E. Lau

Algebra 1, Übungsblatt 11

Abgabe Donnerstag 9.1.2020 bis 8:25 Uhr im Postfach des Tutors in V3-216

Die Abgabe ist in Zweiergruppen möglich.

Aufgabe 1. Es sei L/K ein Zerfällungskörper des separablen Polynoms $f \in K[X]$. Zeigen Sie, dass f genau dann irreduzibel ist, wenn die Operation der Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(L/K)$ auf der Menge der Nullstellen von f transitiv ist.

Aufgabe 2. Es seien $M/L/K$ Körpererweiterungen so dass M/K und L/K endliche Galoiserweiterungen sind mit $\mathrm{Gal}(M/K) \cong S_n$ und $\mathrm{Gal}(L/K) \cong \mathbb{Z}/r\mathbb{Z}$. Welche Werte von r sind hier möglich?

Hinweis: Es gilt $D(S_n) = A_n$ (Kommutatorgruppe).

Aufgabe 3. Es sei $f \in \mathbb{R}[X]$ normiert vom Grad 3 und separabel, und Δ sei die Diskriminante von f. Zeigen Sie:

1. f hat drei reelle Nullstellen $\iff \Delta > 0$.
2. f hat genau eine reelle Nullstelle $\iff \Delta < 0$.
3. Finden Sie eine ähnliche Aussage für reelle Polynome von höherem Grad.

Hinweis: Man kann das direkt ausrechnen oder die Operation der Galoisgruppe von $\mathbb{C}/\mathbb{R}$ auf der Menge der Nullstellen von f betrachten, letzteres geht schneller.

Aufgabe 4. Es sei M/K eine Körpererweiterung mit zwei Zwischenkörpern L_1 und L_2 so dass L_i/K endliche Galoiserweiterungen sind, und es sei $L = L_1L_2$ das Kompositum. Zeigen Sie:

1. L/K ist eine endliche Galoiserweiterung.
2. Es gibt einen injektiven Gruppenhomomorphismus
$$\mathrm{Gal}(L/K) \to \mathrm{Gal}(L_1/K) \times \mathrm{Gal}(L_2/K), \quad \sigma \mapsto (\sigma|_{L_1}, \sigma|_{L_2})$$
3. Dieser Homomorphismus ist genau dann bijektiv, wenn $L_1 \cap L_2 = K$ gilt.