E. Lau

Lineare Algebra 2, Übungsblatt 1

Abgabe Donnerstag 11.4.2019 bis 10:15 Uhr im Postfach des Tutors in V3-216

Die Abgabe ist in Zweiergruppen möglich.

Aufgabe 1. Dividieren Sie für die folgenden Paare von Polynomen $f, g \in \mathbb{Q}[X]$ jeweils f mit Rest durch g.

1. $f = X^3 + X^2 + X + 1, \quad g = X + 2,$
2. $f = X^5 + 2X^3 - 3X^2 + X + 7, \quad g = X^2 + X - 2,$
3. $f = X^n - 1, \quad g = X - 1.$

Aufgabe 2 (Einheiten)**.** Zeigen Sie

1. Die Einheiten im Polynomring $K[X]$ sind genau die Polynome vom Grad 0.
2. Es sei R ein Ring und $x \in R$ nilpotent, d.h. $x^n = 0$ für eine natürliche Zahl n. Zeigen Sie, dass $1 + x$ eine Einheit ist.

Aufgabe 3. Schreiben Sie das Polynom $X^3 - 1$ als Produkt von irreduziblen normierten Polynomen in $K[X]$ für

(a) $K = \mathbb{R}$, (b) $K = \mathbb{C}$, (c) $K = \mathbb{F}_3$, (d) $K = \mathbb{F}_5$, (e) $K = \mathbb{F}_7$.

Hinweis: Sie können eine Nullstelle leicht erraten.

Aufgabe 4 (Bruchrechnung)**.** Es sei R ein Integritätsbereich. Wir definieren auf der Menge $R \times (R \setminus \{0\})$ eine Relation $\sim$ durch

$(a, b) \sim (c, d)$ genau dann wenn $ad = bc$.

Zeigen Sie:

1. Das ist eine Äquivalenzrelation. Wir bezeichnen die Äquivalenzklasse von (a, b) mit $\frac{a}{b}$, und $\mathrm{Quot}(R)$ sei die Menge aller Äquivalenzklassen.
2. Es gibt auf $\mathrm{Quot}(R)$ eine Addition und eine Multiplikation, so dass
$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}, \qquad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$
für alle $a, c \in R$ und $b, d \in R \setminus \{0\}$.
3. Dadurch wird $\mathrm{Quot}(R)$ ein Körper.