E. Lau

Algebra 1, Übungsblatt 6

Abgabe Donnerstag 21.11.2019 bis 8:25 Uhr im Postfach des Tutors in V3-216

Die Abgabe ist in Zweiergruppen möglich.

Aufgabe 1. Es sei $f \in \mathbb{Z}[X]$ ein Polynom vom Grad n und p eine Primzahl, so dass die Reduktion $\bar{f} \in \mathbb{F}_p[X]$ irreduzibel vom Grad n ist. Zeigen Sie:

1. Wenn f primitiv ist, dann ist f irreduzibel in $\mathbb{Z}[X]$.
2. In jedem Fall ist f irreduzibel in $\mathbb{Q}[X]$.

Aufgabe 2. Zeigen sie, dass die folgenden Polynome in den angegebenen Ringen irreduzibel sind.

1. $f = X^5 + 12X^2 - 6X + 18$ in $\mathbb{Z}[X]$.
2. $g = 2X^4 + 20X^3 + 200X^2 - 200X - 20$ in $\mathbb{Q}[X]$.
3. $h = 73X^2 + 35X - 57$ in $\mathbb{Z}[X]$.
   Hinweis: $X^2 + X + 1$ ist in $\mathbb{F}_2[X]$ irreduzibel (warum?).
4. $s = (X^p - 1)/(X - 1) = 1 + X + \ldots + X^{p-1}$ in $\mathbb{Z}[X]$ für eine Primzahl p.
   Hinweis: Betrachten Sie $s(X + 1)$.

Aufgabe 3. Es sei R ein Ring. Ein Element $x \in R$ heißt nilpotent, wenn $x^n = 0$ für eine natürliche Zahl n. Mit $\mathcal{N}_R$ wird die Menge aller nilpotenten Elemente von R bezeichnet. Zeigen Sie:

1. Die Menge $\mathcal{N}_R$ ist ein Ideal von R.
2. Im Fall $R = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ gilt $\mathcal{N}_R = (0)$ genau dann, wenn n quadratfrei ist, d.h. wenn es keine Primzahl p gibt mit $p^2 \mid n$.

Aufgabe 4. Es sei R ein faktorieller Ring. Zeigen Sie:

1. Für eine multiplikative Menge $S \subseteq R$ ist der Ring $S^{-1}R$ faktoriell.
2. Für ein Primelement $p \in R$ sei $S = R \setminus pR$. Dann ist der Ring $R' = S^{-1}R$ ein Hauptidealring mit dem einzigen maximalen Ideal pR'.