

Algebra 1, Übungsblatt 12

Abgabe Donnerstag 16.1.2020 bis 8:25 Uhr im Postfach des Tutors in V3-216

Die Abgabe ist in Zweiergruppen möglich.

Aufgabe 1. Es sei $\zeta_n \in \mathbb{C}$ eine primitive n -te Einheitswurzel.

1. Bestimmen Sie die Anzahl der Teilkörper des Körpers $\mathbb{Q}(\zeta_8)$.
2. Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q}(\zeta_3) = \mathbb{Q}(i\sqrt{3})$.
3. Bestimmen Sie den Grad von $\mathbb{Q}(\zeta_{12})/\mathbb{Q}$ und alle Zwischenkörper dieser Erweiterung einschließlich erzeugender Elemente.

Aufgabe 2. Zeigen Sie:

1. Zeigen Sie: Für jede Primzahl p enthält $\mathbb{Q}(\zeta_{p^2})$ einen eindeutigen Teilkörper K so dass K/\mathbb{Q} galoissch mit der Galoisgruppe $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ ist.
2. Für jede ungerade Primzahl p enthält $L = \mathbb{Q}(\zeta_p)$ einen eindeutigen Teilkörper K mit $[L : K] = 2$.
3. In 2. gilt $K = \mathbb{Q}(a)$ für $a = \zeta_p + \zeta_p^{-1}$. (Hinweis: Rechnen Sie $a\zeta_p = \dots$)

Aufgabe 3. Welche Konstruktionen sind mit Zirkel und Lineal möglich:

1. Quadratur des Dreiecks.
Genauer: Es sei a die Kantenlänge eines Quadrats mit dem gleichen Flächeninhalt wie ein gleichseitiges Dreieck der Kantenlänge 1. Ist a eine konstruierbare Zahl, d.h. $a \in K(\{0, 1\})$?
2. Kubatur der Kugel.
(Kantenlänge des Würfels gleichen Volumens wie eine Kugel vom Radius 1)
3. Kubatur der Kugel, wenn die Quadratur des Kreises erledigt ist.
Genauer: Es seien a_2 und a_3 die Kantenlängen des Quadrats und Würfels mit gleichem Flächeninhalt bzw. Volumen des Kreises bzw. der Kugel vom Radius 1. Gilt dann $a_3 \in K(\{0, 1, a_2\})$? Und umgekehrt?
4. Es sei L/\mathbb{Q} der Zerfällungskörper von $X^4 - 7$. Gilt $L \subseteq K(\{0, 1\})$?

Aufgabe 4. Wir betrachten den endlichen Körper \mathbb{F}_q mit q Elementen und das n -te Kreisteilungspolynom $\Phi_n \in \mathbb{Z}[X]$. Zeigen Sie:

1. Das Bild von Φ_n in $\mathbb{F}_q[X]$ ist genau dann irreduzibel, wenn q die multiplikative Gruppe $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$ erzeugt.
2. Das Polynom Φ_8 ist über keinem endlichen Körper irreduzibel, und 8 ist die kleinste Zahl mit dieser Eigenschaft.