E. Lau

Lineare Algebra 2, Übungsblatt 4

Abgabe Donnerstag 2.5.2019 bis 10:15 Uhr im Postfach des Tutors in V3-216

Die Abgabe ist in Zweiergruppen möglich.

Aufgabe 1. Bestimmen Sie die Jordansche Normalform der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

in $M_6(\mathbb{Q})$. Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass $\chi_A = (X-1)^2(X-2)^4$ ist.

Aufgabe 2. Bestimmen Sie die Jordanschen Normalformen der folgenden Endomorphismen, wobei V immer ein $\mathbb{C}$-Vektorraum ist.

1. $f \in \mathrm{End}(V)$ mit $\chi_f = (X+6)^4$ und $\mu_f = (X+6)^3$,
2. $g \in \mathrm{End}(V)$ mit $\mu_g = (X-5)$ und $\dim(V) = 3$,
3. $h \in \mathrm{End}(V)$ mit $\chi_h = X(X-1)^4$ und $\dim(V_f(1)) = 3$,
4. $p \in \mathrm{End}(V)$ mit $\chi_p = X^7$ und $\dim(\mathrm{Ker}(p^2)) = 3$,
5. $q \in \mathrm{End}(V)$ mit $\dim(V) = 6$, $\mu_q = (X-1)^3 X$, $\mathrm{Tr}(q) = 4$
6. $s \in \mathrm{End}(V)$ mit $\dim(V) = 8$, $\mu_s = (X-2)^3$, $\dim(V_s(2)) = 3$.

Aufgabe 3. Zeigen Sie, dass jede Matrix $A \in M_n(\mathbb{Q})$ mit $A^3 = A$ diagonalisierbar ist.

Aufgabe 4. Es sei f ein nilpotenter Endomorphismus eines Vektorraums V mit $1 \leq \dim(V) < \infty$. Zeigen Sie, dass die folgenden Bedingungen äquivalent sind:

1. Die Jordansche Normalform von f hat nur einen Block,
2. $\mathrm{Ker}(f)$ ist eindimensional,
3. $\mathrm{Bild}(f)$ hat die Dimension $\dim(V) - 1$,
4. es gibt ein $x \in V$, so dass V von $x, f(x), f^2(x), \ldots$ erzeugt ist.