E. Lau

# Algebra 1, Übungsblatt 13

Abgabe Donnerstag 16.1.2020 bis 8:25 Uhr im Postfach des Tutors in V3-216

Die Abgabe ist in Zweiergruppen möglich.

**Aufgabe 1.** Es seien $p$ eine Primzahl und $K$ ein Körper der Charakteristik ungleich $p$, der die $p$-ten Einheitswurzeln enthält. Zeigen Sie, dass für $a \in K$ folgende Bedingungen äquivalent sind:

1. Das Polynom $X^p - a$ ist reduzibel.
2. Das Polynom $X^p - a$ hat eine Nullstelle in $K$.
3. Das Polynom $X^p - a$ zerfällt in Linearfaktoren.

**Aufgabe 2.** Es sei $K/\mathbb{Q}$ der Zerfällungskörper des Polynoms $X^{11}-3$ und $a = \sqrt[11]{3}$.

1. Zeigen Sie dass $K = \mathbb{Q}(a, \zeta_{11})$ und $[K : \mathbb{Q}] = 110$.
2. Welche der Erweiterungen $K/\mathbb{Q}(a)$, $\mathbb{Q}(a)/\mathbb{Q}$, $K/\mathbb{Q}(\zeta_{11})$, $\mathbb{Q}(\zeta_{11})/\mathbb{Q}$ sind galoissch, und was ist in dem Fall die Galoisgruppe?
3. Die Gruppe $(\mathbb{Z}/11\mathbb{Z})^*$ operiere auf der Gruppe $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$ durch die Multiplikation im Ring $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$. Zeigen Sie, dass die Galoisgruppe von $K/\mathbb{Q}$ isomorph ist zum semidirekten Produkt $(\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}) \rtimes (\mathbb{Z}/11\mathbb{Z})^*$.

**Aufgabe 3.** Es sei $p$ eine Primzahl. Zeigen Sie:

1. Wenn eine Untergruppe $H$ der symmetrischen Gruppe $S_p$ eine Transposition und einen $p$-Zykel enthält, dann ist $H = S_p$.
2. Eine Untergruppe $H$ von $S_p$ enthält genau dann einen $p$-Zykel, wenn $p$ die Ordnung $|H|$ teilt.
3. Es sei $f \in \mathbb{Q}[X]$ ein irreduzibles Polynom vom Grad $p$ mit genau $p-2$ reellen Nullstellen. Dann ist die Galoisgruppe des Zerfällungskörpers von $f$ über $\mathbb{Q}$ isomorph zu $S_p$.
4. Was ist die Galoisgruppe des Zerfällungskörpers von $X^5 - 4X + 2$ über $\mathbb{Q}$?

**Aufgabe 4.** Konkrete Beispiele.

1. Zeigen Sie, dass $\sqrt{5} \in \mathbb{Q}(\zeta_5)$. Was hat das mit dem Fünfeck zu tun?

   Hinweis: Bestimmen Sie das Minimalpolynom von $a = \zeta_5 + \zeta_5^{-1}$ indem Sie $a^2$ berechnen und $1 + \zeta_5 + \zeta_5^2 + \zeta_5^3 + \zeta_5^4 = 0$ verwenden.
2. Es sei $K$ der Zerfällungskörper von $f = X^6 + 3$ über $\mathbb{Q}$. Bestimmen Sie den Grad von $K/\mathbb{Q}$ und die Galoisgruppe $G$ dieser Erweiterung. Wie operiert diese auf den Nullstellen von $f$?

   Hinweise: Es gilt $\mathbb{Q}(\zeta_3) = \mathbb{Q}(\sqrt{-3})$.
   Die komplexe Konjugation gibt ein Element von $G$.