E. Lau

Algebra 1, Übungsblatt 4

Abgabe Donnerstag 7.11.2019 bis 8:25 Uhr im Postfach des Tutors in V3-216

Die Abgabe ist in Zweiergruppen möglich.

Aufgabe 1. Zeigen Sie, dass die folgenden Gruppen auflösbar sind:

1. Die Gruppe $B_2 = \{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & c \end{smallmatrix}\right)\} \subseteq \mathrm{GL}_2(k)$ der invertierbaren oberen Dreiecksmatrizen über einem Körper k.
2. Die Gruppe $B_n \subseteq \mathrm{GL}_n(k)$ der invertierbaren oberen Dreiecksmatrizen über einem Körper k für $n \geq 1$.
3. Jede endliche Gruppe G der Ordnung p^2q, wenn p und q Primzahlen sind.

Aufgabe 2. Es sei G eine Gruppe. Zeigen Sie:

1. Wenn G auflösbar ist, dann ist auch jede Untergruppe von G auflösbar.
2. Wenn G auflösbar ist, dann ist für jeden Normalteiler $N \subseteq G$ auch die Quotientengruppe G/N auflösbar.
3. Wenn es einen Normalteiler $N \subseteq G$ gibt, so dass N und G/N beide auflösbar sind, dann ist G auflösbar.

Aufgabe 3. Es sei R der Ring der Abbildungen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit der Ringstruktur $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$ und $(fg)(x) = f(x)g(x)$. Welche der folgenden Teilmengen von R sind Ideale?

1. $I = \{f \in R \mid f(n) = 0 \text{ für alle } n \in \mathbb{Z}\}$
2. $J = \{f \in R \mid f(n) = f(m) \text{ für alle } n, m \in \mathbb{Z}\}$
3. $K = \{f \in R \mid \text{es gibt } c \in \mathbb{R} \text{ so dass } f(x) = 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R} \text{ mit } |x| > c\}$
4. $M = \{f \in R \mid f(n) = 0 \text{ für alle bis auf endlich viele } n \in \mathbb{Z}\}$

Aufgabe 4. Es sei $f : R \to S$ ein Ringhomomorphismus. Zeigen Sie:

1. Für ein Ideal $J \subseteq S$ ist das Urbild $f^{-1}(J)$ ein Ideal von R.
2. Wenn f surjektiv ist, definiert die Zuordnung $J \mapsto f^{-1}(J)$ eine Bijektion zwischen der Menge der Ideale von S und der Menge der Ideale von R, die den Kern von f enthalten.
3. Es gibt Beispiele, wo für ein Ideal $I \subseteq R$ das Bild $f(I)$ kein Ideal von S ist.