben Sie uns bitte Bescheid.

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	2
1.1	Differentialformen, Sätze von Green und Stokes	2
1.2	Ansatz einer Konstruktion.	3
1.3	Der Satz von Brouwer.	5
1.4	Der Grad einer Abbildung und der Fundamentalsatz der Algebra	6
2	Singuläre Homologie	8
2.1	Freie abelsche Gruppe	8
2.2	Singuläre Simplizes	8
2.3	Eigenschaften der Homologiegruppen und induzierte Abbildungen	10
2.4	Homotopieeigenschaften der Homologiegruppen	13
2.5	Exakte Sequenzen	15
2.6	Relative Homologiegruppen	17
2.7	Die Homologiegruppen der Sphären	18
2.8	Der Satz vom Igel	19
2.9	Gruppenoperationen auf Sphären	21
2.10	Homologiegruppen von Graphen	21
2.11	Homologiegruppen einiger Flächen	25
2.11.1	Der Torus	25
2.11.2	Die projektive Ebene	26
2.11.3	Die Kleinsche Flasche	27
2.12	Die Mayer–Vietoris Sequenz	27
2.12.1	Mannigfaltigkeiten	28
2.12.2	Kompakte Flächen	29
2.13	Homologiegruppen des Paares und des Quotienten	30
2.14	Beweis der Exaktheit der Mayer–Vietoris Sequenz und der Ausschneidungseigenschaft	31
2.A	Poincaré–Vermutung	38
3	CW-Komplexe	40
3.1	Anheften eines Raumes	40
3.2	Operationen auf CW-Komplexe	42
3.3	Homotopie-Erweiterungs-Eigenschaft	43
3.4	Zelluläre Homologie	45
3.5	Euler-Charakteristik	48

Kapitel 1

Einführung

1.1 Differentialformen, Sätze von Green und Stokes

Sei $\omega = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ eine 1-Form auf $U \subset \mathbb{R}^2$. Zum Beispiel, ist $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ eine (glatte) Abbildung, so ist $df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$ eine 1-Form.

Frage 1.1. Wann gibt es ein f , sodass $\omega = df$?

Notwendige Bedingung:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \quad (1.2)$$

Behauptung 1.3. Sei U konvex. Dann ist die Bedingung (1.2) auch hinreichend.

Beweis. Satz von Green \implies Für jede geschlossene abschnittsweise glatte Kurve $C \subset U$ gilt

$$\int_C (P dx + Q dy) = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = 0. \quad (1.4)$$

Sei $(x_0, y_0) \in U$ fest. Für ein $(x, y) \in U$ wähle eine Kurve C' , die (x_0, y_0) mit (x, y) verbindet. Definiere

$$f(x, y) := \int_{C'} P dx + Q dy.$$

Die Eigenschaft (1.4) liefert, dass f von der Wahl von C' unabhängig ist. \square

Im Allgemeinen ist die Bedingung (1.2) nicht hinreichend.

Beispiel 1.5. $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$,

$$\omega = -\frac{y}{x^2 + y^2}dx + \frac{x}{x^2 + y^2}dy.$$

Gäbe es ein f mit $\omega = df$, so wäre auch $\int_{S^1} \omega = 0$, wobei S^1 der Kreis ist (z.B. parametrisiert durch $t \mapsto (\cos t, \sin t)$). Das liefert einen Widerspruch, denn $\int_{S^1} \omega = 2\pi \neq 0$.

NB: Der Beweis der Behauptung 1.2 geht nicht durch, weil $S^1 \neq \partial D$ mit $D \subset U$.

Bemerkung 1.6. Man kann zeigen, dass für eine beliebige geschlossene abschnittsweise glatte Kurve $C \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ gilt

$$\int_C \left(-\frac{y}{x^2 + y^2}dx + \frac{x}{x^2 + y^2}dy \right) = 2\pi n,$$

wobei $n \in \mathbb{Z}$.

Sei nun $U \subset \mathbb{R}^3$, $\omega = P dx + Q dy + R dz$. Wenn $\omega = df$ für ein $f: U \rightarrow \mathbb{R}$, dann haben wir notwendigerweise

$$\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \text{und} \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}. \quad (1.7)$$

Behauptung 1.8. Sei U konvex. Dann ist die Bedingung (1.7) auch hinreichend.

Der Beweis ist analog, man benutze nur anstatt des Satzes von Green der Satz von Stokes:

$$\int_C P dx + Q dy + R dz = \iint_{\Sigma} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy.$$

Behauptung 1.9. Die Bedingung (1.7) ist auch im $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ hinreichend.

Beweisidee. Sei $C \subset \mathbb{R}^3$ eine beliebige geschlossene abschnittsweise glatte Kurve. Dann gibt es eine abschnittsweise glatte Fläche $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$, s.d. $\partial\Sigma = C$. Falls $0 \in \Sigma$, liefert eine (kleine) Störung $\Sigma' \subset \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, s.d. $\partial\Sigma' = C$. □

Im Allgemeinen ist die Bedingung (1.7) nicht hinreichend.

Beispiel 1.10. $U = \mathbb{R}^3 \setminus \{z\text{-Axis}\}$,

$$\omega = -\frac{y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy.$$

Schlussfolgerung. Die Bedingung (1.7) ist hinreichend, sobald U keine ‘‘Löcher’’ der Kodimension 2 enthält.

1.2 Ansatz einer Konstruktion.

Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ eine beliebige Teilmenge (verstanden als topologischer Raum). Definiere $Z_1(X)$ als die freie abelsche Gruppe erzeugt durch (orientierten) geschlossenen Kurven, d.h.

$$C \in Z_1(X) \implies C = n_1 C_1 + \dots + n_k C_k,$$

wobei $n_j \in \mathbb{Z}$. Definiere

$$\int_C \omega = \sum n_k \int_{C_k} \omega.$$

Bemerkung 1.11. Wenn C_0 eine geschlossene Kurve, die durch eine Abbildung $f: [0, 1] \rightarrow X$ parametrisiert ist, $2C_0$ kann man als die Kurve mit der Parametrisierung $f \circ \varphi(t)$ verstehen, wobei

$$\varphi(t) = \begin{cases} 2t & t \in [0, \frac{1}{2}], \\ 2t - 1 & t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Ähnlich, bedeutet $-C_0$ die Kurve C_0 mit der umgekehrten Orientierung, d.h. die Parametrisierung ist $t \mapsto f(-t)$.

Sei vorübergehend $X \subset \mathbb{R}^2$ eine *offene* Teilmenge. Wir wollen eine Äquivalenzrelation \sim definieren, so dass

$$C \sim C' \implies \int_C \omega = \int_{C'} \omega$$

gilt für alle $\omega = P dx + Q dy$, die (1.2) erfüllen. Der Satz von Green (oder Stokes im Fall von $U \subset \mathbb{R}^3$) schlägt das Folgende vor:

$$C \sim C' \iff \exists \Sigma \text{ mit } \partial \Sigma = C \cup -C'. \quad (1.12)$$

Hier sind C und C' orientierten Kurven, Σ ist eine orientierte Fläche und $\partial \Sigma = C \cup -C'$ als **orientierte** Kurven. Diese Definition ergibt Sinn auch wenn $X \subset \mathbb{R}^n$ nicht unbedingt offen ist.

Allgemeiner, ein Zykel $C = C_1 + \dots + C_k$ heisst nullhomolog, d.h. $C \sim 0$, falls

$$\exists \Sigma \text{ mit } \partial \Sigma = C_1 \cup \dots \cup C_n.$$

Dabei kann die Bedingung (1.12) als $C + (-C') \sim 0$ geschrieben werden.

Beispiel 1.13. Nullhomologer Zykel auf der Sphere ohne zwei Punkte.

Noch allgemeiner, jede lineare Kombination der nullhomologen Zykeln ist auch nullhomolog.

$$Z_1(X) \supset B_1(X) = \{\text{nullhomologe Zykeln}\}.$$

$$H_1(X) := Z_1(X)/B_1(X) \text{ die erste Homologiegruppe von } X.$$

Beispiel 1.14. $H_1(S^2 \setminus \{p, q\}) \cong \mathbb{Z}$.

Probleme: Die Kurven C dürfen Singularitäten und Selbstschittpunkte haben. Das gleiche gilt auch für die Flächen Σ .

Allgemeiner:

$Z_n(X)$ erzeugt durch die orientierten n -dimensionalen Flächen ohne Rand

$Z_n(X) \supset B_n(X)$ die Untergruppe erzeugt durch die Ränder von $(n + 1)$ -dimensionalen Flächen. $H_n(X) := Z_n(X)/B_n(X)$ die n . Homologiegruppe von X .

Im Allgemeinen, wollen wir jedem topologischen Raum X eine Sequenz von abelschen Gruppen $H_0(X), H_1(X), \dots, H_n(X), \dots$ zuordnen, so dass gilt:

- (a) Jede stetige Abbildung $f: X \rightarrow Y$ induziert eine Sequenz von Homomorphismen $f_*: H_n(X) \rightarrow H_n(Y)$;
- (b) $(f \circ g)_* = f_* \circ g_*$, $id_* = id$.
- (c) $H_0(\{pt\}) = \mathbb{Z}$ und $H_n(\{pt\}) = 0 \forall n \geq 1$.
- (d) $H_n(S^n) = \mathbb{Z}$ sobald $n \geq 1$ (kanonisch) und $H_k(S^n) = 0 \forall k \geq n + 1$ (Allgemeiner, für jede kompakte orientierte zusammenhängende Mannigfaltigkeit M der Dimension n gilt: $H_n(M) = \mathbb{Z}$ und $H_k(M) = 0 \forall k > n + 1$).
- (e) $f \simeq g \implies f_* = g_*$.

Dabei zwei stetige Abbildungen heißen homotop ($f \simeq g$), wenn es eine stetige Abbildung $h: X \times [0, 1]$ gibt, so dass gilt:

$$h|_{X \times 0} = f \quad \text{und} \quad h|_{X \times 1} = g.$$

Frage 1.15. Warum sind die Eigenschaften (a)-(e) interessant?

Um diese Frage zu beantworten, brauchen wir erst einige Hilfsüberlegungen.

Behauptung 1.16. Ist f ein Homöomorphismus, so ist jedes $f_*: H_n(X) \rightarrow H_n(Y)$ ein Isomorphismus.

Beweis. $id_{H_n} = id_* = (f \circ f^{-1})_* = f_* \circ (f^{-1})_* \implies f_*$ ist einen Isomorphismus und $(f_*)^{-1} = (f^{-1})_*$. □

Behauptung 1.17. Sei $B_n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| \leq 1\}$ der Ball. Es gilt: $H_k(B_n) = 0 \forall k \geq 1$.

Beweis. Sei $c: B_n \rightarrow \{0\}$ die konstante Abbildung. Die Abbildung $h(x, t) = tx$, $t \in [0, 1]$ ist eine Homotopie zwischen id_B und $\iota \circ c$, wobei $\iota: \{0\} \rightarrow B_n$ die Inklusion ist. Also, $id = \iota_* \circ c_* \implies H_k(B_n) = 0 \forall k \geq 1$. □

1.3 Der Satz von Brouwer.

Behauptung 1.18. Es gibt keine stetige Abbildung $g: B_n \rightarrow \partial B_n = S^{n-1}$ mit der Eigenschaft: $g(x) = x$ sobald $x \in S^{n-1}$.

Beweis. Sei $n = 1$. Es existiert keine stetige surjektive Abbildung $g: [-1, 1] \rightarrow \{\pm 1\}$, da der Zielraum nicht zusammenhängend ist.

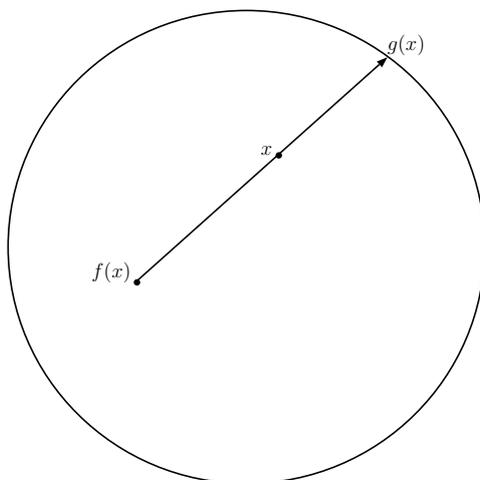
Sei $n \geq 2$. Angenommen, es existiert ein solches g . Dann gilt:

$$id_{S^{n-1}} = g \circ \iota_{S^{n-1}} \implies (id_{S^{n-1}})_* = g_* \circ (\iota_{S^{n-1}})_* = 0 \text{ auf } H_{n-1}(S^{n-1}) \implies H_{n-1}(S^{n-1}) = 0.$$

Das ist ein Widerspruch. □

Satz 1.19 (Brouwer). Für jede stetige Abbildung $f: B_n \rightarrow B_n$ gibt es ein Fixpunkt.

Beweis. Es existiere ein $f: B_n \rightarrow B_n$ ohne Fixpunkte. Dann gibt es auch ein $g: B_n \rightarrow S^{n-1}$



mit $g|_{S^{n-1}} = id$. Das widerspricht der Behauptung 1.18. □

1.4 Der Grad einer Abbildung und der Fundamentalsatz der Algebra

Sei $n \geq 1$. Wähle ein Erzeuger $\alpha \in H_n(S^n)$, d.h., $H_n(S^n) = \mathbb{Z} \cdot \alpha$.

Definition 1.20. Für eine beliebige stetige Abbildung $f: S^n \rightarrow S^n$ definiere $\deg(f) \in \mathbb{Z}$ durch

$$f_*\alpha = \deg(f)\alpha.$$

Der Grad hängt nicht von der Wahl der Erzeuger, denn: $f_*(-\alpha) = -f_*\alpha = -\deg(f)\alpha = \deg(f)(-\alpha)$.

Lemma 1.21. *Der Grad hat folgende Eigenschaften:*

- (i) $\deg(id) = 1$;
- (ii) $\deg(f \circ g) = \deg f \cdot \deg g$;
- (iii) $f \simeq g \implies \deg f = \deg g$;
- (iv) $\deg(\text{konst. Abbildung}) = 0$.

□

Lemma 1.22. Sei $S^1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. Sei ferner $f_n: S^1 \rightarrow S^1$ gegeben durch $f_n(z) = z^n$, $n \in \mathbb{Z}$. Dann gilt

$$\deg f_n = n.$$

Beweis. Die parametrisierte Kurve

$$\alpha: [0, 2\pi] \rightarrow S^1, \quad \alpha(t) = \cos t + \sin t i = e^{ti},$$

erzeugt $H_1(S^1)$. Da $f_n \circ \alpha(t) = e^{nti} = \cos(nt) + \sin(nt)i$, bekommen wir aus der Definition des Grades, dass $\deg f_n = n$ gilt. □

Satz 1.23 (Der Fundamentalsatz der Algebra). *Jedes nicht konstante Polynom $p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0$, $a_j \in \mathbb{C}$ besitzt mindestens eine komplexe Nullstelle.*

Beweis. Identifiziere S^1 und $S_r^1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = r\} \cong S^1$ mittels des Homöomorphismes

$$S^1 \rightarrow S_r^1, \quad z \mapsto rz.$$

Der Beweis besteht aus drei Schritten.

Schritt 1. Sei $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ eine stetige Abbildung ohne Nullstellen. Für jedes r ist

$$\frac{f}{|f|}: S_r^1 \rightarrow S^1 \tag{1.24}$$

homotop zu einer konstanten Abbildung.

In der Tat, betrachte

$$F(z, t) = \frac{f(tz)}{|f(tz)|}, \quad z \in S^1, t \in [0, r].$$

Das ist eine Homotopie zwischen (1.24) und einer konstanten Abbildung.

Schritt 2. Sei $p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0$ ein Polynom ohne Nullstellen. Es gibt ein $R > 0$ mit der Eigenschaft: $\forall r \geq R$ ist die Einschränkung von $p/|p|$ auf S_r^1 homotop zu f_n .

Für alle $z \in C$ mit $|z| \geq 1$ gilt:

$$\begin{aligned} |a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0| &\leq |a_{n-1}||z|^{n-1} + \dots + |a_1||z| + |a_0| \\ &\leq n \max\{|a_{n-1}|, \dots, |a_1|, |a_0|\} |z|^{n-1} \end{aligned}$$

Sei $R > n \max\{|a_{n-1}|, \dots, |a_1|, |a_0|\}$ und $R > 1$. Für alle $r \geq R$ und alle $t \in [0, 1]$ hat das Polynom

$$p_t(z) = z^n + t(a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0)$$

keine Nullstellen auf S_r^1 , denn

$$|a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0| < Rr^{n-1} \leq r^n, \quad \text{sobald } |z| = r.$$

Dann ist

$$P(z, t) = \frac{p_t(z)}{|p_t(z)|} \Big|_{S_r^1}$$

eine Homotopie zwischen $p/|p|$ und f_n versehen als eine Abbildung auf S_r^1 .

Schritt 3. Wir beweisen den Fundamentalsatz der Algebra.

Es existiere ein p ohne Nullstellen. Bezeichne

$$q_r(z) = \frac{p(z)}{|p(z)|} \Big|_{S_r^1},$$

wobei $r \geq R$. Schritt 2 $\implies \deg q_r = n$. Schritt 1 $\implies \deg q_r = 0$. Also, p muss ein konstantes Polynom sein. Widerspruch. □

Kapitel 2

Singuläre Homologie

2.1 Freie abelsche Gruppe

Eine abelsche Gruppe G heißt frei über $A \subset G$, wenn $\forall g \in G$ es gibt eine einzige Darstellung $g = \sum_{a \in A} n_a a$, wobei $n_a \in \mathbb{Z}$ und $n_a \neq 0$ nur für endlich viele $a \in A$.

Eine beliebige Menge A erzeugt eine abelsche Gruppe $F(A)$, die ist frei über A . In der Tat,

$$F(A) := \{f: A \rightarrow \mathbb{Z} \mid f(a) \neq 0 \text{ nur für endlich viele } a \in A\}.$$

Ferner, die Funktionen

$$f_a(x) = \begin{cases} 1 & x = a, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \quad a \in A$$

erzeugen $F(A)$, d.h., $F(A)$ ist frei über A .

Bemerkung 2.1. Sei $f \in F(A)$ beliebig. Dann gilt

$$f = \sum_{a \in A} f(a) f_a.$$

Insbesondere, kann man $F(A)$ als die Gruppe aller *endlichen* formalen Linearkombinationen $\sum_{a \in A} n_a a$ verstehen, wobei $n_a \in \mathbb{Z}$.

2.2 Singuläre Simplexes

Seien x_0, x_1, \dots, x_k beliebige Punkte in \mathbb{R}^n mit der Eigenschaft: $x_1 - x_0, \dots, x_k - x_0$ sind linear unabhängig.

Definition 2.2.

$$\Delta_k = \Delta(x_0, \dots, x_k) = \left\{ x = \sum_{i=0}^k t_i x_i \mid t_i \in [0, 1], \sum_{i=0}^k t_i = 1 \right\}$$

heißt der k -Simplex aufgespannt von x_0, \dots, x_k .

Beispiel 2.3.

- 0) Wenn $k = 0$, $\Delta(x_0) = \{x_0\}$.
- 1) Wenn $k = 1$, $\Delta(x_0, x_1)$ ist die Strecke $[x_0, x_1]$.
- 2) Wenn $k = 2$, $\Delta(x_0, x_1, x_2)$ ist der Dreieck mit den Eckpunkte x_0, x_1, x_2 .
- 3) Wenn $k = 3$, $\Delta(x_0, x_1, x_2, x_3)$ ist ein Tetraeder.

Bemerkung 2.4. Die Darstellung $x = \sum_{i=0}^k t_i x_i$ eines Punktes in Δ ist eindeutig. In der Tat, $\sum t_i x_i = \sum s_i x_i, \sum t_i = 1 = \sum s_i \implies$

$$0 = \sum (t_i - s_i) x_i = \sum (t_i - s_i) x_i - \sum (t_i - s_i) x_0 = \sum (t_i - s_i) (x_i - x_0) \implies t_i = s_i.$$

Dabei heißen $(t_0, t_1, \dots, t_k) \in [0, 1]^{k+1}$ die baryzentrische Koordinaten des Punktes $x \in \Delta$. Insbesondere, jeder k -Simplex ist zum Standard-Simplex $\Delta(e_1, \dots, e_k, e_{k+1}) \subset \mathbb{R}^{k+1}$ isomorph, wobei e_1, \dots, e_{k+1} die Standard-Basis von \mathbb{R}^{k+1} ist.

Definition 2.5. Sei X ein topologischer Raum und Δ_k ein k -Simplex. Ein singulärer p -Simplex in X ist eine stetige Abbildung $f: \Delta_k \rightarrow X$.

Insbesondere, ein singulärer 0-Simplex kann als ein Punkt im X versehen werden, ein singulärer 1-Simplex kann als ein Weg im X versehen werden usw.

Bemerkung 2.6. Die Abbildung f in der obigen Definition muss nicht injektiv sein, insbesondere kann das Bild von f singulär sein.

Sei $f: \Delta_k \rightarrow X$ ein singulärer k -Simplex. Der singuläre $(k - 1)$ -Simplex

$$\partial^i f: \Delta_{k-1} \rightarrow X, \quad \partial^i f(t_0, \dots, t_{k-1}) = f(t_0, \dots, t_{i-1}, 0, t_i, \dots, t_k)$$

heißt die i -te Seitenfläche von f .

Bild

Definition 2.7. Bezeichne $S_k(X)$ die freie abelsche Gruppe, die durch alle singuläre k -Simplizes erzeugt ist. Elemente von $S_k(X)$, d.h. formale endliche Linearkombinationen der Gestalt

$$\sigma = \sum n_i f_i, \quad n_i \in \mathbb{Z},$$

heißen singuläre k -Ketten. Die $(k - 1)$ -Kette

$$\begin{aligned} \partial f &= \partial^0 f - \partial^1 f + \partial^2 f - \dots = \sum_{j=0}^k (-1)^j \partial^j f, \\ \partial \sigma &= \sum_i n_i \sum_j (-1)^j \partial^j f_i \end{aligned} \tag{2.8}$$

heißt der Rand von f bzw. σ .

Bild

Proposition 2.9. $\partial_{k-1} \circ \partial_k = 0$ (kurz $\partial^2 = 0$), d.h. der Homomorphismus

$$S_k(X) \xrightarrow{\partial_k} S_{k-1}(X) \xrightarrow{\partial_{k-1}} S_{k-2}(X)$$

ist der Nullhomomorphismus.

Beweis. Der Beweis besteht aus zwei Schritte.

Schritt 1. Sei f ein singulärer Simplex. Für $j \geq i$ gilt:

$$\partial^j \partial^i f = \partial^i \partial^{j+1} f.$$

In der Tat,

$$\begin{aligned} \partial^j(\partial^i f)(t_0, \dots, t_{k-2}) &= \partial^i f(t_0, \dots, t_{j-1}, 0, t_j, \dots, t_{k-2}) \\ &= f(t_0, \dots, t_{i-1}, 0, t_i, \dots, t_{j-1}, 0, t_j, \dots, t_{k-2}); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial^i(\partial^{j+1} f)(t_0, \dots, t_{k-2}) &= \partial^{j+1} f(t_0, \dots, t_{i-1}, 0, t_i, \dots, t_{k-2}) \\ &= f(t_0, \dots, t_{i-1}, 0, t_i, \dots, t_{j-1}, 0, t_j, \dots, t_{k-2}). \end{aligned}$$

Schritt 2. Für jeden singulären k -Simplex gilt $\partial(\partial f) = 0$.

Das folgt aus der folgenden Rechnung:

$$\begin{aligned} \partial(\partial f) &= \sum_{i=0}^k (-1)^i \partial^i(\partial f) = \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^k (-1)^{i+j} \partial^i \partial^j f = \sum_{j \geq i} + \sum_{j < i} (-1)^{i+j} \partial^i \partial^j f \\ &= \sum_{j \geq i} (-1)^{i+j} \partial^{j-1} \partial^i f + \sum_{j < i} (-1)^{i+j} \partial^i \partial^j f \\ &= \sum_{p+1 \geq q} (-1)^{p+q+1} \partial^p \partial^q f + \sum_{p > q} (-1)^{p+q} \partial^p \partial^q f \quad p := j-1, q := i \\ &= 0. \end{aligned}$$

□

Korollar 2.10. $\text{im } \partial_k \subset \ker \partial_{k-1}$.

Die Elemente von $\ker \partial_{k-1}$ heißen Zyklen, und die Elemente von $\text{im } \partial_k$ heißen Ränder.

Definition 2.11. $H_{k-1}(X) := \ker \partial_{k-1} / \text{im } \partial_k$ heißt die $(k-1)$ -te singuläre Homologiegruppe von X (mit ganzzahligen Koeffizienten). Insbesondere, $H_0(X) := S_0(X) / \text{im } \partial_1$.

2.3 Eigenschaften der Homologiegruppen und induzierte Abbildungen

Proposition 2.12.

$$X \text{ wegzusammenhängend} \implies H_0(X) \cong \mathbb{Z}.$$

Beweis. $S_0(X)$ ist die freie abelsche Gruppe erzeugt durch die Punkte von X . Sei f ein singulärer 1-Simplex, d.h. $f: [0, 1] \rightarrow X$ ist ein Weg im X . Nach Definition des Randes, $\partial f = x_1 - x_0$, wobei $x_1 = f(1)$ und $x_0 = f(0)$. Nach Voraussetzung, kann man zwei beliebige Punkte durch einen Weg verbinden, d.h. für zwei beliebige Punkte $x_0, x_1 \in X$ gilt: $[x_0] = [x_1] \in H_0(X)$.

Definiere ein Homomorphismus $\alpha: S_1(X) \rightarrow \mathbb{Z}$ durch

$$\alpha\left(\sum n_i x_i\right) = \sum n_i.$$

Da $\alpha(\partial f) = 0$ für jeden singulären 1-Simplex, liefert α einen surjektiven Homomorphismus $H_0(X) \rightarrow \mathbb{Z}$.

Sei nun $\alpha([\sum n_i x_i]) = 0$. Dann $[\sum n_i x_i] = \sum n_i [x_i] = (\sum n_i)[x_0] = 0$, d.h. α ist injektiv, d.h. α ist ein Isomorphismus. □

Übungsaufgabe 2.13. Wenn X nicht unbedingt wegzusammenhängend ist, gilt das Folgende: $H_0(X) \cong \mathbb{Z}^m$, wobei m die Anzahl der Wegzusammenhangskomponenten von X ist.

Proposition 2.14.

$$H_k(\{pt\}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & k = 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beweis. Für $k = 0$ folgt die Behauptung aus der vorherigen Proposition. Sei also $k > 0$. Für jedes k existiert genau ein singulärer k -Simplex in $\{pt\}$, nämlich die konstante Abbildung, die wir als $c_k: \Delta^k \rightarrow \{pt\}$ bezeichnen. Deren Rand ist

$$\partial c_k = \sum_{i=0}^k (-1)^i \underbrace{c_k \circ d_i}_{c_{k-1}} = \begin{cases} 0, & \text{für } k \text{ ungerade} \\ c_{k-1} & \text{für } k \text{ gerade} \end{cases}$$

Damit folgt

$$Z_k(\{pt\}) = \begin{cases} S_k(\{pt\}) & \text{für } k \text{ ungerade} \\ 0 & \text{für } k \text{ gerade} \end{cases}$$

und

$$B_k(\{pt\}) = \begin{cases} S_k(\{pt\}) & \text{für } k \text{ ungerade} \\ 0 & \text{für } k \text{ gerade} \end{cases}$$

Also $H_k(\{pt\}) = Z_k(\{pt\})/B_k(\{pt\}) = 0$. □

Satz 2.15. Sei $f: X \rightarrow Y$ stetig. Dann induziert f Gruppenhomomorphismen

$$f_*: H_k(X) \rightarrow H_k(Y)$$

und für $g: Y \rightarrow Z$ stetig gilt:

$$(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$$

Schließlich gilt $(\text{id}_X)_* = \text{id}$.

Beweis. Definiere zunächst Gruppenhomomorphismen zwischen den Kettenkomplexen durch

$$\begin{aligned} f_{\#}: S_k(X) &\rightarrow S_k(Y), \\ \sigma &\mapsto f \circ \sigma \text{ für } \sigma: \Delta^k \rightarrow X. \end{aligned}$$

Dann gilt für alle singulären k -Simplizes $\sigma: \Delta^k \rightarrow X$:

$$\begin{aligned} (f_{\#} \partial^i(\sigma))(t_0, \dots, t_{k-1}) &= f(\sigma(t_0, \dots, t_{i-1}, 0, t_i, \dots, t_{k-1})) \\ &= (f_{\#} \sigma)(t_0, \dots, t_{i-1}, 0, t_i, \dots, t_{k-1}) \\ &= \partial^i(f_{\#} \sigma)(t_0, \dots, t_{k-1}), \end{aligned}$$

und somit $f_{\#} \partial^i = \partial^i f_{\#}$ und $f_{\#}$ ist eine Kettenabbildung: $f_{\#} \partial = \partial f_{\#}$.

Insbesondere werden Zykel auf Zykel und Ränder auf Ränder abgebildet:

$$\begin{aligned} f_{\#}(Z_k(X)) &\subset Z_k(Y), \\ f_{\#}(B_k(X)) &\subset B_k(Y). \end{aligned}$$

Damit erhalten wir einen wohldefinierten Gruppenhomomorphismus zwischen den Homologiegruppen:

$$f_*: H_k(X) = Z_k(X)/B_k(X) \rightarrow Z_k(Y)/B_k(Y) = H_k(Y)$$

$$f_*([\sigma]) := [f_{\#}(\sigma)].$$

Weiterhin gilt für jeden singulären k -Simplex $\sigma: \Delta^k \rightarrow X$:

$$g_{\#} \circ f_{\#}(\sigma) = g_{\#}(f \circ \sigma) = g \circ f \circ \sigma = (g \circ f)_{\#}(\sigma),$$

$$g_* \circ f_*([\sigma]) = g_*[f_{\#}(\sigma)] = [g_{\#} \circ f_{\#}(\sigma)] = [(g \circ f)_{\#}(\sigma)] = (g \circ f)_*([\sigma]),$$

$$(\text{id}_X)_{\#}(\sigma) = \sigma,$$

$$(\text{id}_X)_*([\sigma]) = [(\text{id}_X)_{\#}(\sigma)] = [\sigma].$$

und somit $g_* \circ f_* = (g \circ f)_*$ und $(\text{id}_X)_* = \text{id}$. □

Bemerkung 2.16. Das gleiche Argument wie in **Behauptung 1.16** zeigt nun, dass jeder Homöomorphismus $f: X \rightarrow Y$ Isomorphismen $f_*: H_k(X) \rightarrow H_k(Y)$ induziert. Wir werden in Kürze sehen, dass die Voraussetzung ‘‘Homöomorphismus’’ hier deutlich abgeschwächt werden kann.

Definition 2.17. Ein topologischer Raum X heißt kontrahierbar, falls es einen Punkt $x_0 \in X$ gibt, so dass die Identität id_X homotop zur konstanten Abbildung c_{x_0} ist.

Proposition 2.18. Sei X kontrahierbar. Dann gilt:

$$H_n(X) = 0 \text{ für alle } n \neq 0.$$

Beweis. Definiere $\varepsilon_k: S_k(X) \rightarrow S_k(X)$ durch

$$\varepsilon_0\left(\sum n_{\sigma}\sigma\right) := \left(\sum n_{\sigma}\right)\sigma_0,$$

$$\varepsilon_k := 0 \text{ für } k \neq 0,$$

wobei $\sigma_0: \Delta^0 \rightarrow \{x_0\} \subset X$ der konstante singuläre 0-Simplex ist.

Bemerke, dass dies eine Kettenabbildung ist, d.h. $\varepsilon_{k-1} \circ \partial_k = \partial_k \varepsilon_k$ für alle k .

Betrachte die Quotientenabbildung

$$\pi: \Delta^{k-1} \times [0, 1] \rightarrow \Delta^k \cong (\Delta^{k-1} \times [0, 1]) / (\Delta^{k-1} \times \{1\})$$

$$((t_0, \dots, t_{k-1}), u) \mapsto (u, (1-u)t_0, \dots, (1-u)t_{k-1}).$$

Sei nun $h: X \times [0, 1] \rightarrow X$ eine Homotopie zwischen id_X und c_{x_0} . Definiert $s: S_{k-1}(X) \rightarrow S_k(X)$ wie folgt: Da π eine Quotientenabbildung ist und $h|_{X \times \{1\}} \equiv x_0$, existiert zu jedem singulären $(k-1)$ -Simplex $\sigma: \Delta^{k-1} \rightarrow X$ eine eindeutige Abbildung $s(\sigma): \Delta^k \rightarrow X$ mit $h \circ (\sigma \times \text{id}) = s(\sigma) \circ \pi$. Aus der Definition von π folgt nun, dass

1. $\partial^i s(\sigma) = s(\partial^{i-1} \sigma)$ für $i > 0$,
2. $\partial^0(s(\sigma)) = \sigma$.

Also erhalten wir $\partial(s(\sigma)) = \sigma - \sigma_0$ für alle singulären 0-Simplizes σ . Und weiterhin für $\sigma \in S_k(X)$, $k > 0$:

$$\partial(s(\sigma)) = \partial^0(s(\sigma)) - \sum_{i=1}^k (-1)^{i-1} \partial^i(s(\sigma)) = \sigma - \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j s(\partial^{j-1} \sigma) = \sigma - s(\partial \sigma). \quad (2.19)$$

Insgesamt erhalten wird

$$\partial \circ s + s \circ \partial = \text{id} - \varepsilon = (\text{id}_X)_* - \varepsilon.$$

Für $k > 0$ ist somit die induzierte Abbildung auf Homologie $\text{id}_{S_k(X)} = (\text{id}_X)_* = \varepsilon_k = 0$, und damit $H_k(X) = 0$. □

2.4 Homotopieeigenschaften der Homologiegruppen

Satz 2.20. Seien $f, g: X \rightarrow Y$ homotope Abbildungen. Dann sind die induzierten Homomorphismen auf den Homologiegruppen gleich:

$$f_* = g_*.$$

Beweis. Der Beweis besteht aus drei Schritten.

Schritt 1. Sei

$$\eta_t: X \rightarrow X \times I, \quad \eta_t(x) = (x, t).$$

Für jede stetige Abbildung $f: X \rightarrow Y$ gilt: $(f \times id)_\# \eta_t^X = \eta_t^Y \circ f_\#$.

Dies folgt sofort aus der Beobachtung, dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\eta_t^X} & X \times I \\ f \downarrow & & \downarrow f \times id \\ Y & \xrightarrow{\eta_t^Y} & Y \times I \end{array}$$

kommutiert.

Schritt 2. Es gibt eine Sequenz der Homomorphismen $s_n^X: S_n(X) \rightarrow S_{n+1}(X \times I)$ mit der Eigenschaft:

$$\partial s_n^X + s_{n-1}^X \partial = \eta_{1\#} - \eta_{0\#}; \quad (2.21)$$

$$(f \times id_I)_\# \circ s_n^X = s_n^Y \circ f_\#. \quad (2.22)$$

Definiere $s_n = s_n^X$ induktiv. Für $n = 0$ und $x_0 \in X$ betrachte als ein 0-Simplex, setze

$$s_0 \sigma: \Delta_1 \rightarrow X \times I, \quad (t_0, t_1) \mapsto (x_0, t_1).$$

Dann gilt es: $\partial(s_0 \sigma) = (x_0, 1) - (x_0, 0)$, d.h. (2.21) gilt für $n = 0$. Dabei überprüft man die Gleichung (2.22) direkt.

Sei s_k definiert für alle $k < n$. Definiere erst s_n im Spezialfall, und zwar für id_{Δ_n} als n -Simplex $\iota_n \in S_n(\Delta_n)$. Es gilt

$$\begin{aligned} \partial \left(\underbrace{\eta_{1\#} \iota_n - \eta_{0\#} \iota_n - s_{n-1} \partial \iota_n}_{\in S_n(\Delta_n \times I)} \right) &= \eta_{1\#} \partial \iota_n - \eta_{0\#} \partial \iota_n - \partial s_{n-1} \partial \iota_n \\ &\stackrel{(2.21)}{=} \eta_{1\#} \partial \iota_n - \eta_{0\#} \partial \iota_n - (\eta_{1\#} \partial \iota_n - \eta_{0\#} \partial \iota_n - s_{n-2}^{\Delta_n} \partial^2 \iota_n) \\ &= 0. \end{aligned}$$

In dieser Rechnung wird (2.21) für $n - 1$ anstatt n verwendet. Da $\Delta_n \times I$ kontraktibel ist, gibt es ein $a \in S_{n-1}(\Delta \times I)$ so dass gilt:

$$\eta_{1\#} \iota_n - \eta_{0\#} \iota_n - s_{n-1} \partial \iota_n = \partial a.$$

Definiere $s_n(\iota_n) = a$. Mit dieser Definition gilt (2.21) für $\sigma = \iota_n$.

Im Allgemeinen, definiere $s_n^X(\sigma) = (\sigma \times id)_\# a$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \partial(s_n \sigma) &= \partial(\sigma \times id)_\# a = (\sigma \times id)_\# \partial a \\ &= (\sigma \times id)_\# (\eta_{1\#} l_n - \eta_{0\#} l_n - s_{n-1} \partial l_n) \\ &= \eta_{1\#} \sigma_\# l_n - \eta_{0\#} \sigma_\# l_n - s_{n-1} \sigma_\# \partial l_n && (2.22) + \text{Schritt 1} \\ &= \eta_{1\#} \sigma - \eta_{0\#} \sigma - s_{n-1} \partial \sigma. \end{aligned}$$

Dies beweist (2.21).

Es bleibt noch zu zeigen, dass auch (2.22) gilt. In der Tat,

$$(f \times id)_\# s_n \sigma = (f \times id)_\# (\sigma \times id)_\# a = (f \circ \sigma \times id)_\# a = s_n(f \sigma) = s_n(f_\# \sigma).$$

Schritt 3. Wir beweisen dieser Satz.

Sei h eine Homotopie zwischen f und g . Es gilt:

$$\partial(h_\# \circ s_n) + (h_\# \circ s_{n-1}) \partial = h_\# \partial s_n + h_\# (s_{n-1} \partial) = h_\# (\eta_{1\#} - \eta_{0\#}) = f_\# - g_\#.$$

Insbesondere, $f_\# - g_\# = \partial(h_\# \circ s_n)$ auf $\ker \partial$. Dies zeigt, dass $f_* = g_*$. □

Definition 2.23. Eine stetige Abbildung $f: X \rightarrow Y$ heißt eine Homotopieäquivalenz, wenn es eine stetige Abbildung $g: Y \rightarrow X$ gibt, so dass gilt:

$$g \circ f \simeq id_X, \quad \text{und} \quad f \circ g \simeq id_Y.$$

In diesem Fall heißen die Räume X und Y homotopieäquivalent.

Beispiel 2.24. 1) X und Y sind homöomorph $\implies X$ und Y sind homotopieäquivalent;

2) \mathbb{R}^n ist homotopieäquivalent zu $\{pt\}$;

3) $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ist homotopieäquivalent zu S^{n-1} .

Um 3) zu sehen, definiere $f: \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow S^n$ durch $f(x) = x/|x|$. Wenn $g: S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ die natürliche Inklusion ist, gilt $f \circ g = id_{S^{n-1}}$. Auf der anderen Seite,

$$h(x, t) = \frac{1}{t + (1-t)|x|} x, \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\},$$

ist eine Homotopie zwischen $g \circ f$ und $id_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}}$.

Korollar 2.25.

$$f \text{ Homotopieäquivalenz} \implies \forall n \quad f_*: H_n(X) \rightarrow H_n(Y) \text{ Isomorphismus.}$$

Beispiel 2.26.

$$H_k(\mathbb{R}^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & k = 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$H_k(\mathbb{R}^n \setminus \{pt\}) = H_k(S^{n-1}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & k = 0, n-1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

2.5 Exakte Sequenzen

Definition 2.27. Eine Sequenz von Homomorphismen (von abelschen Gruppen)

$$\cdots \longrightarrow A_{i+1} \xrightarrow{\alpha_{i+1}} A_i \xrightarrow{\alpha_i} A_{i-1} \longrightarrow \cdots \quad (2.28)$$

heißt exakt, wenn für alle i gilt: $\ker \alpha_i = \operatorname{im} \alpha_{i+1}$.

Einige Spezialfälle:

- (i) $0 \rightarrow A \xrightarrow{\alpha} B$ exakt $\Leftrightarrow \alpha$ injektiv;
- (ii) $A \xrightarrow{\alpha} B \rightarrow 0$ exakt $\Leftrightarrow \alpha$ surjektiv;
- (iii) $0 \rightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \rightarrow 0$ exakt $\Leftrightarrow \alpha$ Isomorphismus;
- (iv) $0 \rightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \rightarrow 0$ exakt $\Leftrightarrow \alpha$ injektiv, β surjektiv und $\ker \beta = \operatorname{im} \alpha$;
Insbesondere, β induziert einen Isomorphismus $C \cong B/A$.

Die Sequenz (iv) heißt eine kurze exakte Sequenz.

Beispiel 2.29. $0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\times n} \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rightarrow 0$ ist eine kurze exakte Sequenz, wobei $\times n$ für die Multiplikation mit einem festen $n \in \mathbb{Z}$ steht.

Seien A, B, C Komplexe, d.h.

$$A: \quad \cdots \longrightarrow A_{i+1} \xrightarrow{\partial} A_i \xrightarrow{\partial} A_{i-1} \longrightarrow \cdots$$

und analog für B und C . Eine Sequenz $0 \rightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \rightarrow 0$ von Komplexen ist ein kommutatives Diagramm der Art

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \cdots & \xrightarrow{\partial} & A_{n+1} & \xrightarrow{\partial} & A_n & \xrightarrow{\partial} & A_{n-1} & \xrightarrow{\partial} & \cdots \\
 & & \alpha_{n+1} \downarrow & & \alpha_n \downarrow & & \alpha_{n-1} \downarrow & & \\
 \cdots & \xrightarrow{\partial} & B_{n+1} & \xrightarrow{\partial} & B_n & \xrightarrow{\partial} & B_{n-1} & \xrightarrow{\partial} & \cdots \\
 & & \beta_{n+1} \downarrow & & \beta_n \downarrow & & \beta_{n-1} \downarrow & & \\
 \cdots & \xrightarrow{\partial} & C_{n+1} & \xrightarrow{\partial} & C_n & \xrightarrow{\partial} & C_{n-1} & \xrightarrow{\partial} & \cdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
 \end{array} \quad (2.30)$$

Dabei heißt eine solche Sequenz exakt, wenn jede vertikale Sequenz $0 \rightarrow A_n \rightarrow B_n \rightarrow C_n \rightarrow 0$ exakt ist.

Beispiel 2.31. Seien X, Y und Z topologische Räume und $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z$ stetige Abbildungen. Dann hat man eine Sequenz von Kettenkomplexen

$$0 \rightarrow S_*(X) \xrightarrow{f\#} S_*(Y) \xrightarrow{g\#} S_*(Z) \rightarrow 0,$$

die nicht unbedingt exakt ist. Unter welchen Voraussetzungen ist diese Sequenz exakt, wird etwas später beschrieben.

Proposition 2.32. Die Abbildungen α und β liefern Gruppenhomomorphismen $\alpha: H_*(A) \rightarrow H_*(B)$ und $\beta: H_*(B) \rightarrow H_*(C)$.

Beweis. Dies folgt sofort aus der Bedingung, dass (2.30) kommutiert. □

Satz 2.33. Eine kurze exakte Sequenz der Komplexen $0 \rightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \rightarrow 0$ induziert eine (lange) exakte Sequenz der Homologiegruppen:

$$\cdots \rightarrow H_n(A) \xrightarrow{\alpha} H_n(B) \xrightarrow{\beta} H_n(C) \xrightarrow{\delta} H_{n-1}(A) \xrightarrow{\alpha} H_{n-1}(B) \rightarrow \cdots$$

Bemerkung 2.34. Die Abbildung δ heißt der Bockstein-Homomorphismus.

Beweis. Der Beweis besteht aus vier Schritten.

Schritt 1. Wir definieren δ .

Sei $c \in C_n$, $\partial c = 0$. Da β_n surjektiv ist, gibt es ein $b \in B_n$ mit $\beta(b) = c$. Es gilt: $\beta(\partial b) = \partial(\beta(b)) = \partial c = 0$. Da $\alpha: A_{n-1} \rightarrow \ker \beta_{n-1}$ surjektiv ist, gibt es ein $a \in A_{n-1}$, so dass gilt: $\alpha(a) = \partial b$. Wir definieren

$$\delta[c] = [a].$$

Es bleibt zu zeigen, dass δ wohldefiniert ist. In der Tat, sei $c' = c + \partial c''$. Für $c'' \in C_{n+1}$ gibt es ein $b'' \in B_{n+1}$ mit $\beta(b'') = c'' \implies \beta(b + \partial b'') = c + \partial c'$. Dies heißt, dass $b' = b + \partial b'' + \alpha(a'')$, wobei $a'' \in A_n$. Ferner, $\partial b' = \partial b + 0 + \alpha(\partial a')$. Da α injektiv ist, gilt: $a' = a + \partial a''$, d.h. $[a] = [a']$.

Übungsaufgabe 2.35. Überprüfen Sie, dass δ einen Gruppenhomomorphismus ist.

Schritt 2. $\ker \alpha = \text{im } \delta$.

Sei $a \in A_{n-1}$ mit $[a] \in \ker \alpha$, d.h. $\alpha(a) = \partial b$ für ein $b \in B_n$. Es gilt $\partial \beta(b) = \beta(\partial b) = \beta(\alpha(a)) = 0$. Nach der Konstruktion von δ , gilt: $\delta[\beta(b)] = [a]$. D.h. $\ker \alpha \subset \text{im } \delta$.

Sei $a \in A_{n-1}$ mit $[a] \in \text{im } \delta$. Nach der Konstruktion von δ , $\alpha(a) = \partial b \implies \alpha[a] = 0$.

Schritt 3. $\ker \delta = \text{im } \beta$.

Sei $[c] \in \ker \delta$. Mit den Bezeichnungen des Schrittes 1, gilt: $a = \partial a'$ für ein $a' \in A_n$. Die Gleichungen

$$\partial(b - \alpha(a')) = \partial b - \alpha(\partial a') = \partial b - \alpha(a) = 0;$$

$$\beta(b - \alpha(a')) = \beta(b) = c;$$

zeigen, dass $\beta[b - \alpha(a')] = [c]$ gilt, d.h. $\ker \delta \subset \text{im } \beta$.

Die Inklusion $\text{im } \beta \subset \ker \delta$ folgt sofort aus der Konstruktion von δ .

Schritt 4. $\ker \beta = \text{im } \alpha$.

Sei $b \in B_n$ mit der Eigenschaft $\beta[b] = 0$, d.h. $\partial b = 0$, $\beta(b) = \partial c$ für ein $c \in C_{n+1}$. Da β surjektiv ist, gibt es ein $\hat{b} \in B_{n+1}$, so dass gilt: $\beta(\hat{b}) = c$. Ferner,

$$\beta(b - \partial \hat{b}) = \beta(b) - \partial \beta(\hat{b}) = \beta(b) - \partial c = 0.$$

Es folgt, dass es ein $a \in A_n$ gibt, so dass gilt: $\alpha(a) = b - \partial \hat{b}$. Dabei gilt:

$$\alpha(\partial a) = \partial \alpha(a) = \partial b - \partial^2 \hat{b} = 0.$$

Da α injektiv ist, bekommen wir $\partial a = 0$. Dies liefert $\alpha[a] = [b - \partial \hat{b}] = [b]$, d.h. $\ker \beta \subset \text{im } \alpha$.

Die Inklusion $\text{im } \alpha \subset \ker \beta$ folgt sofort aus $\alpha \circ \beta = 0$. □

2.6 Relative Homologiegruppen

Für jeden Unterraum $A \subset X$ definiere

$$S_n(X, A) := S_n(X)/S_n(A).$$

Die Randabbildung auf $S_n(X)$ induziert die Randabbildung auf $S_n(X, A)$ und wir erhalten einen neuen Kettenkomplex:

$$\cdots \rightarrow S_{n+1}(X, A) \xrightarrow{\partial} S_n(X, A) \xrightarrow{\partial} S_{n-1}(X, A) \rightarrow \cdots$$

Die Homologiegruppen dieses Komplexes $H_*(X, A)$ heißen relative Homologiegruppen. Dies heißt:

- Elemente von $H_n(X, A)$ sind durch relative Zyklen repräsentiert: $a \in S_n(X)$, $\partial a \in S_{n-1}(A)$;
- $[a] = 0 \in H_n(X, A) \iff a = \partial b + c, \quad b \in S_{n+1}(X), \quad c \in S_n(A).$

Die Definition von $S_n(X, A)$ liefert sofort, dass die Sequenz $0 \rightarrow S_*(A) \rightarrow S_*(X) \rightarrow S_*(X, A) \rightarrow 0$ exakt ist. Der Satz 2.33 liefert:

Satz 2.36. *Es gibt eine lange Sequenz der Homologiegruppen:*

$$\cdots \rightarrow H_n(A) \xrightarrow{i_*} H_n(X) \xrightarrow{j_*} H_n(X, A) \xrightarrow{\delta} H_{n-1}(A) \rightarrow \cdots$$

Dabei gilt:

- i_* ist durch die Inklusion $i: A \subset X$ induziert;
- j_* ist durch die Projektion $S_n(X) \rightarrow S_n(X, A)$ induziert;
- $\delta[a] = [\partial a]$.

□

Seien $A \subset X$ und $B \subset Y$. Eine Abbildung zwischen zwei Raumpaaren (X, A) und (Y, B) ist eine Abbildung $f: X \rightarrow Y$ mit der Eigenschaft: $f(A) \subset B$.

Proposition 2.37. *Jede Abbildung $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ induziert einen Gruppenhomomorphismus $H_*(X, A) \rightarrow H_*(Y, B)$.* □

Zwei stetigen Abbildungen $f, g: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ heißen homotop (als Abbildungen zwischen Raumpaaren), wenn es eine stetige Abbildung $h: (X \times I, A \times I) \rightarrow (Y, B)$ gibt, so dass gilt: $h(\cdot, 0) = f$ und $h(\cdot, 1) = g$. Bemerke, dass die Homotopie h in dieser Definition erfüllt: $h(A \times I) \subset A$.

Satz 2.38 (Ausschneidungseigenschaft). *Seien $Z \subset A \subset X$ mit der Eigenschaft: $\bar{Z} \subset \text{Int } A$. Dann induziert die Inklusionsabbildung $(X \setminus Z, A \setminus Z) \rightarrow (X, A)$ einen Isomorphismus der relativen Homologiegruppen:*

$$H_*(X \setminus Z, A \setminus Z) \cong H_*(X, A).$$

Beweis. Später. □

2.7 Die Homologiegruppen der Sphären

Satz 2.39. *Es gilt:*

$$H_k(S^0) = \begin{cases} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \text{wenn } k = 0; \\ 0 & \text{sonst;} \end{cases} \quad \text{und für } n \geq 1 \quad H_k(S^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{wenn } k = 0, n; \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beweis. Sei erst $k \geq 1$. Seien ferner

$$S^n = \{x = (x_0, \dots, x_{n+1}) \in S^{n+1} \mid x_{n+1} = 0\}, \\ S_+^{n+1} := \{x \in S^{n+1} \mid x_{n+1} \geq 0\}, \quad S_-^{n+1} := \{x \in S^{n+1} \mid x_{n+1} \leq 0\}.$$

Da S_{\pm}^{n+1} homöomorph zu $B_{n+1} = \{x \in \mathbb{R}^{n+2} \mid |x| \leq 1, x_{n+1} = 0\}$ ist, erhalten wir, dass S_{\pm}^{n+1} kontrahierbar ist. Aus der langen exakten Sequenz des Paares (S_-^{n+1}, S^n)

$$0 = H_{k+1}(S_-^{n+1}) \rightarrow H_{k+1}(S_-^{n+1}, S^n) \xrightarrow{\delta} H_k(S^n) \rightarrow H_k(S_-^{n+1}) = 0 \quad (2.40)$$

erhalten wir, dass δ einen Isomorphismus ist. Analog sieht man, dass die Abbildung

$$j_*: H_{k+1}(S^{n+1}) \rightarrow H_{k+1}(S^{n+1}, S_+^{n+1}) \quad (2.41)$$

auch einen Isomorphismus ist.

Zwischenbehauptung. Für alle $k \geq 0$ gilt:

$$H_{k+1}(S_-^{n+1}, S^n) \cong H_{k+1}(S^{n+1}, S_+^{n+1}).$$

Sei

$$Z := \{x \in S^{n+1} \mid x_{n+2} \geq \frac{1}{2}\}$$

Dann ist $h_*: H_{k+1}(S_-^{n+1}, S^n) \rightarrow H_{k+1}(S^{n+1} \setminus Z, S_+^{n+1} \setminus Z)$ einen Isomorphismus, da die Raumpaare (S_-^{n+1}, S^n) und $(S^{n+1} \setminus Z, S_+^{n+1} \setminus Z)$ homotopieäquivalent sind. Nach dem Satz 2.38 ist $e_*: H_{k+1}(S^{n+1} \setminus Z, S_+^{n+1} \setminus Z) \rightarrow H_{k+1}(S^{n+1}, S_+^{n+1})$ auch einen Isomorphismus. Dies liefert den Beweis der Zwischenbehauptung.

Eine Kombination der obigen Beobachtungen liefert eine Folge der Isomorphismen

$$H_{k+1}(S^{n+1}) \xrightarrow{j_*} H_{k+1}(S^{n+1}, S_+^{n+1}) \xrightarrow{p_*^{-1}} H_{k+1}(S_-^{n+1}, S^n) \xrightarrow{\delta} H_k(S^n)$$

sobald $k \geq 1$, wobei $p: (S_-^{n+1}, S^n) \rightarrow (S^{n+1}, S_+^{n+1})$ die Inklusion ist.

Wenn $k = 0$, definiere

$$\tilde{H}_0(S^n) := \ker(H_0(S^n) \rightarrow H_0(S_-^{n+1})) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{wenn } n = 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann liefert der gleiche Argument, dass $\tilde{H}_k(S^n) = \tilde{H}_{k+1}(S^{n+1})$ für alle $k \geq 0$, denn die Sequenzen (2.40) und (2.41) haben die folgende Gestalt:

$$0 = H_1(S_-^{n+1}) \rightarrow H_1(S_-^{n+1}, S^n) \xrightarrow{\delta} H_0(S^n) \rightarrow H_0(S_-^{n+1}) = \mathbb{Z}; \\ 0 = H_1(S_+^{n+1}) \rightarrow H_1(S^{n+1}) \rightarrow H_1(S^{n+1}, S_+^{n+1}) \rightarrow \underbrace{H_0(S_+^{n+1}) \rightarrow H_0(S^{n+1})}_{\text{Isomorphismus}} = \mathbb{Z}.$$

□

Korollar 2.42. Die Sphäre S^n ist nicht kontrahierbar. □

Definiere allgemein

$$\tilde{H}_0(X) := \ker \varepsilon, \quad \text{wobei } \varepsilon: H_0(X) \rightarrow \mathbb{Z}, \quad \varepsilon \left[\sum n_i x_i \right] := \sum n_i,$$

und $\tilde{H}_k(X) = H_k(X)$ für $k \geq 1$. Mit dieser Bezeichnungen hat man

$$\tilde{H}_k(S^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{wenn } k = 0, n; \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

für alle n .

2.8 Der Satz vom Igel

Zur Erinnerung (cf. Definition 1.20): Der Grad $\deg f$ einer Abbildung $f: S^n \rightarrow S^n$ ist eine ganze Zahl, die durch die Eigenschaft

$$f_* a = (\deg f) \cdot a \quad \text{für alle } a \in H_n(S^n)$$

bestimmt ist.

Definiere die *Einhängung* $\Sigma f: S^{n+1} \rightarrow S^{n+1}$ von f durch

$$\Sigma f(x_0, \dots, x_{n+1}) = \begin{cases} (0, \dots, 0, x_{n+1}) & \text{wenn } |x_{n+1}| = 1, \\ (tf(\frac{x_0}{t}, \dots, \frac{x_n}{t}), x_{n+1}) & \text{wenn } |x_{n+1}| < 1, \end{cases}$$

wobei $t = \sqrt{1 - x_{n+1}^2}$.

Proposition 2.43. $\deg \Sigma f = \deg f$.

Beweis. Aus dem Beweis des Satzes 2.39 bekommt man das kommutierende Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} H_{n+1}(S^{n+1}) & \xrightarrow{j_*} & H_{n+1}(S^{n+1}, S_+^{n+1}) & \xrightarrow{p_*^{-1}} & H_{n+1}(S_-^{n+1}, S^n) & \xrightarrow{\delta} & H_n(S_n) \\ \Sigma f_* \downarrow & & \Sigma f_* \downarrow & & \Sigma f_* \downarrow & & f_* \downarrow \\ H_{n+1}(S^{n+1}) & \xrightarrow{j_*} & H_{n+1}(S^{n+1}, S_+^{n+1}) & \xrightarrow{p_*^{-1}} & H_{n+1}(S_-^{n+1}, S^n) & \xrightarrow{\delta} & H_n(S_n). \end{array}$$

Bezeichne $\alpha := \delta \circ p_*^{-1} \circ j_*$. Dann gilt:

$$\Sigma f_*(a) = \alpha^{-1} \circ f_* \circ \alpha(x) = \alpha^{-1}((\deg f) \cdot \alpha(a)) = (\deg f) \cdot a \implies \deg \Sigma f = \deg f. \quad \square$$

Satz 2.44. Es gibt keine stetige Abbildung $f: S^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n+1} \setminus \{0\}$, sodass gilt: $f(x) \perp x \forall x \in S^{2n}$.

Beweis. Der Beweis besteht aus vier Schritten.

Schritt 1. Sei

$$s_0: S^n \rightarrow S^n, \quad (x_0, x_1, \dots, x_n) \mapsto (-x_0, x_1, \dots, x_n),$$

die Restriktion der Spiegelung an der Hyperebene $\{x_0 = 0\}$. Dann gilt: $\deg s_0 = -1$.

Die Sequenz der Isomorphismen

$$H_1(S^1) \xrightarrow{j_*} H_1(S^1, S_+^1) \xrightarrow{p_*^{-1}} H_1(S_-^1, S^0) \xrightarrow{\delta} \tilde{H}_0(S_0)$$

zeigt, dass

$$\sigma(t) = (\sin 2\pi t, \cos 2\pi t)$$

ein Erzeuger von $H_1(S^1)$ ist. Da $s \circ \sigma(t) = \sigma(-t)$, haben wir $s_*[\sigma] = -[\sigma]$, und somit gilt die Behauptung für $n = 1$.

Wenn s_0 die Spiegelung auf S^n ist, so ist Σs die Spiegelung auf S^{n+1} . Die Induktion nach n liefert der Beweis für alle $n > 1$.

Schritt 2. Sei $A: S^n \rightarrow S^n$ die antipodale Abbildung $x \mapsto -x$. Es gilt: $\deg A = (-1)^{n+1}$.

Die antipodale Abbildung auf S^n ist die Verknüpfung von $n + 1$ Spiegelungen.

Schritt 3. Sei $f: S^n \rightarrow S^n$ eine stetige Abbildung ohne Fixpunkte. Dann gilt: $f \simeq A$.

Die Abbildung

$$F(x, t) := \frac{tf(x) + (t-1)x}{|tf(x) + (t-1)x|}$$

ist wohldefiniert und liefert eine Homotopie zwischen f und A .

Schritt 4. Sei $f: S^n \rightarrow S^n$ eine stetige Abbildung mit der Eigenschaft: $f(x) \neq -x$ für alle $x \in S^n$. Dann ist f homotop zur Identitätsabbildung.

$$\begin{aligned} f(x) \neq -x &\implies A \circ f \text{ hat keine Fixpunkte} \implies A \circ f \simeq A \implies A \circ A \circ f \simeq A \circ A \\ &\implies f \simeq id. \end{aligned}$$

Schritt 5. Wir beweisen diesen Satz.

OBdA $f: S^{2n} \rightarrow S^{2n}$. Die Voraussetzung $f(x) \perp x$ garantiert, dass f keine Fixpunkte hat. Nach dem Schritt 3, ist f homotop zu A .

Andererseits ist f nach Schritt 4 homotop zu id . Dies liefert der Widerspruch, denn

$$A \simeq f \simeq id \implies 1 = \deg id = \deg A = (-1)^{2n+1} = -1.$$

□

Korollar 2.45. Jeder stetig gekämmte Igel hat mindestens einen Glatzpunkt. □

Bemerkung 2.46. Jede Sphäre der ungeraden Dimension $2n - 1 \geq 1$ lässt eine Abbildung $f: S^{2n-1} \rightarrow \mathbb{R}^{2n} \setminus \{0\}$ zu, sodass gilt: $f(x) \perp x \forall x \in S^{2n-1}$. In der Tat,

$$\begin{aligned} S^{2n-1} &= \{x = (x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{2n-2}, x_{2n-1}) \mid \sum x_i^2 = 1\} \\ f(x) &= (x_1, -x_0, x_3, -x_2, \dots, x_{2n-1}, -x_{2n-2}). \end{aligned}$$

Proposition 2.47. Sei $[S^n, S^n]$ die Menge aller Homotopieklassen der stetigen Abbildungen $S^n \rightarrow S^n$, wobei $n \geq 1$. Die Abbildung

$$[S^n, S^n] \rightarrow \mathbb{Z}, \quad [f] \mapsto \deg f \tag{2.48}$$

ist surjektiv.

Beweis. Wenn $n = 1$, hat man für ein beliebiges $k \in \mathbb{Z}$ eine explizite Abbildung $f_k: S^1 \rightarrow S^1$ des Grades k , und zwar $f_k(z) := z^k$. Wenn $n = 2$, hat man $\deg \Sigma f_k = \deg f_k = k$. Die Induktion nach n liefert den Beweis für alle n . □

Bemerkung 2.49. Man kann zeigen, dass die Abbildung (2.48) sogar bijektiv ist (Satz von Hopf). Auch ist $[S^n, S^n]$ eine Gruppe und (2.48) ist einen Gruppenhomomorphismus.

2.9 Gruppenoperationen auf Sphären

Sei G eine Gruppe. Man sagt, dass G auf einer Menge X operiert, wenn einen Homomorphismus $\rho: G \rightarrow \text{Aut}(X)$ gegeben ist, wobei $\text{Aut}(X)$ die Gruppe aller bijektiven Abbildungen auf X bezeichnet. Dabei heißt die Operation frei, wenn gilt:

$$\forall x \in X \quad \text{Stab}_x := \{g \in G \mid \rho(g)(x) = x\} = \{e\}.$$

Wenn X zusätzlich ein topologischen Raum ist, so fordert man auch, dass die Abbildung $\rho(g)$ für jedes $g \in G$ ein Homöomorphismus ist.

Satz 2.50. $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ist die einzige nicht-triviale Gruppe, die auf S^{2n} frei operiert.

Beweis. Operiere $G \neq \{e\}$ auf S^{2n} frei. Betrachte die Abbildung

$$d: G \rightarrow \{\pm 1\}, \quad d(g) = \deg(\rho(g)).$$

Dabei nimmt d die Werte in $\{\pm 1\}$ an, da jedes $\rho(g)$ ein Homöomorphismus ist. Außerdem gilt $d(gh) = \deg(\rho(g)\rho(h)) = d(g)d(h)$, d.h. d ist ein Gruppenhomomorphismus.

Wenn $g \neq e$, hat die Abbildung $\rho(g)$ keine Fixpunkte. Nach dem Schritt 4 des Beweises des Satzes 2.44, gilt: $\deg \rho(g) = \deg A = -1$, d.h. d hat trivialen Kern und ist surjektiv.

Die Zuordnung $-1 \mapsto A$ liefert eine freie Operation von $\{\pm 1\} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. □

Bemerkung 2.51. Auf ungerade-dimensionalen Sphären können weitere nicht-triviale Gruppen frei operieren. Zum Beispiel operiert $U(1) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} \cong S^1$ auf

$$S^{2n-1} = \{(z_0, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n \mid \sum |z_j|^2 = 1\}$$

mittels des Homomorphismus

$$w \mapsto f_w, \quad f_w(z) = (wz_0, \dots, wz_n).$$

2.10 Homologiegruppen von Graphen

Definition 2.52. Ein (endlicher topologischer) Graph ist ein Paar (G, V) , wobei G ein Hausdorff-Raum ist und $G \supset V$ eine endliche Teilmenge. Die Elemente von V heißen Knoten von G . Außerdem sind die folgende Eigenschaften erfüllt:

- $G \setminus V$ besteht aus endlich vielen Wegzusammenhangskomponenten $\hat{e}_1, \dots, \hat{e}_J$. Der Abschluss e_j jeder Komponente \hat{e}_j ist zum $[0, 1]$ homöomorph; Dabei heißt e_j eine Kante von G ;
- $e_j \setminus \hat{e}_j$ besteht aus zwei verschiedenen Ecken.

Das Ziel dieses Abschnittes ist es, das folgenden Resultat zu beweisen.

Satz 2.53. Die Gruppe $H_1(G)$ ist frei und es gilt:

$$\text{rk } H_0(G) - \text{rk } H_1(G) = \# \text{Knoten} - \# \text{Kanten} =: \chi(G).$$

Dabei heißt $\chi(G)$ die Euler-Charakteristik von G .

Der Beweis braucht einige Begriffe und Hilfsbehauptungen, die wir erst betrachten. Der eigentliche Beweis wird am Ende dieses Abschnitts gegeben.

Definition 2.54. Eine Teilmenge $A \subset B$ heißt Deformationsretrakt vom B , wenn gilt: Es gibt eine Abbildung $r: B \rightarrow A$, die eine Retraktion heißt, mit den Eigenschaften:

$$r \circ \iota = \text{id}_A \quad \text{und} \quad \iota \circ r \simeq \text{id}_B,$$

wobei $\iota: A \subset B$ die Inklusionsabbildung ist.

Es folgt unmittelbar aus der Definition, dass die induzierte Abbildungen

$$\iota_*: H_*(A) \rightarrow H_*(B) \quad \text{und} \quad r_*: H_*(B) \rightarrow H_*(A)$$

inverse zueinander sind. Insbesondere, sind diese beide Abbildungen Isomorphismen.

Lemma 2.55. Sei A ein Deformationsretrakt vom B , wobei $A \subset B \subset X$. Dann induziert die Inklusion $\iota: (X, A) \rightarrow (X, B)$ einen Isomorphismus

$$\iota_*: H_*(X, A) \rightarrow H_*(X, B).$$

Beweis. Der Beweis basiert auf dem folgenden algebraischen Lemma.

Lemma 2.56 (Fünferlemma). Seien die horizontalen Sequenzen im kommutativen Diagramm von abelschen Gruppen

$$\begin{array}{ccccccccc} A_1 & \longrightarrow & A_2 & \longrightarrow & A_3 & \longrightarrow & A_4 & \longrightarrow & A_5 \\ f_1 \downarrow & & f_2 \downarrow & & f_3 \downarrow & & f_4 \downarrow & & f_5 \downarrow \\ B_1 & \longrightarrow & B_2 & \longrightarrow & B_3 & \longrightarrow & B_4 & \longrightarrow & B_5 \end{array}$$

exakt. Ferner, seien f_2 und f_4 Isomorphismen, f_1 ein Epimorphismus und f_5 ein Monomorphismus. Dann ist f_3 ein Isomorphismus. □

Betrachte das kommutierende Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccc} H_k(A) & \longrightarrow & H_k(X) & \longrightarrow & H_k(X, A) & \longrightarrow & H_{k-1}(A) & \longrightarrow & H_{k-1}(X) \\ \iota_* \downarrow & & id \downarrow & & \iota_* \downarrow & & \iota_* \downarrow & & id \downarrow \\ H_k(B) & \longrightarrow & H_k(X) & \longrightarrow & H_k(X, B) & \longrightarrow & H_{k-1}(B) & \longrightarrow & H_{k-1}(X). \end{array}$$

Hier sind die horizontale Sequenzen die langen exakten Sequenzen der Paaren (X, A) und (X, B) . Außerdem repräsentieren die ersten zwei sowie die letzten zwei vertikale Pfeile Isomorphismen. Der Beweis folgt nun aus dem Fünferlemma. □

Aus der langen exakten Sequenz des Paares $([0, 1], \{0, 1\})$ folgt sofort das folgende Resultat.

Lemma 2.57. *Es gilt:*

$$H_k([0, 1], \{0, 1\}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{wenn } k = 1, \\ 0 & \text{wenn } k > 1. \end{cases}$$

□

Proposition 2.58. *Die Inklusion $\iota_j: (e_j, \partial e_j) \rightarrow (G, V)$ induziert einen Monomorphismus*

$$\iota_{j*}: H_k(e_j, \partial e_j) \rightarrow H_k(G, V).$$

Ferner, gilt es:

$$H_k(G, V) = \bigoplus_j \text{im } \iota_{j*} \cong \begin{cases} \mathbb{Z}^J & \text{wenn } k = 1, \\ 0 & \text{wenn } k > 1. \end{cases}$$

Beweis. Sei $f_j: [0, 1] \rightarrow e_j$ ein Homomorphismus, $a_j := f(\frac{1}{2})$, und $d_j := f([\frac{1}{4}, \frac{3}{4}])$. Bezeichne auch $A = \{a_1, \dots, a_J\}$ und $D = d_1 \sqcup \dots \sqcup d_J$. Betrachte das kommutierende Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} H_k(d_j, d_j \setminus \{a_j\}) & \xrightarrow{\alpha_1} & H_k(e_j, e_j \setminus \{a_j\}) & \xleftarrow{\beta_1} & H_k(e_j, \partial e_j) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ H_k(D, D \setminus A) & \xrightarrow{\alpha_2} & H_k(G, G \setminus A) & \xleftarrow{\beta_2} & H_k(G, V). \end{array}$$

Alle vier horizontalen Homomorphismen sind Isomorphismen. In der Tat, α_1 und α_2 sind Isomorphismen nach Ausschließungseigenschaft, β_1 und β_2 nach Lemma 2.55.

Da

$$H_k(D, D \setminus A) = \bigoplus_{j=1}^J H_k(d_j, d_j \setminus \{a_j\}) \cong \bigoplus_{j=1}^J H_k(e_j, \partial e_j),$$

erhalten wir die Behauptung dieser Proposition. □

Beweis des Satzes 2.53. Für den Beweis brauchen wir die folgende Tatsache aus Algebra.

Lemma 2.59. *Jede Untergruppe einer freien abelschen Gruppe ist frei.* □

Der Rest des Beweises besteht aus drei Schritten.

Schritt 1. $H_1(G)$ ist frei.

Die lange exakte Sequenz des Paares (G, V) liefert:

$$0 \rightarrow H_1(G) \rightarrow H_1(G, V) \rightarrow H_0(V) \rightarrow H_0(G) \rightarrow 0. \quad (2.60)$$

$H_1(G, V)$ ist frei $\implies H_1(G)$ ist frei.

Schritt 2. Sei $f: A \rightarrow F$ ein Epimorphismus zwischen zwei endlich erzeugten freien abelschen Gruppen. Dann gilt:

$$A = \ker f \oplus A_0,$$

wobei $f: A_0 \rightarrow F$ ein Isomorphismus ist und $\ker f$ frei.

Seien f_1, \dots, f_n Erzeuger von F . Wähle $b_1, \dots, b_n \in A$ mit der Eigenschaft: $f(b_j) = f_j$. Da $\ker f \subset A$ und A frei ist, ist auch $\ker A$ frei. Seien a_1, \dots, a_k Erzeugern von $\ker f$. Dann gilt: $A = \mathbb{Z}[a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_n]$. In der Tat, sei $a \in A$ beliebig.

$$f(a) \in F \implies f(a) = \sum m_j f_j \implies a - \sum m_j b_j \in \ker f \implies a - \sum m_j b_j = \sum p_i a_i.$$

Dabei ist die Darstellung $a = \sum m_j b_j + \sum p_i a_i$ eindeutig.

Schritt 3. Wir beweisen diesen Satz.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit, ist G wegzusammenhängend. Die exakte Sequenz (2.60) liefert

$$0 \rightarrow H_1(G) \rightarrow H_1(G, V) \rightarrow \tilde{H}_0(V) \rightarrow 0,$$

d.h. $H_1(G, V) \cong H_1(G) \oplus \tilde{H}_0(V)$. Dies liefert

$$\#\text{Kanten} = \text{rk } H_1(G, V) = \text{rk } H_1(G) + \text{rk } \tilde{H}_0(V) = \text{rk } H_1(G) + \#\text{Knoten} - 1.$$

□

Beispiel 2.61. Der Kreis $G = e_0 \cup e_1$, $V = \{v_1, v_2\}$. Es gilt: $\chi(G) = 0 \implies \text{rk } H_1(G) = \text{rk } H_0(G) = 1$.

Beispiel 2.62. Das Wedge-Produkt zweier Kreise. $G = e_0 \cup \dots \cup e_4$, $V = \{v_1, v_2, v_3\}$.

Bild

$$\chi(G) = -1 \implies \text{rk } H_1(G) = 2.$$

Definition 2.63. Ein Graph (G, V) heißt planar, wenn er eine Einbettung in die Ebene \mathbb{R}^2 besitzt, das heißt, er kann in der Ebene gezeichnet werden, so dass seine Kanten durch Jordan-Kurven repräsentiert werden, welche sich nur in gemeinsamen Endpunkten schneiden.

Jeder zusammenhängende planare Graph zerlegt \mathbb{R}^2 in endlich viele beschränkte Gebiete, die Flächen heißen, und ein unbeschränktes Gebiet, das auch als Fläche bezeichnet wird. Dabei ist jede beschränkte Fläche zur Kreisscheibe homöomorph (Satz von Schoenflies).

Satz 2.64 (Euler). Sei G ein planarer zusammenhängender Graph. Es gilt:

$$\#\text{Knoten} - \#\text{Kanten} + \#\text{Flächen} = 2. \tag{2.65}$$

Beweis. Mittels der stereografischen Projektion kann man G als einen Teilraum von S^2 verstehen. Dabei wird die unbeschränkte Fläche (zusammen mit dem Punkt im Unendlichen) auch zur Kreisscheibe homöomorph.

Ähnlich wie im Beweis der Proposition 2.58 zeigt man, dass

$$H_2(S^2, G) \cong \mathbb{Z}^F, \quad \text{und} \quad H_k(S^2, G) = 0 \quad \text{für alle } k \neq 2,$$

wobei F die Anzahl der Flächen ist. Aus der langen exakten Sequenz des Paares (S^2, G) bekommt man:

$$0 \rightarrow H_2(S^2) \rightarrow H_2(S^2, G) \rightarrow H_1(G) \rightarrow H_1(S^2) = 0.$$

Dies liefert

$$\mathbb{Z}^F \cong \mathbb{Z} \oplus H_1(G) \implies F = 1 + \text{rk } H_0(G) - \#\text{Knoten} + \#\text{Kanten}$$

nach dem Satz 2.53. Da nach Voraussetzung G zusammenhängend ist, bekommt man (2.65). □

Übungsaufgabe 2.66. Lösen Sie das ‘‘Strom/Gas/Wasser Rätsel’’: Drei Häuser in einer Straße stehen gegenüber von einem Wasserwerk, einem E-Werk und einem Gaswerk. Jedes der Häuser soll direkt mit jedem der Werke durch je eine Leitung verbunden werden. Die Leitungen dürfen sich nicht Kreuzen, müssen also direkt vom Werk zum Haus führen.

Um eine Lösung zu finden, betrachten Sie den Graph $K_{3,3}$:

Bild $K_{3,3}$

Zeigen Sie: Angenommen, dass $K_{3,3}$ planar ist, muss das Folgende gelten:

- (i) #Flächen $\leq \frac{1}{2}\#Kanten$;
- (ii) #Kanten $\leq 2\#Knoten - 4$.

Folgern Sie aus der letzten Eigenschaft, dass der Graph $K_{3,3}$ nicht planar ist.

2.11 Homologiegruppen einiger Flächen

2.11.1 Der Torus

Man kann den Torus \mathbb{T}^2 als ein Rechteck R mit verklebten gegenüberliegenden Seiten verstehen.

Bild

Sei $f: R \rightarrow \mathbb{T}^2$ die Verklebungsabbildung. Dann besteht $f(\partial R)$ aus zwei Kreisen A und B , die sich in einem Punkt schneiden.

Satz 2.67.

$$H_k(\mathbb{T}^2) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{wenn } k = 0, 2; \\ \mathbb{Z}^2 & \text{wenn } k = 1; \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beweis. Der Beweis besteht aus drei Schritten.

Schritt 1. Die Verklebungsabbildung $f: (R, \partial R) \rightarrow (\mathbb{T}^2, A \cup B)$ induziert einen Isomorphismus

$$f_*: H_*(R, \partial R) \rightarrow H_*(\mathbb{T}^2, A \cup B).$$

Sei m der Mittelpunkt des Rechtecks R und D eine Kreisscheibe mit dem Mittelpunkt m , die im Inneren von R enthalten ist. Ähnlich wie im Beweis der Proposition 2.58 zeigt man, dass im kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} H_k(R, \partial R) & \longrightarrow & H_k(R, R \setminus \{m\}) & \longleftarrow & H_k(D, D \setminus \{m\}) \\ f_* \downarrow & & \downarrow & & \downarrow f_* \\ H_k(\mathbb{T}^2, A \cup B) & \longrightarrow & H_k(\mathbb{T}^2, \mathbb{T}^2 \setminus \{f(m)\}) & \longleftarrow & H_k(f(D), f(D) \setminus \{f(m)\}) \end{array}$$

alle horizontale Pfeile Isomorphismen darstellen (dafür braucht man insbesondere, dass $A \cup B$ ein Deformationsretrakt von $\mathbb{T}^2 \setminus \{m\}$ ist). Da der rechte vertikale Pfeil einen Isomorphismus darstellt, erhalten wir, dass f_* (ganz links) auch ein Isomorphismus ist.

Schritt 2.

$$H_k(\mathbb{T}^2, A \cup B) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{wenn } k = 2, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dies folgt aus der langen exakten Sequenz des Paares $(R, \partial R)$.

Schritt 3. Wir beweisen diesen Satz.

Der nicht-triviale Teil der langen exakten Sequenz des Paares $(\mathbb{T}^2, A \cup B)$ hat die Gestalt

$$0 \rightarrow H_2(\mathbb{T}^2) \rightarrow H_2(\mathbb{T}^2, A \cup B) \xrightarrow{\delta} H_1(A \cup B) \rightarrow H_1(\mathbb{T}^2) \rightarrow 0,$$

wobei $H_2(\mathbb{T}^2, A \cup B) \cong \mathbb{Z}$ und $H_1(A \cup B) \cong \mathbb{Z}^2$ nach dem Beispiel 2.62.

Um δ zu bestimmen, betrachte das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} H_2(R, \partial R) & \xrightarrow{\delta'} & H_1(\partial R) \\ f_* \downarrow & & \downarrow f'_* \\ H_2(\mathbb{T}^2, A \cup B) & \xrightarrow{\delta} & H_1(A \cup B), \end{array}$$

wobei $f': \partial R \rightarrow A \cup B$ die Einschränkung von f ist. Eine Überlegung zeigt, dass die induzierte Abbildung f'_* der Nullhomomorphismus ist (*Warum?*). Da f_* und δ' Isomorphismen sind, muss δ auch der Nullhomomorphismus sein. Dies liefert

$$\begin{aligned} H_2(\mathbb{T}^2) \cong \ker \delta = H_2(\mathbb{T}^2, A \cup B) &\cong \mathbb{Z} && \text{und} \\ H_1(\mathbb{T}^2) \cong H_1(A \cup B) &\cong \mathbb{Z}^2. \end{aligned}$$

□

2.11.2 Die projektive Ebene

Man kann die projektive Ebene \mathbb{RP}^2 als ein Rechteck R mit verklebten gegenüberliegenden Seiten wie auf dem folgenden Bild verstehen.

Bild

Sei $f: R \rightarrow \mathbb{RP}^2$ die Verklebungsabbildung. Dann ist $A := f(\partial R)$ ein Kreis im \mathbb{RP}^2 .

Satz 2.68.

$$H_k(\mathbb{RP}^2) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{wenn } k = 0; \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \text{wenn } k = 1; \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beweis. Analog zum Beweis des Satzes 2.67 zeigt man, dass

$$f_*: H_*(R, \partial R) \rightarrow H_*(\mathbb{RP}^2, A)$$

ein Isomorphismus ist. Der nicht-trivialen Anteil der langen exakten Sequenz des Paares (\mathbb{RP}^2, A) ist von der Gestalt:

$$0 \rightarrow H_2(\mathbb{RP}^2) \rightarrow H_2(\mathbb{RP}^2, A) \xrightarrow{\delta} H_1(A) \xrightarrow{i_*} H_1(\mathbb{RP}^2) \rightarrow 0.$$

Um den Bockstein-Homomorphismus δ zu berechnen, betrachten wir das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} H_2(R, \partial R) & \xrightarrow{\delta'} & H_1(\partial R) \\ f_* \downarrow & & \downarrow f'_* \\ H_2(\mathbb{RP}^2, A) & \xrightarrow{\delta} & H_1(A). \end{array}$$

Eine Überlegung zeigt, dass f'_* die Multiplikation mit ± 2 ist (*Warum?*), d.h. δ ist injektiv und $H_1(A)/\text{im } \delta \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Insbesondere, $H_2(\mathbb{RP}^2) \cong \ker \delta = \{0\}$ und $i_*: H_1(A)/\text{im } \delta \rightarrow H_1(\mathbb{RP}^2)$ ist ein Isomorphismus. □

2.11.3 Die Kleinsche Flasche

Man kann die Kleinsche Flasche K als ein Rechteck R mit verklebten gegenüberliegenden Seiten wie auf dem folgenden Bild verstehen.



Satz 2.69.

$$H_k(K) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{wenn } k = 0; \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \text{wenn } k = 1; \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beweis. Übungsaufgabe. □

2.12 Die Mayer–Vietoris Sequenz

Seien $A, B \subset X$ zwei Teilmengen. Betrachte

$$\begin{aligned} i_*: H_*(A \cap B) &\rightarrow H_*(A), & j_*: H_*(A \cap B) &\rightarrow H_*(B), \\ k_*: H_*(A) &\rightarrow H_*(X) & \text{und} & l_*: H_*(B) &\rightarrow H_*(X). \end{aligned}$$

Mithilfe dieser Homomorphismen, definieren wir ferner

$$\begin{aligned} \varphi: H_*(A \cap B) &\rightarrow H_*(A) \oplus H_*(B), & \varphi(x) &= (i_*(x), j_*(x)) & \text{und} \\ \psi: H_*(A) \oplus H_*(B) &\rightarrow H_*(X), & \psi(u, v) &= k_*(u) - l_*(v). \end{aligned} \quad (2.70)$$

Satz 2.71. *Es gelte $X = \text{Int}(A) \cup \text{Int}(B)$. Für alle $k \in \mathbb{N}$ gibt es einen natürlichen Homomorphismus*

$$\Delta: H_k(X) \rightarrow H_{k-1}(A \cap B)$$

mit der Eigenschaft: Die Sequenz

$$\dots \rightarrow H_k(A \cap B) \xrightarrow{\varphi} H_k(A) \oplus H_k(B) \xrightarrow{\psi} H_k(X) \xrightarrow{\Delta} H_{k-1}(A \cap B) \rightarrow \dots \quad (2.72)$$

ist exakt. Diese Sequenz ist auch exakt für \tilde{H}_ sobald $A \cap B \neq \emptyset$.*

Beweis. Später. □

Beispiel 2.73 (Die Sphären). Seien

$$\begin{aligned} S^n &= \{(x_0, \dots, x_n) \mid \sum x_i^2 = 1\}, \\ A &:= S^n \setminus \{(0, \dots, 0, 1)\} \cong \mathbb{R}^n, & B &:= S^n \setminus \{(0, \dots, 0, -1)\} \cong \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Da $A \cap B \cong \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ und S^{n-1} ein Deformationsretrakt von $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ist, bekommen wir die folgende exakte Sequenz:

$$0 \rightarrow \tilde{H}_k(S^n) \rightarrow \tilde{H}_{k-1}(S^{n-1}) \rightarrow 0.$$

Dies zeigt sofort, dass die Homologiegruppen der Sphären wie im Satz 2.39 beschrieben sind.

Beispiel 2.74 (Der Torus). Seien $D_1 \subset D_2 \subset \text{Int}(R)$ zwei Kreisscheiben mit gleichem Mittelpunkt. Definiere $A := \mathbb{T}^2 \setminus D_1$ und $B := D_2$. Dann gilt das Folgende:

- Das Wedge-Produkt zweier Kreise ($A \cup B$ in der Notation des Abschnittes 2.11.1) ist einen Deformationsretrakt von $\mathbb{T}^2 \setminus D_1$;
- S^1 ist einen Deformationsretrakt von $A \cap B$.

Mithilfe dieser Eigenschaften sowie der Mayer–Vietoris Sequenz erhalten wir:

$$0 \rightarrow H_2(\mathbb{T}^2) \rightarrow H_1(S^1) \xrightarrow{\varphi} H_1(\mathbb{T}^2 \setminus D_1) \oplus 0 \rightarrow H_1(\mathbb{T}^2) \rightarrow \tilde{H}_0(S^1) = 0.$$

Da die Abbildung φ der Nullhomomorphismus ist (*Warum?*), erhalten wir:

$$H_2(\mathbb{T}^2) \cong H_1(S^1) \cong \mathbb{Z} \quad \text{und} \quad H_1(\mathbb{T}^2) \cong H_1(S^1 \vee S^1) \cong \mathbb{Z}^2.$$

Übungsaufgabe 2.75. Berechnen Sie die Homologiegruppen der projektiven Ebene und der Kleinschen Flasche mithilfe der Mayer–Vietoris Sequenz.

Definition 2.76. Seien X und Y zwei topologische Räume mit ausgewählten Punkten x_0 und y_0 . Der Raum

$$X \vee Y = (X \sqcup Y) / \{x_0, y_0\}$$

heißt das Wedge-Produkt von (X, x_0) und (Y, y_0) .

Proposition 2.77. *Es gelte: x_0 ist der Deformationsretrakt einer Umgebung $U \subset X$ und y_0 ist der Deformationsretrakt einer Umgebung $V \subset Y$. Dann gilt:*

$$\tilde{H}_*(X \vee Y) \cong \tilde{H}_*(X) \oplus \tilde{H}_*(Y).$$

Beweis. Seien $A = X \cup V$ und $B = Y \cup U$. Dann retrahiert $U \cup V$ auf dem Punkt $[x_0] = [y_0]$ im $X \vee Y$. Dann bekommt man die Behauptung dieser Proposition sofort aus der Mayer–Vietoris Sequenz. □

Korollar 2.78. *Sei $n \geq 1$. Es gilt:*

$$\tilde{H}_k\left(\bigvee_{j=1}^N S^n\right) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}^N & \text{wenn } k = n, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

□

2.12.1 Mannigfaltigkeiten

Definition 2.79. Eine (topologische) Mannigfaltigkeit der Dimension n ist ein Hausdorff-Raum¹ M mit der Eigenschaft: Jeder Punkt $m \in M$ besitzt eine Umgebung, die zu einer offenen Teilmenge im \mathbb{R}^n homöomorph ist.

Dabei heißen Mannigfaltigkeiten der Dimension 1 Kurven und Mannigfaltigkeiten der Dimension 2 heißen Flächen.

Übungsaufgabe 2.80. Zeigen Sie, dass für alle $x_0 \in \mathbb{R}^n$ und $r > 0$ der offene Ball $\mathring{B}_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x - x_0| < r\}$ zum \mathbb{R}^n homöomorph ist. Folgern Sie, dass jeder Punkt in einer Mannigfaltigkeit eine Umgebung besitzt, die zum \mathbb{R}^n homöomorph ist.

Beispiel 2.81.

¹ Zusätzlich, fordert man, dass M das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt, d.h. M hat eine höchstens abzählbare Basis der Topologie.

- \mathbb{R}^n ist eine n -Mannigfaltigkeit; Allgemeiner, jede offene Teilmenge vom \mathbb{R}^n ist eine n -Mannigfaltigkeit;
- S^n ist eine n -Mannigfaltigkeit;
- Der Torus, die projektive Ebene, das Möbiusband sowie die Kleinsche Flasche sind Flächen;
- $\{x^2 = y^2\} \subset \mathbb{R}^2$ ist keine Mannigfaltigkeit; Ähnlich, ist das Wedge-Produkt zweier Kreise keine Mannigfaltigkeit;
- $\{x^2 + y^2 = z^2\} \subset \mathbb{R}^3$ ist keine Mannigfaltigkeit; Ähnlich, ist das Wedge-Produkt zweier Sphären keine Mannigfaltigkeit.

Insbesondere, bekommen wir aus dem obigen Satz, dass jede *kompakte* Kurve zum Kreis homöomorph ist.

Seien M_1 und M_2 zwei (zusammenhängende) Mannigfaltigkeiten der gleichen Dimension n . Wähle $m_j \in M_j$ sowie Homöomorphismen $\varphi_j: B_1(0) \rightarrow U_j \subset M_j$ mit $\varphi_j(0) = m_j$. Mittels des Homöomorphismus $B_1(0) \setminus \{0\} \cong S^{n-1} \times (0, 1)$ induziert φ_j eine Identifizierung $S^{n-1} \times (0, 1) \rightarrow U_j \setminus \{m_j\}$.

Definition 2.82. Der Raum

$$M_1 \# M_2 := (M_1 \setminus \{m_1\} \sqcup M_2 \setminus \{m_2\}) / \sim, \quad \text{wobei}$$

$$\varphi_1(x, r) \sim \varphi_2(x, 1 - r), \quad x \in S^{n-1} \text{ und } r \in (0, 1),$$

heißt die Zusammenhängende Summe von M_1 und M_2 .

Übungsaufgabe 2.83. Zeigen Sie, dass $M_1 \# M_2$ eine n -Mannigfaltigkeit ist.

2.12.2 Kompakte Flächen

Bezeichne

$$\Sigma_0 = S^2, \quad \Sigma_1 = \mathbb{T}^2, \quad \Sigma_2 = \mathbb{T}^2 \# \mathbb{T}^2, \dots, \quad \Sigma_g = \#_g \mathbb{T}^2.$$

Proposition 2.84. Die Fläche Σ_2 lässt sich aus dem Zehneck

Bild

durch Verklebung der Seiten konstruieren. □

Induktion nach g liefert das Folgende.

Korollar 2.85. Für jedes $g \geq 1$ lässt sich Σ_g aus dem $(6g - 2)$ -Eck R_{6g-2} durch Verklebung der Seiten konstruieren. □

Bemerkung 2.86. Die Darstellung von Σ_g im obigen Korollar ist nicht optimal im Sinne, dass Σ_g aus einem $(2g + 2)$ -Eck bekommen werden kann. Für unsere Zwecke reicht aber alleine die Existenz solcher Darstellung.

Proposition 2.87. Die induzierte Abbildung $H_1(\partial R_{6g-2}) \rightarrow H_1(f(\partial R_{6g-2}))$ ist der Nullhomomorphismus, wobei $f: R_{6g-2} \rightarrow \Sigma_g$ die Verklebungsabbildung ist. □

Satz 2.88. Es gilt:

$$H_k(\Sigma_g) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{wenn } k = 0, 2; \\ \mathbb{Z}^{2g} & \text{wenn } k = 1; \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (2.89)$$

Beweis. Der Beweis benutzt Proposition 2.87 und funktioniert ähnlich zum Beweis des Satzes 2.67. Alternativ, kann man auch die Mayer–Vietoris Sequenz ähnlich wie im Beispiel 2.74 anwenden um (2.89) zu bekommen. Die Einzelheiten überlassen wir dem Leser zu überprüfen. □

Bezeichne auch

$$S_1 := \mathbb{R}P^2, \quad S_2 = \mathbb{R}P^2 \# \mathbb{R}P^2 \quad \text{und} \quad S_g = S_{g-1} \# \mathbb{R}P^2.$$

Analog zum Satz 2.88 zeigt man, dass die Homologiegruppen von S_g durch die Formel

$$H_k(S_g) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{wenn } k = 0; \\ \mathbb{Z}^{g-1} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \text{wenn } k = 1; \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

gegeben sind.

Insbesondere, liefern die obigen Rechnungen die folgende Tatsache.

Proposition 2.90. *Die Flächen*

$$\Sigma_0, \Sigma_1, \dots, \Sigma_g, \dots, \quad S_1, S_2, \dots, S_g, \dots \tag{2.91}$$

sind paarweise nicht homöomorph. □

Satz 2.92 (Klassifizierung von Kurven). *Jeder zusammenhängende Kurve ist entweder zum Intervall $(0, 1)$ oder zum Kreis S^1 homöomorph.*

Beweis. Milnor oder Guillemin–Pollack. □

Satz 2.93 (Klassifizierung von kompakten Flächen). *Jede kompakte zusammenhängende Fläche ist entweder zur Σ_g oder zur S_g homöomorph, d.h. (2.91) ist die komplette Liste aller kompakten Flächen.*

Beweis. [???] □

2.13 Homologiegruppen des Paares und des Quotienten

Sei G eine abelsche Gruppe, $K \subset H \subset G$ seien Untergruppen. Aus der elementaren Algebra weißt man, dass die Sequenz

$$0 \rightarrow H/K \rightarrow G/K \rightarrow G/H \rightarrow 0$$

exakt ist.

Seien nun $B \subset A \subset X$. Dann ist die Sequenz

$$0 \rightarrow S_*(A, B) \rightarrow S_*(X, B) \rightarrow S_*(X, A) \rightarrow 0$$

exakt. Nach dem Satz 2.33 bekommen wir die lange exakte Sequenz des Tripels (X, A, B) :

$$\dots \rightarrow H_n(A, B) \rightarrow H_n(X, B) \rightarrow H_n(X, A) \rightarrow H_{n-1}(A, B) \rightarrow \dots$$

Satz 2.94. Sei $A \subset X$ eine abgeschlossene Teilmenge mit der Eigenschaft: A ist ein Deformationsretrakt einer Umgebung $U \supset A$. Dann gilt: Die Quotientenabbildung $q: (X, A) \rightarrow (X/A, A/A)$ induziert einen Isomorphismus

$$q_*: H_*(X, A) \rightarrow H_*(X/A, A/A) \cong \tilde{H}_*(X).$$

Beweis. Der Beweis besteht aus zwei Schritten.

Schritt 1. $\iota_*: H_*(X, A) \rightarrow H_*(X, U)$ ist ein Isomorphismus.

Da A ein Deformationsretrakt von U ist, haben wir, dass die durch Inklusion induzierte Abbildung $H_*(A) \rightarrow H_*(U)$ einen Isomorphismus ist. Aus der langen exakten Sequenz des Paares (U, A) bekommen wir, dass $H_*(U, A)$ verschwindet. Aus der langen exakten Sequenz des Tripels (X, U, A)

$$0 = H_n(U, A) \rightarrow H_n(X, A) \rightarrow H_n(X, U) \rightarrow H_{n-1}(U, A) = 0$$

bekommt man die Behauptung dieses Schrittes.

Schritt 2. Wir beweisen diesen Satz.

Betrachte das kommutierende Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} H_k(X, A) & \longrightarrow & H_k(X, U) & \longleftarrow & H_k(X \setminus A, U \setminus A) \\ q_* \downarrow & & \downarrow & & \downarrow q_* \\ H_k(X/A, A/A) & \longrightarrow & H_k(X/A, U/A) & \longleftarrow & H_k(X/A \setminus A/A, U/A \setminus A/A) \end{array}$$

Nach dem Schritt 1, repräsentieren die beide linke horizontale Pfeile Isomorphismen. Die rechte horizontale Pfeile repräsentieren ebenso Isomorphismen nach der Ausschneidungseigenschaft. Der rechte vertikale Pfeil repräsentiert auch einen Isomorphismus, da die Einschränkung von q auf das Komplement von A ein Homöomorphismus ist. Es folgt, dass q_* auf der linken Seite auch ein Isomorphismus ist.

Letztlich, die lange exakte Sequenz des Paares (X, x_0) , wobei $x_0 \in X$, zeigt, dass $\tilde{H}_*(X)$ und $H_*(X/A, A/A)$ isomorph sind. □

2.14 Beweis der Exaktheit der Mayer–Vietoris Sequenz und der Ausschneidungseigenschaft

Sei $\mathcal{U} = \{U_j\}$ eine Familie der Teilmengen von X mit der Eigenschaft: $\{\text{Int}(U_j)\}$ ist eine Überdeckung von X . Bezeichne

$$S_*^{\mathcal{U}}(X) := \left\{ \sum_i n_i \sigma_i \mid \forall i \quad \exists j \quad \text{mit der Eigenschaft: } \text{im } \sigma_i \subset U_j \right\}.$$

Es ist einfach zu sehen, dass $S_*^{\mathcal{U}}(X)$ ein Teilkomplex von $S_*(X)$ ist. Seien $H_*^{\mathcal{U}}(X)$ die Homologiegruppen dieses Teilkomplexes. Der Hauptschritt im Beweis der Ausschneidungseigenschaft ist das Folgende.

Proposition 2.95. Die Inklusion $\iota: S_*^{\mathcal{U}}(X) \rightarrow S_*(X)$ ist eine Kettenhomotopieäquivalenz. Insbesondere, $H_*^{\mathcal{U}}(X) \cong H_*(X)$.

Für den Beweis dieser Proposition brauchen wir zunächst einige Hilfsbehauptungen bzw. Hilfskonstruktionen. Den eigentlichen Beweis führen wir auf Seite 34.

Sei $\Delta = \Delta(x_0, \dots, x_k)$ ein Simplex in einem Euklidischen Raum V . Für ein beliebiges $b \in V$ definiere den Kegel von Δ durch die Formel

$$C_b(\Delta) = \Delta(b, x_0, \dots, x_k). \quad (2.96)$$

Geometrisch ist $C_b(\Delta)$ der Kegel über Δ .

Der Punkt

$$b = b(\Delta) := \frac{1}{k+1} \sum x_j$$

heißt das *Baryzentrum* von Δ . Die *baryzentrische Unterteilung* $\text{Sd}(\Delta)$ ist eine Kette in V , die auch rekursiv nach k definiert ist, und zwar:

$$\begin{aligned} \text{Sd}(\Delta(x_0)) &= \Delta(x_0) && \text{wenn } k = 0, \\ \text{Sd}(\Delta) &= C_{b(\Delta)}(\text{Sd}(\partial\Delta)) && \text{wenn } k > 0. \end{aligned} \quad (2.97)$$

Für eine beliebige Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ definiert man den Diameter von A durch

$$\text{diam } A := \sup_{x, y \in A} |x - y|.$$

Lemma 2.98. *Für jedes Simplex Δ' , das in der Darstellung von $\text{Sd}(\Delta)$ als eine Kette auftaucht, gilt:*

$$\text{diam } \Delta' \leq \frac{k}{k+1} \text{diam } \Delta. \quad (2.99)$$

Beweis. Der Beweis besteht aus zwei Schritten.

Schritt 1. Sei $\Delta = \Delta(x_0, \dots, x_k)$. Es gilt

$$\text{diam } \Delta = \max_{i,j} |x_i - x_j|$$

Sei $x \in \Delta$ fest und $y = \sum t_j x_j \in \Delta$, wobei $\sum t_j = 1$, $t_j \in [0, 1]$. Es gilt

$$\begin{aligned} |x - y| &= \left| x - \sum t_j x_j \right| = \left| \sum t_j (x - x_j) \right| \leq \sum t_j |x - x_j| \\ &\leq \max_j |x - x_j|. \end{aligned} \quad (2.100)$$

Dies liefert

$$|x - y| \leq \max_j |x - x_j| \leq \max_{i,j} |x_i - x_j|.$$

Schritt 2. Wir beweisen dieses Lemma.

Wir verwenden die Induktion nach k . Für $k = 0$ ist die Ungleichung (2.99) offensichtlich korrekt. Wir nehmen an, dass diese Ungleichung auch für alle $(k-1)$ -Simplexe im V gilt. Sei nun Δ' ein Simplex, das im $\text{Sd}(\Delta)$ auftaucht, d.h. $\Delta' = (b(\Delta), y_0, \dots, y_{k-1})$, wobei alle y_j auf einer Fläche $\partial_j \Delta$ liegen. Nach dem Schritt 1 haben wir

$$\text{diam } \Delta' \leq \max\{|y_i - y_j|, |b - y_i|\}.$$

Ferner, es gilt:

$$\begin{aligned}
 |y_i - y_j| &\leq \text{diam } \Delta(y_0, \dots, y_{k-1}) \\
 &\leq \frac{k-1}{k} \text{diam } \partial_j \Delta && \text{nach Induktionsvoraussetzung} \\
 &\leq \frac{k-1}{k} \text{diam } \Delta && \partial_j \Delta \subset \Delta \\
 &\leq \frac{k}{k+1} \text{diam } \Delta && \text{da } x \mapsto x/(x+1) \text{ monoton wachsend ist.}
 \end{aligned}$$

Es bleibt noch zu zeigen, dass die Ungleichung

$$|b - y_i| \leq \frac{k}{k+1} \text{diam } \Delta$$

gilt. In der Tat,

$$\begin{aligned}
 |b - y_i| &\leq |b - x_j| && \text{für ein } j \text{ nach (2.100)} \\
 &= \left| \frac{1}{k+1} \sum_i x_i - x_j \right| = \left| \frac{1}{k+1} \sum_i (x_i - x_j) \right| \\
 &\leq \frac{k}{k+1} \max_i |x_i - x_j| \\
 &\leq \frac{k}{k+1} \text{diam } \Delta.
 \end{aligned}$$

Dabei haben wir benutzt, dass die zweite Summe in der zweiten Zeile höchstens k nichttriviale Summanden hat. □

Sei nun X eine konvexe Teilmenge in einem Euklidischen Raum. Eine Abbildung $f: \Delta_k \rightarrow X$ mit der Eigenschaft

$$f\left(\sum t_i y_i\right) = \sum t_i f(y_i) \quad \text{für alle } y_i \in \Delta_k \text{ und alle } t_i \geq 0, \sum t_i = 1$$

heißt ein affines Simplex im X . Offensichtlich ist jedes affine Simplex $\Delta_k \rightarrow X$ in X eindeutig durch die Bildern von Ecken bestimmt. Hier ist $\Delta_k \subset \mathbb{R}^{k+1}$ das Standardsimplex. Insbesondere kann jedes affine Simplex mit $\Delta(x_0, \dots, x_k)$ identifiziert werden, wobei $x_i \in X$.

Bezeichne mit $AS_k(X)$ die freie abelsche Gruppe, die durch alle affinen k -Simplexe erzeugt ist. Die Formeln (2.8) definieren die Randabbildung auf AS_* , d.h. (AS_*, ∂) ist ein Kettenkomplex. Außerdem, definiere $AS_{-1}(X) := \mathbb{Z}[\emptyset]$ und $\partial \Delta(x_0) = [\emptyset]$ für alle 0-Simplexe $\Delta(x_0)$.

Proposition 2.101. Die Abbildung (2.97) zusammen mit $\text{Sd}(\emptyset) := \emptyset$ bestimmt einen Kettenhomomorphismus $\text{Sd}: AS_* \rightarrow AS_*$ mit den folgenden Eigenschaften:

- (i) Sd ist kettenhomotop zum Identitätshomomorphismus;
- (ii) Für jedes Simplex Δ' , das in $\text{Sd}(\Delta)$ auftaucht, gilt: $\text{diam } \Delta' \leq \frac{k}{k+1} \text{diam } \Delta$.

Beweis. Der Beweis besteht aus drei Schritten.

Schritt 1. Für jedes $b \in X$ ist der Homomorphismus

$$C_b: AS_k(X) \rightarrow AS_{k+1}(X),$$

der durch (2.96) und $C_b(\emptyset) = \{b\}$ bestimmt ist, eine Kettenhomotopie zwischen id und dem Nullhomomorphismus, d.h.

$$\partial C_b + C_b \partial = \text{id}. \tag{2.102}$$

Die Behauptung dieses Schrittes folgt aus der einfachen Beobachtung:

$$\partial C_b(\Delta(x_0, \dots, x_k)) = \Delta(x_0, \dots, x_k) - \partial C_b(\partial \Delta(x_0, \dots, x_k)).$$

Schritt 2. *Sd ist ein Kettenhomomorphismus.*

Definiere zusätzlich $Sd(\emptyset) = \emptyset$. Um zu zeigen, dass Sd ein Kettenhomomorphismus ist, beobachte erst, dass $Sd = id$ auf AS_{-1} und AS_0 und somit gilt die Gleichheit

$$\partial \circ Sd = Sd \circ \partial \tag{2.103}$$

auf AS_{-1} . Für $k \geq 0$ ist der Beweis von (2.103) mithilfe der Induktion gegeben:

$$\begin{aligned} \partial Sd \Delta &= \partial C_b Sd \partial \Delta \\ &= Sd \partial \Delta - C_b(\partial Sd \partial \Delta) && \text{(2.102)} \\ &= Sd \partial \Delta - C_b(Sd \partial \partial \Delta) && \text{nach Induktionsvoraussetzung} \\ &= Sd \partial \Delta && \partial^2 = 0. \end{aligned}$$

Schritt 3. *Sd ist kettenhomotop zum Identitätshomomorphismus.*

Definiere $T: AS_k \rightarrow AS_{k+1}$ rekursiv nach k und zwar:

$$T(\emptyset) = 0 \quad \text{und} \quad T\Delta = C_{b(\Delta)}(\Delta - T \partial \Delta).$$

Die Eigenschaft

$$T \partial + \partial T = id - Sd$$

gilt offensichtlich auf AS_{-1} . Für $k \geq 0$ ist der Beweis ähnlich wie oben mithilfe der Induktion gegeben:

$$\begin{aligned} \partial T \Delta &= \partial C_b(\Delta - T \partial \Delta) \\ &= \Delta - T \partial \Delta - C_b(\partial \Delta - \partial T \partial \Delta) && \text{(2.102)} \\ &= \Delta - T \partial \Delta - C_b(\partial \Delta - \partial \Delta + Sd \partial \Delta - T \partial \partial \Delta) && \text{nach Induktionsvoraussetzung} \\ &= \Delta - T \partial \Delta - Sd \Delta && \text{(2.97)}. \end{aligned}$$

Um den Beweis dieser Proposition zu beenden, bleibt es nur noch zu bemerken, dass (ii) sofort aus (2.97) und Lemma 2.98 folgt. □

Beweis der Proposition 2.95. Der Beweis besteht aus vier Schritten.

Schritt 1. *Definiere*

$$Sd: S_*(X) \rightarrow S_*(X) \quad \text{durch} \quad Sd(\sigma) = \sigma_{\#}(Sd(\Delta_k))$$

und ähnlich auch T . Dann gilt:

$$Sd \circ \partial = \partial \circ Sd \quad \text{und} \quad T \partial + \partial T = id - Sd.$$

Dies ist eine einfache Übungsaufgabe.

Schritt 2. (*Lebesgue's Lemma*) Sei \mathcal{V} eine beliebige offene Überdeckung eines kompakten metrischen Raumes Y . Es gibt eine Zahl $\varepsilon = \varepsilon(\mathcal{V})$ mit der Eigenschaft: Jede Teilmenge $Z \subset Y$ mit $\text{diam } Z \leq \varepsilon$ ist in einem $V_i \in \mathcal{V}$ enthalten.

In der Tat, aus der Kompaktheit von X bekommen wir, dass es eine offene endliche Überdeckung von X durch Bällen $B_{r_i}(y_i)$ existiert, so dass jeder Ball $B_{2r_i}(y_i)$ in einem $V_j \in \mathcal{V}$ enthalten ist. Sei ε kleiner als das Minimum aller r_i .

Seien ferner $z_1, z_2 \in Y$, so dass gilt: $d_Y(z_1, z_2) \leq \varepsilon$. Dann gilt:

$$\exists B_{r_i}(y_i) \ni z_1 \implies d_Y(z_2, y_i) \leq d_Y(z_2, z_1) + d_Y(z_1, y_i) \leq \varepsilon + r_i \leq 2r_i.$$

Dies zeigt, dass $z_2 \in B_{2r_i}(y_i) \subset V_j$ gilt.

Schritt 3. *Es gilt:*

(i) Sd^m ist kettenhomotop zum Identitätshomomorphismus für alle $m \in \mathbb{N}$;

(ii) $\forall \sigma: \Delta_k \rightarrow X \exists m \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft: $\text{Sd}^m(\sigma) \in C_k^{\mathcal{U}}(X)$.

Definiere

$$D_m := \sum_{i=0}^{m-1} T \circ \text{Sd}^i.$$

Die erste Behauptung folgt aus der Rechnung:

$$\begin{aligned} \partial D_m + D_m \partial &= \sum_{i=0}^{m-1} (\partial T \text{Sd}^i + T \text{Sd}^i \partial) = \sum_{i=0}^{m-1} (\partial T \text{Sd}^i + T \partial \text{Sd}^i) \\ &= \sum_{i=0}^{m-1} (id - \text{Sd}) \text{Sd}^i = id - \text{Sd}^m. \end{aligned}$$

Die zweite Behauptung folgt aus einer Kombination des Schrittes 2 und der Proposition 2.101.

Schritt 4. Für jeden $\sigma: \Delta_k \rightarrow X$ sei $m = m(\sigma) \in \mathbb{N}$ die minimale Zahl mit der Eigenschaft (ii) aus dem Schritt 3. Definiere

$$D: S_k(X) \rightarrow S_{k+1}(X), \quad D\sigma = D_{m(\sigma)}\sigma.$$

Dann gibt es ein Kettenhomomorphismus $\rho: S_*(X) \rightarrow S_*^{\mathcal{U}}(X)$, so dass gilt:

$$D\partial + \partial D = id - \iota \rho \quad \text{und} \quad \rho \iota = id, \tag{2.104}$$

wobei $\iota: S_*^{\mathcal{U}}(X) \rightarrow S_*(X)$ die Inklusion ist.

Definiere ρ durch die Gleichung

$$\partial D\sigma + D\partial\sigma = \sigma - \rho(\sigma) \iff \rho(\sigma) = \sigma - \partial D\sigma - D\partial\sigma.$$

Mithilfe der Gleichheit $\partial D_{m(\sigma)}\sigma + D_{m(\sigma)}(\partial\sigma) = \sigma - \text{Sd}^{m(\sigma)}\sigma$ bekommen wir

$$\rho(\sigma) = \text{Sd}^{m(\sigma)}\sigma + D_{m(\sigma)}(\partial\sigma) - D(\partial\sigma).$$

Aus der Ungleichung $m(\sigma) \geq m(\partial_j\sigma)$, die für alle $j \in \{0, \dots, k\}$ gilt, bekommen wir

$$\begin{aligned} D_{m(\sigma)}(\partial\sigma) - D(\partial\sigma) &= \sum_{j=0}^k (-1)^j \left(D_{m(\sigma)}(\partial_j\sigma) - D(\partial_j\sigma) \right) \\ &= \sum_{j=0}^k (-1)^j \sum_{i \geq m(\partial_j\sigma)} T \text{Sd}^i(\partial_j\sigma) \in C_k^{\mathcal{U}}(X). \end{aligned}$$

Dies liefert, dass $\rho(\sigma)$ auch in $C_k^{\mathcal{U}}(X)$ liegt, da $\text{Sd}^{m(\sigma)}\sigma \in C_k^{\mathcal{U}}(X)$.

Außerdem, ρ ist ein Kettenhomomorphismus:

$$\partial \rho \sigma = \partial \sigma - \partial \partial D \sigma - \partial D \partial \sigma = \rho(\partial \sigma).$$

Die Tatsache, dass ρ Werte im $C_*^{\mathcal{U}}(X)$ annimmt, liefert, dass die erste Gleichung aus (2.104) gilt. Die zweite Gleichung bekommt man aus der Beobachtung, dass für alle $\sigma \in C_*^{\mathcal{U}}(X)$ gilt: $m(\sigma) = 0 \implies D\sigma = 0 \implies \rho(\sigma) = \sigma$. Dies beendet den Beweis des Schrittes 4 und gleichzeitig auch den Beweis dieser Proposition, denn (2.104) impliziert, dass $\iota_*: H_*^{\mathcal{U}}(X) \rightarrow H_*(X)$ ein Isomorphismus ist. \square

Wir können nun den Beweis der Ausschneidungseigenschaft angeben.

Beweis des Satzes 2.38. Der Beweis besteht aus zwei Schritten.

Schritt 1. Seien $A, B \subset X$ mit der Eigenschaft: $X = \text{Int}A \cup \text{Int}B$. Dann induziert die Inklusion $(B, A \cap B) \rightarrow (X, A)$ einen Isomorphismus

$$H_*(B, A \cap B) \rightarrow H_*(X, A).$$

Sei $\mathcal{U} = \{A, B\}$. Alle Abbildungen, die in (2.104) auftauchen, erhalten $S_*(A)$. Daraus folgt, dass die Inklusion

$$\iota: S_*^{\mathcal{U}}(X)/S_*(A) \rightarrow S_*(X)/S_*(A)$$

einen Isomorphismus auf den Homologiegruppen induziert, da für die induzierten Abbildungen D und ρ die Relationen (2.104) auch gelten.

Ferner, es gilt:

$$S_*^{\mathcal{U}}(X)/S_*(A) = (S_*(A) + S_*(B))/S_*(A) \cong S_*(B)/S_*(A \cap B).$$

Dabei ist dieser Isomorphismus durch die Inklusion $S_*(B)/S_*(A \cap B) \rightarrow S_*^{\mathcal{U}}(X)/S_*(A)$ induziert.

Schritt 2. Die Aussage des Schrittes 1 ist zur Ausschneidungseigenschaft äquivalent.

Setze

$$B := X \setminus Z \quad \text{und} \quad Z := X \setminus B.$$

Dann gilt: $A \cap B = A \setminus Z$. Dabei ist die Bedingung $\bar{Z} \subset \text{Int}(A)$ zum $X = \text{Int}(A) \cup \text{Int}(B)$ äquivalent. \square

Mithilfe der Proposition 2.95 lässt sich auch die Exaktheit der Mayer–Vietoris Sequenz feststellen.

Beweis des Satzes 2.71. Sei $\mathcal{U} = \{A, B\}$. Es ist einfach zu überprüfen, dass die Sequenz der Kettenkomplexe

$$0 \rightarrow S_*(A \cap B) \xrightarrow{\varphi} S_*(A) \oplus S_*(B) \xrightarrow{\psi} S_*^{\mathcal{U}}(X) = S_*(A) + S_*(B) \rightarrow 0$$

exakt ist, wobei² $\varphi(x) = (x, x)$ und $\psi(u, v) = u - v$, cf. (2.70). Die lange exakte Sequenz der Homologiegruppen zusammen mit der Proposition 2.95 liefern die Mayer–Vietoris Sequenz (2.72). \square

²Hier haben wir die natürlichen Inklusionen in den Bezeichnungen weggelassen.

Der Homomorphismus $\Delta: H_k(X) \rightarrow H_{k-1}(A \cap B)$, der in der Mayer–Vietoris Sequenz auftaucht, kann explizit angegeben werden. Und zwar, sei $z \in S_k(X)$ eine beliebige Kette. Aus dem Beweis wissen wir, dass es eine Zerlegung $z = x + y$ gibt, wobei $x \in S_k(A)$ und $y \in S_k(B)$. Außerdem, $\partial x + \partial y = \partial z = 0$, aber weder x noch y muss eine Kette sein. Dann gilt: $\Delta([z]) = [\partial x] = -[\partial y]$. Die Einzelheiten überlassen wir dem Leser.

Daraus folgt insbesondere, dass der Homomorphismus Δ im folgenden Sinne natürlich ist. Seien X, A, B und X', A', B' wie im Satz 2.71. Sei außerdem $f: X \rightarrow X'$ eine stetige Abbildung mit der Eigenschaft: $f(A) \subset A'$ und $f(B) \subset B'$. Dann kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} H_k(A \cap B) & \longrightarrow & H_k(A) \oplus H_k(B) & \longrightarrow & H_k(X) & \xrightarrow{\Delta} & H_{k-1}(A \cap B) \\ f_* \downarrow & & f_* \downarrow & & f_* \downarrow & & f_* \downarrow \\ H_k(A' \cap B') & \longrightarrow & H_k(A') \oplus H_k(B') & \longrightarrow & H_k(X') & \xrightarrow{\Delta} & H_{k-1}(A' \cap B'). \end{array}$$

Manchmal ist auch die relative Version der Mayer–Vietoris Sequenz nützlich.

Proposition 2.105. *Es gelte: $X = \text{Int}A \cup \text{Int}B$, $X \supset Y = \text{Int}C \cup \text{Int}D$, $C \subset A$ und $D \subset B$. Dann ist die Sequenz*

$$\dots \rightarrow H_k(A \cap B, C \cap D) \xrightarrow{\Phi} H_k(A, C) \oplus H_k(B, D) \xrightarrow{\Psi} H_k(X, Y) \xrightarrow{\Delta} H_{k-1}(A \cap B, C \cap D) \rightarrow \dots$$

exakt.

Beweis. Seien $\mathcal{U} = \{A, B\}$ und $\mathcal{V} = \{C, D\}$ die Überdeckungen von X und Y . Betrachte das kommutierende Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & S_k(C \cap D) & \xrightarrow{\varphi} & S_k(C) \oplus S_k(D) & \xrightarrow{\psi} & S_k^{\mathcal{V}}(Y) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & S_k(A \cap B) & \xrightarrow{\varphi} & S_k(A) \oplus S_k(B) & \xrightarrow{\psi} & S_k^{\mathcal{U}}(X) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & S_k(A \cap B, C \cap D) & \xrightarrow{\varphi} & S_k(A, C) \oplus S_k(B, D) & \xrightarrow{\psi} & S_k^{\mathcal{U}, \mathcal{V}}(X, Y) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & 0 & & 0 & & 0 \end{array}$$

Hier ist per Definition $S_k^{\mathcal{U}, \mathcal{V}}(X, Y) = S_k^{\mathcal{U}}(X)/S_k^{\mathcal{V}}(Y)$. Dabei sind die Homomorphismen φ und ψ in der letzten Zeile durch φ und ψ in der mittleren Zeile induziert.

Ferner sind die ersten zwei Zeilen exakt. Insbesondere gilt $\psi \circ \varphi = 0$ in der mittleren Zeile. Diese Gleichheit muss dann auch in der dritten Zeile gelten, d.h. die dritte Zeile ist ein Komplex. Die zugehörige lange exakte Sequenz ist von der Gestalt:

$$\dots \longrightarrow H_k(Z_1) \longrightarrow H_k(Z_2) \longrightarrow H_k(Z_3) \longrightarrow H_{k-1}(Z_1) \longrightarrow \dots,$$

wobei Z_j für den Komplex der j . Zeile steht. Dies liefert

$$\dots \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow H_k(Z_3) \longrightarrow 0 \longrightarrow \dots$$

D.h., dass die Homologiegruppen von Z_3 trivial sind, also ist die dritte Zeile auch exakt. □

2.A Poincaré–Vermutung

Vermutung 2.106 (Poincaré). *Ist eine kompakte n -Mannigfaltigkeit zur n -Sphäre homotopie-äquivalent, so ist sie zur n -Sphäre homöomorph.*

Für $n = 1$ und $n = 2$ folgt die Vermutung aus den Klassifikationssätzen des Abschnitts 2.12.2. Für $n \geq 5$ wurde diese Vermutung durch Stephen Smale in 1960 bewiesen. Im Jahre 1982 bewies Michael Freedman der Fall $n = 4$. Erst im Jahre 2002 wurde der Fall $n = 3$ durch Grigori Perelman veröffentlicht.

Sei M eine n -Mannigfaltigkeit. Eine offene Teilmenge $U \subset M$ zusammen mit einem Homöomorphismus φ zwischen U und einer offenen Teilmenge vom \mathbb{R}^n heißt eine *Karte*. Eine Menge

$$\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i) \mid i \in I\}$$

die aus Karten besteht und M überdeckt, heißt ein *Atlas* vom M .

Beispiel 2.107. Die Sphäre S^n besitzt einen Atlas, der aus zwei Karten besteht. Dieser ist im Beispiel 2.73 gegeben.

Ein Atlas heißt *glatt*, wenn alle *Koordinatenwechselabbildungen*

$$\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}: \varphi_j(U_i \cap U_j) \rightarrow \varphi_i(U_i \cap U_j)$$

glatt sind. Die Koordinatenwechselabbildungen sind Abbildungen zwischen offenen Teilmengen im \mathbb{R}^n und *glatt* heißt, dass jede Komponente unendlich oft differenzierbar ist. Eine glatte Mannigfaltigkeit ist eine topologische Mannigfaltigkeit zusammen mit einem glatten Atlas.

Seien (M, \mathcal{A}) und (N, \mathcal{B}) zwei glatte Mannigfaltigkeiten. Eine Abbildung $f: M \rightarrow N$ heißt *glatt*, wenn alle Koordinatendarstellungen von f , d.h. die Abbildungen

$$\psi_j \circ f \circ \varphi_i^{-1}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m,$$

glatt sind (diese Abbildungen sind eventuell nur auf einer offenen Teilmenge von \mathbb{R}^n definiert). Hier ist (V_j, ψ_j) eine Karte auf N .

Übungsaufgabe 2.108.

- Zeigen Sie, dass S^n keinen Atlas besitzt, der nur aus einer Karte entsteht;
- Konstruieren Sie einen glatten Atlas auf \mathbb{T}^2 und $\mathbb{R}\mathbb{P}^2$.

Zwei glatten Mannigfaltigkeiten M und N heißen *diffeomorph*, wenn eine Bijektion $f: M \rightarrow N$ existiert, so dass gilt: sowohl f als auch f^{-1} sind glatt. Dabei heißt f ein *Diffeomorphismus*.

Satz 2.109 (Milnor). *Es gibt 7-Mannigfaltigkeiten, die zur 7-Sphäre homöomorph aber nicht diffeomorph sind.*

Es wurde später gezeigt, dass es genau 28 solche glatte Mannigfaltigkeiten (bis auf Diffeomorphismen) existiert.

Äquivalent, kann man den obigen Satz etwas intrinsischer mithilfe von glatten Strukturen formulieren. Und zwar, zwei glatte Atlanten \mathcal{A}_1 und \mathcal{A}_2 auf M heißen *äquivalent*, wenn $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ auch glatt ist. Ein maximaler Atlas auf M heißt eine *glatte Struktur*. Mit anderen Worten ist eine glatte Struktur eine Äquivalenzklasse von glatten Atlanten.

Proposition 2.110. *Sei M eine topologische Mannigfaltigkeit. M besitzt genau dann mindestens zwei verschiedene glatte Strukturen, wenn es eine glatte Mannigfaltigkeit N existiert, die zu M homöomorph aber nicht diffeomorph ist.*

Beweis. Sei \mathcal{A} ein glatter Atlas auf M . Es existiere ein (N, \mathcal{B}) und ein Homöomorphismus $f: M \rightarrow N$, der kein Diffeomorphismus ist. Der Atlas \mathcal{B} induziert einen glatten Atlas \mathcal{B}' auf M , und zwar

$$\mathcal{B}' := \{(f^{-1}(V_j), \psi_j \circ f) \mid (V_j, \psi_j) \in \mathcal{B}\}.$$

Die Atlanten \mathcal{A} und \mathcal{B}' sind *nicht* äquivalent, denn sonst wäre f ein Diffeomorphismus.

Wenn M zwei nicht äquivalente glatte Atlanten \mathcal{A} und \mathcal{A}' besitzt, so ist $id_M: (M, \mathcal{A}) \rightarrow (M, \mathcal{A}')$ ein Homöomorphismus aber kein Diffeomorphismus. □

Bemerkung 2.111. Es gibt Beispiele von (kompakten) topologischen Mannigfaltigkeiten, die keine glatte Struktur zulassen.

Vermutung 2.112 (“Glatte Poincaré–Vermutung”). *Auf der 4-Sphäre gibt es eine einzige glatte Struktur.*

Bis jetzt ist es unbekannt, ob diese Vermutung richtig oder falsch ist. Dabei bekannt ist, dass \mathbb{R}^4 unendlich viele (sogar überabzählbar viele) glatten Strukturen besitzt. Beispiele von kompakten 4-Mannigfaltigkeiten, die mehrere glatten Strukturen besitzen, sind auch bekannt.

Kapitel 3

CW-Komplexe

3.1 Anheften eines Raumes

Sei X ein topologischer Raum. Der *Kegel* über X ist der Raum

$$CX := X \times [0, 1] / \sim, \quad (x_1, 0) \sim (x_2, 0) \quad \forall x_1, x_2 \in X.$$

Übungsaufgabe 3.1. Zeigen Sie, dass die Spitze $\{p\} := [X \times \{0\}]$ ein Deformationsretrakt des Kegels ist. Insbesondere ist der Kegel kontrahierbar.

Seien X, Y topologische Räume, $A \subset X$ und $f: A \rightarrow Y$ eine stetige Abbildung. Man sagt, dass der Raum

$$X \cup_f Y = (X \sqcup Y) / \sim, \quad \text{wobei} \quad a \sim f(a) \quad \forall a \in A,$$

durch Anheften von X an Y mittels f entsteht.

Einige Eigenschaften des vorigen Kapitels lassen sich elegant durch Anheften ausdrücken. Zum Beispiel, betrachte den Raum $X \cup CA$, wobei die Anhefteabbildung die Inklusion $a \mapsto (a, 1)$ ist. Es gilt:

$$\begin{aligned} \tilde{H}_*(X \cup CA) &\cong H_*(X \cup CA, CA) && \text{nach der LES des Paares } (X \cup CA, CA) \\ &\cong H_*(X \cup CA \setminus \{p\}, CA \setminus \{p\}) && \text{nach der Ausschneidung} \\ &\cong H_*(X, A) && A \subset CA \setminus \{p\} \text{ Deformationsretrakt.} \end{aligned}$$

Dies heißt, dass die relativen Homologiegruppen als absolute Homologiegruppen des Raumes $X \cup CA$ sich darstellen lassen. Dabei braucht man keine Voraussetzung an A , cf. Satz 2.94.

Sei $\varphi_\gamma: S^{n-1} \rightarrow X$, $\gamma \in \Gamma$, eine Familie von stetigen Abbildungen. Man sagt, dass der Raum

$$\left(X \bigsqcup_{\gamma \in \Gamma} B_{n,\gamma} \right) / \sim, \quad \text{wobei} \quad y \sim \varphi_\gamma(y) \quad \forall y \in \partial B_{n,\gamma}$$

aus X durch Anheften von n -Zellen entsteht. Dabei heißt $\Phi_\gamma: B_{n,\gamma} \rightarrow X \sqcup B_{n,\gamma} / \sim$ die charakteristische Abbildung. Die Einschränkung von Φ_γ auf das Innere $\mathring{B}_{n,\gamma}$ des Balls ist ein Homöomorphismus auf das Bild e_γ^n , das in diesem Fall als eine n -Zelle bezeichnet wird.

Definition 3.2. Eine Struktur eines CW-Komplexes auf einem Hausdorff-Raum X ist eine Sequenz von abgeschlossenen Räumen

$$X^0 \subset X^1 \subset \dots \subset X^n \subset \dots$$

mit den Eigenschaften:

- (i) $X = \cup_n X^n$;
- (ii) X^0 ist ein diskreter Raum;
- (iii) X^n entsteht aus X^{n-1} durch Anheften von n -Zellen;
- (iv) Eine Teilmenge $A \subset X$ ist abgeschlossen (offen) in X genau dann, wenn $A \cap X^n$ abgeschlossen (offen) in X^n ist.

Dabei heißt X^n das n -Gerüst vom X .

Eine CW-Struktur heißt endlich, wenn sie aus endlich vielen Zellen besteht.

Proposition 3.3. Sei X ein topologischer Raum zusammen mit einer CW-Struktur. Es gilt:

- $A \subset X$ abgeschlossen (offen) $\Leftrightarrow \Phi_\gamma^{-1}(A) \subset B_n$ abgeschlossen (offen);
- Für endliche CW-Strukturen gilt (iv) automatisch.

Beweis. Die Stetigkeit von Φ_γ liefert den Beweis der ersten Behauptung in einer Richtung. Um die andere Richtung zu zeigen, nehmen wir an, dass $A \cap X^{n-1}$ abgeschlossen ist. Dann ist $A \cap X^n$ abgeschlossen in X^n nach der Definition der Quotiententopologie.

Sei $A \subset X$ abgeschlossen. Da jedes X^n abgeschlossen ist, ist auch $X^n \cap A$ für alle CW-Komplexe abgeschlossen. Ist die CW-Struktur endlich, so ist $A = \cup(A \cap \bar{e}_\gamma^n)$ kompakt als eine endliche Vereinigung der kompakten Teilräumen. Da X ein Hausdorff-Raum ist, ist A abgeschlossen. □

Beispiel 3.4. Ein endlicher topologischer Graph ist ein CW-Komplex.

Beispiel 3.5. Jede kompakte Fläche besitzt eine CW-Struktur. Dies folgt aus dem Korollar 2.85.

Beispiel 3.6. Die Sphäre $S^n = B_n/\partial B_n$ hat die CW-Struktur, die aus einer 0-Zelle und einer n -Zelle besteht:

$$X^0 = \dots = X^{n-1} = \{pt\}, \quad X^n = S^n = \{pt\} \cup B_n,$$

wobei $\varphi: \partial B_n \rightarrow \{pt\}$ notwendigerweise die konstante Abbildung ist.

Beispiel 3.7. (Nicht-Beispiel) Betrachte den Raum

$$X := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n$$

wobei X_n der Kreis im \mathbb{R}^2 mit Radius $1/n$ und Mittelpunkt $(0, 1/n)$ ist. Dann besteht $X \setminus 0$ aus unendlich vielen Intervalle. Dies liefert *keine* CW-Struktur auf X (Warum?).

Beispiel 3.8 (Reell-projektiver Raum).

$\mathbb{RP}^n =$ der Raum aller Geraden im \mathbb{R}^{n+1} durch den Ursprung

$$= S^n / \sim,$$

$$= S^n_- / \sim,$$

$$= \mathbb{RP}^{n-1} \cup e^n.$$

wobei $x \sim -x \quad \forall x \in S^n,$

wobei $x \sim -x \quad \forall x \in \partial S^n_-,$

Die Anhefteabbildung $\varphi: S^{n-1} \rightarrow \mathbb{RP}^{n-1}$ ist die Quotientenabbildung (insbesondere ist diese Abbildung 2-zu-1). Somit erhalten wir eine endliche CW-Struktur auf \mathbb{RP}^n :

$$X^n = \mathbb{RP}^n = e^0 \cup e^1 \cup \dots \cup e^n.$$

Beispiel 3.9 (Komplex-projektiver Raum).

$$\begin{aligned}
 \mathbb{C}P^n &= \mathbb{C}\text{-Geraden} \subset \mathbb{C}^{n+1} \text{ durch den Ursprung} \\
 &= (\mathbb{C}^{n+1} \setminus 0) / \sim && (z_0, \dots, z_n) \sim (\lambda z_0, \dots, \lambda z_n), \quad \lambda \in \mathbb{C} \setminus 0, \\
 &= S^{2n+1} / \sim && (z_0, \dots, z_n) \sim (\lambda z_0, \dots, \lambda z_n), \quad |z| = 1, |\lambda| = 1, \\
 &= B_{2n} / \sim && z' \sim \lambda z' \quad \forall z' \in \partial B_{2n}, |\lambda| = 1, \\
 &= \mathbb{C}P^{n-1} \cup e^{2n}.
 \end{aligned}$$

Die Anhefteabbildung ist wiederum die Projektion $S^{2n-1} \rightarrow \mathbb{C}P^{n-1}$ (die Hopf-Abbildung). Dies liefert eine CW-Struktur auf $\mathbb{C}P^n$:

$$\mathbb{C}P^n = e^0 \cup e^2 \cup \dots \cup e^{2n}.$$

Beispiel 3.10 (Quaternionisch-projektiver Raum). Analog erhalten wir im Fall der Quaternionen \mathbb{H} anstatt \mathbb{R} oder \mathbb{C} :

$$\mathbb{H}P^n = (\mathbb{H}^{n+1} \setminus 0) / (\mathbb{H} \setminus 0) = e^0 \cup e^4 \cup \dots \cup e^{4n}.$$

Proposition 3.11. *Es gilt:*

$$H_k(\mathbb{C}P^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & k = 0, 2, \dots, 2n, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{und} \quad H_k(\mathbb{H}P^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & k = 0, 4, \dots, 4n, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (3.12)$$

Beweis. Mithilfe der Induktion nach n zeigen wir, dass der erste Isomorphismus gilt. Der Beweis für $\mathbb{H}P^n$ verläuft ähnlich.

Für $n = 0$ haben wir $\mathbb{C}P^0 = \{pt\}$ und somit gilt (3.12) in diesem Fall.

Die lange exakte Sequenz des Paares $(\mathbb{C}P^n, \mathbb{C}P^{n-1})$ liefert

$$\dots \rightarrow H_{k+1}(\mathbb{C}P^n, \mathbb{C}P^{n-1}) \rightarrow H_k(\mathbb{C}P^{n-1}) \rightarrow H_k(\mathbb{C}P^n) \rightarrow H_k(\mathbb{C}P^n, \mathbb{C}P^{n-1}) \rightarrow \dots \quad (3.13)$$

Dabei gilt $\mathbb{C}P^n / \mathbb{C}P^{n-1} = e^{2n} / \partial e^{2n} = S^{2n}$.

Übungsaufgabe 3.14. Zeigen Sie, dass $\mathbb{C}P^{n-1}$ ein Deformationsretrakt einer Umgebung im $\mathbb{C}P^n$ ist.

Für $k < 2n$ liefert (3.13), dass $H_k(\mathbb{C}P^n) \cong H_k(\mathbb{C}P^{n-1})$. Für $k = 2n$ erhalten wir

$$0 = H_{2n}(\mathbb{C}P^{n-1}) \rightarrow H_{2n}(\mathbb{C}P^n) \rightarrow H_{2n}(S^{2n}) \rightarrow H_{2n-1}(\mathbb{C}P^{n-1}) = 0,$$

d.h. $H_{2n}(\mathbb{C}P^n) \cong \mathbb{Z}$. □

3.2 Operationen auf CW-Komplexe

Produkt. Sei $X = \cup e_\gamma^n$ und $Y = \cup e_\beta^m$. Dann gilt:

$$X \times Y = \bigcup_{k=m+n} \bigcup_{\gamma, \beta} e_\gamma^n \times e_\beta^m.$$

Dies liefert eine CW-Struktur auf $X \times Y$, denn $B_n \times B_m$ ist homöomorph zu B_{n+m} (Warum?).

Beispiel 3.15. $S^1 = e^0 \cup e^1 \implies \mathbb{T}^2 = S^1 \times S^1 = e^0 \cup (e_1^1 \cup e_2^1) \cup e^2 = \{pt\} \cup (A \cup B) \cup$ Kreisscheibe, cf. Abschnitt 2.11.1.

Quotient. Ein Teilkomplex A eines CW-Komplexes X ist eine abgeschlossene Teilmenge, die die Vereinigung von Zellen in X ist. Unter diesen Umständen heißt (X, A) ein CW-Paar.

Der CW-Komplex X/A besteht aus Zellen von $X \setminus A$ und eine zusätzliche 0-Zelle $[A]$. Für eine n -Zelle mit der Anhefteabbildung $\varphi_\gamma: S^{n-1} \rightarrow X^{n-1}$ ist die zugehörige Anhefteabbildung durch die Verknüpfung $S^{n-1} \rightarrow X^{n-1} \rightarrow X^{n-1}/(X^{n-1} \cap A)$ gegeben.

Beispiel 3.16. Betrachte den Torus $\mathbb{T}^2 = e^0 \cup (e_1^1 \cup e_2^1) \cup e^2$. Sei $A = e^0 \cup (e_1^1 \cup e_2^1) = S^1 \vee S^1$. Dann gilt: $\mathbb{T}^2 = e^0 \cup e^2 = S^2$.

Einhängung. Der Raum

$$SX := (X \times I / X \times \{0\}) / X \times \{1\} = C_1 X \cup_X C_2 X$$

heißt die Einhängung von X . Insbesondere, wenn X ein CW-Komplex ist, so ist SX auch ein CW-Komplex.

Zum Beispiel gilt $S(S^n) \cong S^{n+1}$.

Smash-Produkt. Seien (X, x_0) und (Y, y_0) punktierte Räume. Das Wedge-Produkt $X \vee Y$ kann mit dem Teilraum

$$X \times \{y_0\} \cup \{x_0\} \times Y \subset X \times Y$$

identifiziert werden. Dann heißt

$$X \wedge Y = X \times Y / X \vee Y = X \times Y / (X \times \{y_0\} \cup \{x_0\} \times Y)$$

das Smash-Produkt von X und Y . Sind X, Y CW-Komplexe und x_0, y_0 0-Zellen, so ist $X \wedge Y$ ein (punktierter) CW-Komplex.

Beispiel 3.17. Seien $S^n = e^0 \cup e^n$ und $S^m = e^0 \cup e^m$. Dann gilt

$$S^m \times S^n = e^0 \cup e^m \cup e^m \cup e^{m+n} \supset e^0 \cup e^m \cup e^n = S^m \vee S^n.$$

Dies liefert: $S^m \wedge S^n = e^0 \cup e^{m+n} = S^{m+n}$.

Reduzierte Einhängung. Sei (X, x_0) ein punktierter Raum. Dann heißt

$$\Sigma X = X \times I / (X \times \{0\} \cup X \times \{1\} \cup \{x_0\} \times I) = X \wedge S^1$$

die reduzierte Einhängung von X . Zum Beispiel gilt $\Sigma S^n \cong S^{n+1}$.

3.3 Homotopie-Erweiterungs-Eigenschaft

Sei X ein topologischer Raum und $A \subset X$. Zur Erinnerung: Eine (stetige) Abbildung $r: X \rightarrow A$ heißt Retraktion, wenn $r|_A = r \circ \iota_A = id_A$. Dabei heißt A Deformationsretrakt von X , wenn id_X homotop zu einer Retraktion $r: X \rightarrow A$ ist, cf. Definition 2.54.

Definition 3.18. Man sagt, dass das Paar (X, A) die Homotopie-Erweiterungs-Eigenschaft (kurz HEE) besitzt, wenn folgendes gilt: Ist eine Abbildung $f: X \rightarrow Y$ und eine Homotopie $h: A \times I \rightarrow Y$ von $f|_A = f \circ \iota_A$ gegeben, so gibt es eine Homotopie $H: X \times I \rightarrow Y$, die $H \circ (\iota_A \times id) = h$ erfüllt.

Lemma 3.19. *Das Paar (X, A) besitzt die HEE genau dann, wenn $X \times \{0\} \cup A \times I \subset X \times I$ eine Retraktion besitzt.*

Beweis. Der Beweis benutzt die folgende Beobachtung: Eine stetige Abbildung $f: X \rightarrow Y$ zusammen mit einer Homotopie von $f \circ \iota_A$ ist dasselbe wie eine stetige Abbildung $X \times \{0\} \cup A \times I \rightarrow Y$.

Existiert eine Retraktion $r: X \times I \rightarrow X \times \{0\} \cup A \times I$, so ist $H := h \circ (r \times id)$ eine Erweiterung von h .

Besitzt (X, A) die HEE, so existiert für $id: X \times \{0\} \cup A \times I \rightarrow X \times \{0\} \cup A \times I$ eine Erweiterung $r: X \times I \rightarrow X \times \{0\} \cup A \times I$, die die gewünschte Retraktion ist. \square

Seien X ein CW-Komplex und Y ein topologischer Raum. Für den Beweis der nächsten Behauptungen brauchen wir die folgende Beobachtung: Eine stetige Abbildung $f: X \rightarrow Y$ ist dasselbe wie eine Sequenz $f_n: X^n \rightarrow Y$ von stetigen Abbildungen mit der Eigenschaft: $f_n|_{X^k} = f_k$ sobald $k \leq n$. In der Tat, ist eine stetige Abbildung $f: X \rightarrow Y$ gegeben, so ist $f_n = f|_{X^n}$ die gesuchte Folge. Ist eine Folge gegeben, so kann man eine Abbildung $f: X \rightarrow Y$ durch

$$f(x) = f_n(x) \quad \text{sobald } x \in X^n$$

definieren. Diese Abbildung ist stetig, denn für jede offene Teilmenge $U \subset Y$ ist die Teilmenge $f^{-1}(U) \cup X^n = f_n^{-1}(U)$ offen und somit ist auch $f^{-1}(U)$ offen in X .

Proposition 3.20. *Ist (X, A) ein CW-Paar, so ist $X \times \{0\} \cup A \times I \subset X \times I$ ein Deformationsretrakt. Insbesondere hat jedes CW-Paar die HEE.*

Wir beweisen diese Proposition nach dem Beweis des Lemmas 3.21.

Betrachte $[0, \infty) = \cup_{i \in \mathbb{N}} [i-1, i]$ als ein CW-Komplex. Der CW-Teilkomplex

$$T = \bigcup_i X^i \times [i, \infty) \subset X \times [0, \infty)$$

heißt das Teleskop von X .

Lemma 3.21. *T ist homotopieäquivalent zu X .*

Beweis. Da X ein Deformationsretrakt von $X \times [0, \infty)$ ist, reicht es zu zeigen, dass T auch ein Deformationsretrakt von $X \times [0, \infty)$ ist. Dafür betrachte $Y_i := T \cup (X \times [i, \infty))$.

Nach Proposition 3.20 ist $X^i \times [i, i+1] \cup X \times \{i+1\}$ ein Deformationsretrakt von $X \times [i, i+1]$. Dies liefert, dass Y_{i+1} ein Deformationsretrakt von Y_i ist. Bezeichne durch $h_{i,t}$ die Homotopie zwischen id und der Retraktion $Y_i \rightarrow Y_{i+1}$.

Definiere $f_t: X \times [0, \infty) \rightarrow T$ durch

$$f_t(x, \tau) = \begin{cases} h_{0,2t}(x, \tau) & t \in [0, \frac{1}{2}], \\ h_{1,4t-2} \circ r_0(x, \tau) & t \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}], \\ \dots & \dots \\ h_{i,\rho_i(t)} \circ r_{i-1} \circ \dots \circ r_0(x, \tau) & t \in [1 - 2^{-i}, 1 - 2^{-i-1}], \\ \dots & \dots \end{cases}$$

wobei $\rho_i: [1 - \frac{1}{2^i}, 1 - \frac{1}{2^{i+1}}] \rightarrow [0, 1]$ ein Homöomorphismus ist, zum Beispiel $\rho_i(t) = 2^{i+1}t - 2^{i+1} - 2$. Dann ist f_t eine Abbildung $X \times [0, \infty) \rightarrow T$ mit der Eigenschaft: $f_t|_{X^i \times [0, \infty)} = id$ für $t \geq 1 - \frac{1}{2^{i+1}}$. Dabei ist f_t stetig, da f_t stetig auf jedem $X^i \times [i, i+1]$ ist. Dies liefert die Behauptung. \square

Beweis der Proposition 3.20. Es gibt eine Retraktion $r: B_n \times I \rightarrow B_n \times \{0\} \cup \partial B_n \times I$. Dies kann man zum Beispiel als Projektion aus dem Punkt $(0, 2) \in B_n \times \mathbb{R}$ erhalten.

Dies liefert eine Retraktion $r_n: X^n \times I \rightarrow X^n \times \{0\} \cup (X^{n-1} \cup A^n) \times I$, wobei $A^n := X^n \cap A$. In der Tat, $X^n \times I$ entsteht aus $X^n \times \{0\} \cup (X^{n-1} \cup A^n) \times I$ durch Anheften von $B_n \times I$ entlang $B_n \times \{0\} \cup \partial B_n \times I$.

Sei $h_{n,t}$ eine Homotopie zwischen r_n und $id_{X^n \times I}$. Ähnlich wie im Beweis des Lemmas 3.21, liefert die Verkettung von $\{h_{n,t}\}$ die gesuchte Retraktion. □

3.4 Zelluläre Homologie

Betrachte die Sequenz

$$\cdots \rightarrow H_{n+1}(X^{n+1}, X^n) \xrightarrow{d_{n+1}} H_n(X^n, X^{n-1}) \xrightarrow{d_n} H_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2}) \rightarrow \cdots, \quad (3.22)$$

wobei der Homomorphismen d_{n+1} als die Verknüpfung

$$H_{n+1}(X^{n+1}, X^n) \xrightarrow{\delta_{n+1}} H_n(X^n) \xrightarrow{j_n} H_n(X^n, X^{n-1}).$$

definiert ist (diese Abbildungen sind Teil der langen exakten Sequenz des Paares (X^{n+1}, X^n) bzw. (X^n, X^{n-1})). Daraus folgt

$$d_n \circ d_{n+1} = j_{n-1} \circ (\delta_n \circ j_n) \circ \delta_{n+1} = 0,$$

denn $\delta_n \circ j_n = 0$ als die Verknüpfung zweier Homomorphismen in der langen exakten Sequenz des Paares (X^n, X^{n-1}) . Folglich ist (3.22) ein Kettenkomplex. Die Homologiegruppen des Kettenkomplexes (3.22) heißen zelluläre Homologiegruppen von X .

Satz 3.23. Die zelluläre Homologiegruppen sind zu singulären Homologiegruppen isomorph.

Für den Beweis dieses Satzes brauchen wir einige Hilfsbehauptungen.

Definition 3.24. Wenn $X = X^n$ für ein n , dann heißt X endlich-dimensional. Dabei heißt das minimale n mit der Eigenschaft $X = X^n$ die Dimension von X .

Lemma 3.25. Sei (X_α, x_α) eine Familie von punktierten Räumen, so dass jedes x_α ein Deformationsretrakt einer Umgebung im X_α ist. Dann gilt:

$$\tilde{H}_*\left(\bigvee_\alpha X_\alpha\right) \cong \bigoplus_\alpha \tilde{H}_*(X_\alpha),$$

wobei der Isomorphismus durch die Inklusionen $\iota_\alpha: X_\alpha \rightarrow \bigvee X_\alpha$ induziert ist.

Beweis. Dies folgt aus dem Satz 2.94:

$$\begin{aligned} \bigoplus_\alpha \tilde{H}_*(X_\alpha) &\cong \bigoplus_\alpha H_*(X_\alpha, \{x_\alpha\}) \cong H_*(\sqcup X_\alpha, \sqcup \{x_\alpha\}) \\ &\cong \tilde{H}_*(\sqcup X_\alpha / \sqcup \{x_\alpha\}) = \tilde{H}_*\left(\bigvee_\alpha X_\alpha\right). \end{aligned}$$

□

Lemma 3.26. Sei X ein CW-Komplex. Dann gilt das Folgende:

- (a) $H_k(X^n, X^{n-1})$ ist die freie abelsche Gruppe erzeugt durch die n -Zellen von X für $k = n$ und trivial für $k \neq n$;
 (b) $H_k(X^n) = 0$ für $k > n$.

Beweis. Die Behauptung (a) folgt aus den Beobachtungen: $X^{n-1} \subset X^n$ ist ein Deformationsretrakt einer Umgebung und X^n/X^{n-1} ist das Wedge-Produkt von n -Sphären.

Die Behauptung (b) ist eine Übungsaufgabe. □

Beweis des Satzes 3.23. Der Beweis besteht aus vier Schritten.

Schritt 1. Sei X ein endlich-dimensionaler CW-Komplex mit $X^n = \{pt\}$. Dann gilt: $\tilde{H}_k(X) = 0$ für $k \leq n$.

Betrachte die Sequenz der Homomorphismen

$$H_k(X^k) \rightarrow H_k(X^{k+1}) \rightarrow H_k(X^{k+2}) \rightarrow \dots,$$

die durch die Inklusionen induziert sind. Die lange exakte Sequenz des Paares (X^{k+m+1}, X^{k+m}) liefert, dass jeder Homomorphismus, der in dieser Sequenz auftaucht, surjektiv ist. Dieses impliziert die Behauptung dieses Schrittes.

Schritt 2. Sei X ein beliebiger CW-Komplex mit $X^n = \{pt\}$. Dann gilt: $H_k(X) = 0$ für $k \leq n$.

Sei $R := X^0 \times [0, \infty) \subset T$, wobei T ist das Teleskop von X . Außerdem, bezeichne $Z := R \cup_i X^i \times \{i\}$. Dann ist Z/R homöomorph zu $\bigvee_i X^i$. Mithilfe des vorigen Schrittes erhalten wir: $\tilde{H}_k(Z/R) = 0$ für $k \leq n$. Die lange exakte Sequenz des Paares (Z, R) liefert: $\tilde{H}_k(Z) = 0$ für $k \leq n$.

Ferner gilt:

$$T/Z = (T/\sqcup X^i \times \{i\})/R = (\cup_i SX^i)/R = \bigvee_i \Sigma X^i.$$

Dabei ist das $(n+1)$ -Gerüst von ΣX^i ein Punkt. Dies liefert $\tilde{H}_k(T/Z) = 0$ für $k \leq n+1$. Aus der langen exakten Sequenz des Paares (T, Z) erhalten wir, dass $\tilde{H}_k(T) = 0$ für $k \leq n$ gilt. Die Behauptung dieses Schrittes folgt nun aus dem Lemma 3.21.

Schritt 3. Die durch die Inklusion induzierte Abbildung $H_k(X^n) \rightarrow H_k(X)$ ist ein Isomorphismus für $k < n$ und ein Epimorphismus für $k = n$.

Dieses folgt unmittelbar aus dem Schritt 2 mithilfe der langen exakten Sequenz des Paares (X, X^n) .

Schritt 4. Wir beweisen diesen Satz.

Aus der langen exakten Sequenz des Paares (X^{n-1}, X^{n-2}) bekommen wir:

$$0 = H_{n-2}(X^{n-2}) \rightarrow H_{n-1}(X^{n-1}) \xrightarrow{j_{n-1}} H_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2}).$$

Da j_{n-1} injektiv ist, gilt: $\ker d_n = \ker(j_{n-1} \circ \delta_n) = \ker \delta_n = \text{im } j_n \cong H_n(X^n)$.

Da j_n injektiv ist, gilt: $j_n(\text{im } \delta_{n+1}) = \text{im}(j_n \circ \delta_{n+1}) = \text{im } d_{n+1}$. Dies heißt, dass j_n einen Isomorphismus $H_n(X^n)/\text{im } \delta_{n+1} \cong \ker d_n/\text{im } d_{n+1}$ induziert.

Ferner liefert die lange exakte Sequenz des Paares (X^{n+1}, X^n) :

$$H_{n+1}(X^{n+1}, X^n) \xrightarrow{\delta_{n+1}} H_n(X^n) \longrightarrow H_n(X^{n+1}) \rightarrow 0.$$

Insbesondere gilt $H_n(X^n)/\text{im } \delta_{n+1} \cong H_n(X^{n+1})$. Die Behauptung des Satzes folgt nun aus der Beobachtung, dass $H_n(X^{n+1}) \cong H_n(X)$ nach Schritt 3 gilt. □

Korollar 3.27. Sei k die Anzahl der n -Zellen in einer CW-Struktur von X . Dann hat $H_n(X)$ höchstens k Erzeuger. Insbesondere, wenn es keine n -Zellen gibt, so gilt: $H_n(X) = 0$. \square

Satz 3.28. Betrachte e_γ^n als einen Erzeuger von $H_n(X^n, X^{n-1})$. Der Homomorphismus d_n im (3.22) ist durch

$$d_n(e_\gamma^n) = \sum_{\mu} d_{\gamma\mu} e_\mu^{n-1} \quad (3.29)$$

gegeben, wobei $d_{\gamma\mu}$ der Grad der Abbildung

$$S^{n-1} = \partial e_\gamma^n \rightarrow X^{n-1} \rightarrow X^{n-1}/(X^{n-1} \setminus e_\mu^{n-1}) = S^{n-1}$$

ist. Dabei ist die Summe (3.29) endlich.

Beweis. Betrachte das kommutierende Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} H_n(B_{n,\gamma}, \partial B_{n,\gamma}) & \xrightarrow[\cong]{\delta} & \tilde{H}_{n-1}(\partial B_{n,\gamma}) & \xrightarrow{\Delta_*} & \tilde{H}_{n-1}(S_\mu^{n-1}) \\ \downarrow \Phi_* & & \downarrow \varphi_* & & \uparrow q_{\mu*} \\ H_n(X^n, X^{n-1}) & \xrightarrow{\delta} & \tilde{H}_{n-1}(X^{n-1}) & \xrightarrow{q_*} & \tilde{H}_{n-1}(X^{n-1}/X^{n-2}) \\ & \searrow d_n & \downarrow j_{n-1} & & \downarrow \cong \\ & & H_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2}) & \xrightarrow{\cong} & H_{n-1}(X^{n-1}/X^{n-2}, X^{n-2}/X^{n-2}), \end{array}$$

wobei die folgende Bezeichnungen verwendet werden:

- Φ_γ ist die charakteristische Abbildung von e_γ ;
- $\varphi_\gamma: \partial B_{n,\gamma} \rightarrow X^{n-1}$ ist die Anhefteabbildung von e_γ ;
- $q: X^{n-1} \rightarrow X^{n-1}/X^{n-2}$ ist die Projektion;
- $q_\mu: X^{n-1}/X^{n-2} \rightarrow X^{n-1}/(X^{n-1} \setminus e_\mu^{n-1}) \cong S^{n-1}$ ist die Projektion;
- $\Delta := q_\mu \circ q \circ \varphi_\gamma$.

Der Erzeuger $e_\gamma \in H_n(X^n, X^{n-1})$ ist $\Phi_{\gamma*} \circ \delta^{-1}(a)$, wobei a der Erzeuger von $\tilde{H}_{n-1}(\partial B_{n,\gamma})$ ist. Die Kommutativität des Diagramms liefert die Gleichheit

$$d_{\mu\gamma} a = q_{\mu*}(d_n(e_\gamma)) = \Delta_* a = (\deg \Delta) a.$$

Hier folgt die erste Gleichheit aus der Beobachtung: $q_{\mu*}$ bildet e_μ^{n-1} auf a und verschwindet auf allen anderen Erzeugern. Dies liefert (3.29). \square

Beispiel 3.30. (Homologiegruppen des reell-projektiven Raumes) Wir fangen mit einigen Beobachtungen an. Eine Abbildung $f: S^n \vee S^n \rightarrow S^n$ kann als ein Paar (f_1, f_2) von Abbildungen $S^n \rightarrow S^n$ aufgefasst werden. Dann gilt für die induzierten Abbildungen: $f_*(x, y) = f_{1*}x + f_{2*}y$ (dies folgt aus der Tatsache, dass die Projektion $S^n \sqcup S^n \rightarrow S^n \vee S^n$ einen Isomorphismus auf \tilde{H}_* induziert).

Eine andere Beobachtung ist das Folgende. Sei $F: S^n \rightarrow S^n \vee S^n$ mit der Eigenschaft: F bildet S_+^n auf eine Kopie von S^n und S_-^n auf die andere Kopie (das Bild des Äquators muss notwendigerweise der Punkt im $S^n \vee S^n$ sein). Dann gilt: $F_* a = (f_{+*} a, f_{-*} a)$, wobei $f_\pm: S_\pm^n / \partial S_\pm^n \rightarrow S^n$ durch die Einschränkung von F gegeben ist.

Nun wollen wir die Homologiegruppen von $\mathbb{R}P^n$ berechnen. Aus dem Beispiel 3.8 wissen wir, dass

$$\mathbb{R}P^n = \mathbb{R}P^{n-1} \cup e^n,$$

wobei die Anhefteabbildung φ die Projektion $S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}P^{n-1}$ ist. Betrachten wir das kommutierende Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 S^{n-1} & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{R}P^{n-1} \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 S^{n-1}/S^{n-2} & \longrightarrow & \mathbb{R}P^{n-1}/\mathbb{R}P^{n-2} \\
 \cong \downarrow & & \downarrow \cong \\
 S^{n-1} \vee S^{n-1} & \xrightarrow{\psi} & S^{n-1}
 \end{array}$$

Dabei erfüllen die Komponenten (ψ_1, ψ_2) von ψ die Relation $\psi_2 = \psi_1 \circ A$, wobei A die Antipodale Abbildung ist. ψ_1 kann als *id* genommen werden (nach der Konstruktion von Zellen im $\mathbb{R}P^n$).

Die Abbildung $\Delta: S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$ (die Diagonale im obigen Diagramm) induziert den Homomorphismus Δ_* . Es gilt:

$$\Delta_* a = a + A_* a = (1 + (-1)^n) a, \quad a \in H_{n-1}(S^{n-1})$$

d.h. $\deg \Delta = 1 + (-1)^n$.

Dies liefert, dass der Komplex (3.22) für $\mathbb{R}P^n$ die folgende Gestalt hat:

$$\begin{array}{ll}
 0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{2 \times} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{2 \times} \dots \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \rightarrow 0 & n \text{ gerade,} \\
 0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{0 \times} \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \xrightarrow{0 \times} \dots \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \rightarrow 0 & n \text{ ungerade.}
 \end{array}$$

Es folgt, dass die Homologiegruppen von $\mathbb{R}P^n$ durch

$$H_k(\mathbb{R}P^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{für } k = 0 \text{ und } k = n \text{ falls } n \text{ ungerade;} \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \text{für } k \text{ ungerade, } k < n; \\ 0 & \text{sonst;} \end{cases}$$

gegeben sind.

3.5 Euler-Charakteristik

Für einen topologischen Raum X heißt

$$b_k(X) := \text{rk } H_k(X)$$

die k -te Betti-Zahl von X .

Es gelte für X : Alle Betti-Zahlen sind endlich und nur endlich viele sind ungleich 0. Dann heißt die Zahl

$$\chi(X) := \sum_k (-1)^k b_k(X)$$

die Euler-Charakteristik von X . Zum Beispiel ist nach Korollar 3.27 ist die Euler-Charakteristik eines endlichen CW-Komplexes wohldefiniert.

Satz 3.31. *Für einen endlichen CW-Komplex X gilt:*

$$\chi(X) = \sum_n (-1)^n c_n,$$

wobei c_n die Anzahl von n -Zellen ist.

Beweis. Nach Schritt 2 im Beweis des Satzes 2.53 erhalten wir die folgende Tatsache: Ist $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ eine exakte Sequenz von endlich-erzeugten abelschen Gruppen, so gilt: $\text{rk } B = \text{rk } A + \text{rk } C$.

Sei nun

$$0 \rightarrow C_n \xrightarrow{d_n} C_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow C_1 \rightarrow C_0 \rightarrow 0$$

der Komplex (3.22) für X . Bezeichne

- $Z_k := \ker d_k$;
- $B_k := \text{im } d_{k+1}$;
- $H_k := Z_k / B_k$.

Es gilt:

$$\begin{array}{llll} 0 \rightarrow B_k \rightarrow Z_k \rightarrow H_k \rightarrow 0 & \text{ist exakt} & \implies & \text{rk } Z_k = \text{rk } B_k + \text{rk } H_k; \\ 0 \rightarrow Z_k \rightarrow C_k \rightarrow B_{k-1} \rightarrow 0 & \text{ist exakt} & \implies & \text{rk } C_k = \text{rk } Z_k + \text{rk } B_{k-1}. \end{array}$$

Folglich, gilt: $\text{rk } C_k = \text{rk } B_k + \text{rk } B_{k-1} + \text{rk } H_k \implies \sum (-1)^k \text{rk } C_k = \sum (-1)^k \text{rk } H_k$. □

Diese Satz verallgemeinert den Satz 2.53 für beliebige Dimensionen.

Bemerkung 3.32 (Noch ein Beweis des Satzes 2.64). Ein planarer Graph liefert eine CW-Struktur auf $S^2 = \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$. Nach dem Satz 3.31 gilt:

$$\#\text{Knoten} - \#\text{Kanten} + \#\text{Flächen} = \chi(S^2) = 2.$$