E. Lau

Algebra 1, Übungsblatt 10

Abgabe Donnerstag 19.12.2019 bis 8:25 Uhr im Postfach des Tutors in V3-216

Die Abgabe ist in Zweiergruppen möglich.

Aufgabe 1. Sei K ein Körper mit $|K| = q = p^r$ für eine Primzahl p. Zeigen Sie:

1. Wenn $L \subseteq K$ ein Teilkörper ist, dann gilt $|L| = p^s$ mit $s \mid r$.
2. Für $s \mid r$ ist $L = \{a \in K \mid a^{p^s} = a\}$ ein Teilkörper von K mit $|L| = p^s$.
3. Jeder Teilkörper von K entsteht wie in (b).
4. Bestimmen Sie alle Teilkörper und deren Inklusionen von $K = \mathbb{F}_{4096}$.

Aufgabe 2. Es sei p eine Primzahl und $q = p^r$ mit $r \geq 1$. Zeigen Sie:

1. Ein irreduzibles Polynom $f \in \mathbb{F}_p[X]$ teilt $X^q - X$ genau dann, wenn $\deg(f)$ ein Teiler von r ist.
2. Das Produkt aller irreduziblen normierten Polynome über $\mathbb{F}_p$, deren Grad r teilt, ist gleich $X^q - X$.

Aufgabe 3. Es sei $K = \mathbb{Q}(\sqrt{5}, i)$ als Teilkörper von $\mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass $K/\mathbb{Q}$ eine Galoiserweiterung mit der Galoisgruppe $\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$ ist und bestimmen Sie alle Zwischenkörper der Erweiterung (durch Angabe von erzeugenden Elementen).

Aufgabe 4. Es sei L der Zerfällungskörper von $f = X^4 - 7$ über $\mathbb{Q}$. Wir betrachten die Operation von $G = \mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$ auf der Menge der Nullstellen von f. Zeigen Sie:

1. Die Galoisgruppe von L über $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{7})$ ist zyklisch von der Ordnung 2, es sei τ ein Erzeuger.
2. Die Galoisgruppe von L über $\mathbb{Q}(i)$ ist zyklisch von der Ordnung 4, es sei σ ein Erzeuger.
3. Die Gruppe G wird von σ und τ erzeugt und ist isomorph zur Diedergruppe $D_4 = \mathbb{Z}/4 \rtimes \mathbb{Z}/2$.