E. Lau

Lineare Algebra 2, Übungsblatt 2

Abgabe Donnerstag 18.4.2019 bis 10:15 Uhr im Postfach des Tutors in V3-216

Die Abgabe ist in Zweiergruppen möglich.

Aufgabe 1. Zeigen Sie: Für einen Ringhomomorphismus $\phi : R \to S$ und ein Ideal $I \subseteq S$ ist das Urbild $\phi^{-1}(I)$ ein Ideal von R.

Aufgabe 2. Zeigen Sie: Jeder endliche Integritätsbereich ist ein Körper.

Hinweis: Betrachten Sie für $a \in R$ die Abbildung $R \to R$, $b \mapsto ab$.

Aufgabe 3. Für einen Körper K sei R die Menge aller Polynome

$$f = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \in K[X]$$

mit $a_1 = 0$. Zeigen Sie:

1. R wird durch die Addition und Multiplikation von Polynomen ein Ring.
2. Die Elemente X^2 und X^3 von R sind irreduzibel.
3. Die Elemente X^2 und X^3 von R sind nicht prim.
   Hinweis: Betrachten Sie die Gleichung $X^2X^2X^2 = X^3X^3$.

Aufgabe 4. Es sei $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ als Teilmenge von $\mathbb{C}$. Zeigen Sie:

1. Durch die Addition und Multiplikation komplexer Zahlen wird $\mathbb{Z}[i]$ ein Ring.
2. Zu jedem $z \in \mathbb{C}$ gibt es ein $q \in \mathbb{Z}[i]$ mit $|z - q|^2 \leq 1/2$.
3. Der Ring $\mathbb{Z}[i]$ ist Euklidisch mit der Gradabbildung $\mathbb{Z}[i] \to \mathbb{N}$, $z \mapsto |z|^2$.
4. Bestimmen Sie die Einheiten von $\mathbb{Z}[i]$ und die Primfaktorzerlegungen der Elemente $1 + i$, 3, 5.