E. Lau

Lineare Algebra 2, Übungsblatt 3

Abgabe Donnerstag 25.4.2019 bis 10:15 Uhr im Postfach des Tutors in V3-216

Die Abgabe ist in Zweiergruppen möglich.

Aufgabe 1. Bestimmen Sie mit dem Euklidischen Algorithmus $h = \mathrm{ggT}(f, g)$ im Ring $\mathbb{Q}[X]$ für $f = X^3 + X^2 + X + 1$ und $g = X^3 - X$ sowie eine Darstellung $h = uf + vg$ mit $u, v \in \mathbb{Q}[X]$.

Aufgabe 2. Berechnen Sie für $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{Q}$ das charakteristische Polynom der Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & & & & a_0 \\ 1 & 0 & & & a_1 \\ & 1 & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & 0 & a_{n-2} \\ & & & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3. Zeigen Sie: Für eine invertierbare Matrix $A \in M_n(K)$ gibt es ein Polynom $P \in K[X]$ mit $A^{-1} = P(A)$.

Aufgabe 4. Es sei V ein K-Vektorraum der Dimension n. Ein Endomorphismus $f \in \mathrm{End}(V)$ heißt nilpotent, wenn die m-fache Komposition f^n gleich Null ist für ein $m \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass äquivalent ist:

1. f ist nilpotent.
2. Es gibt eine Basis von V bezüglich derer die darstellende Matrix von f eine obere Dreiecksmatrix mit Nullen auf der Diagonalen ist.
3. Das charakteristische Polynom von f ist $\chi_f = X^n$.

Hinweis: Ergänzen Sie eine Basis von $\mathrm{Ker}(f)$ zu einer Basis von $\mathrm{Ker}(f^2)$ usw.