E. Lau

Algebra 1, Übungsblatt 3

Abgabe Donnerstag 31.10.2019 bis 8:25 Uhr im Postfach des Tutors in V3-216

Die Abgabe ist in Zweiergruppen möglich.

Aufgabe 1. Zeigen Sie, dass eine Operation einer Gruppe mit 55 Elementen auf einer Menge mit 39 Elementen mindestens einen Fixpunkt haben muss.

Aufgabe 2. Zeigen Sie:

1. Jede Gruppe der Ordnung 200 hat einen Normalteiler der Ordnung 25.
2. Jede Gruppe der Ordnung 30 hat einen Normalteiler von Primzahlordnung.
   Hinweis: Man zähle die Elemente der Ordnung 5.
3. Jede Gruppe der Ordnung 36 hat einen nicht-trivialen Normalteiler.
   Hinweis: G operiert auf der Menge der 3-Sylowgruppen.

Aufgabe 3. Konkrete Sylowgruppen:

1. Bestimmen Sie eine 2-Sylowgruppe der symmetrischen Gruppe S_4.
2. Zeigen Sie, dass $|\operatorname{GL}_n(\mathbb{F}_p)| = (p^n-1)(p^n-p)\cdots(p^n-p^{n-1})$.
3. Zeigen Sie: Eine p-Sylowgruppe in $\operatorname{GL}_n(\mathbb{F}_p)$ ist die Gruppe U der oberen Dreiecksmatrizen mit 1 auf der Diagonalen.

Aufgabe 4. Beispiele semidirekter Produkte.

1. Es sei G die Menge aller Abbildungen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der Form $f(x) = ax + b$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und $a \neq 0$. Zeigen Sie, dass G bezüglich der Komposition eine Gruppe ist und isomorph zum semidirekten Produkt $\mathbb{R} \rtimes \mathbb{R}^*$ bezüglich einer (welcher?) Operation der multiplikativen Gruppe $\mathbb{R}^*$ auf der additiven Gruppe $\mathbb{R}$.
2. Zeigen Sie, dass $A_4 \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \rtimes \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ bezüglich einer (welcher?) Operation von $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ auf $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.