E. Lau

# Algebra 1, Übungsblatt 9

Abgabe Donnerstag 12.12.2019 bis 8:25 Uhr im Postfach des Tutors in V3-216

Die Abgabe ist in Zweiergruppen möglich.

**Aufgabe 1.** Zeigen Sie:

1. Jede Körpererweiterung vom Grad zwei ist normal.
2. Für $K = \mathbb{Q}$ und $L = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ und $M = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$ sind $M/L$ und $L/K$ normal, aber $M/K$ ist nicht normal.

**Aufgabe 2.** Sei $a = \sqrt{3}$ und $b = \sqrt{1+\sqrt{3}}$ sowie $K = \mathbb{Q}(a)$ und $L = \mathbb{Q}(b)$.

1. Zeigen Sie, dass $f = X^4 - 2X^2 - 2$ in $\mathbb{Q}[X]$ irreduzibel ist.
2. Zeigen Sie $K \subseteq L$ und bestimmen Sie die Minimalpolynome von $a$ über $\mathbb{Q}$, von $b$ über $\mathbb{Q}$, von $b$ über $K$ sowie die Körpergrade $[K : \mathbb{Q}]$ und $[L : K]$.
3. Welche der Erweiterungen $K/\mathbb{Q}$, $L/K$, $L/\mathbb{Q}$ sind normal?

**Aufgabe 3.** Es sei $L/K$ eine endliche Körpererweiterung vom Grad $n$ und $a \in L$. Zeigen Sie:

1. Wenn es $K$-Homomorphismen $\sigma_i : L \to \bar{K}$ gibt für $1 \leq i \leq n$ so dass $\sigma_i(a) \neq \sigma_j(a)$ für $i \neq j$, dann ist $L = K(a)$.
2. Im Fall $K = \mathbb{Q}$ und $L = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{5}, i)$ gilt $L = K(a)$ für $a = \sqrt[4]{5} + i$.

**Aufgabe 4.** Es seien $M/K$ eine Erweiterung und $K \subseteq L \subseteq M$ sowie $K \subseteq L' \subseteq M$ zwei Zwischenkörper. Das Kompositum $LL'$ ist der kleineste Teilkörper von $M$, der $L$ und $L'$ enthält, also $LL' = L(L') = L'(L)$. Zeigen Sie:

1. Wenn $L/K$ und $L'/K$ normal sind, dann sind auch $L \cap L'$ und $LL'$ normale Erweiterungen von $K$.
2. Wenn $L/K$ und $L'/K$ separabel sind, dann sind auch $L \cap L'$ und $LL'$ separable Erweiterungen von $K$.