E. Lau

Lineare Algebra 2, Übungsblatt 7

Abgabe Donnerstag 23.5.2019 bis 10:15 Uhr im Postfach des Tutors in V3-216

Die Abgabe ist in Zweiergruppen möglich.

Aufgabe 1. Welche der folgenden reellen Matrizen sind kongruent?

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2. Es sei $V = M_n(\mathbb{R})$ und $\beta : V \times V \to \mathbb{R}$, $\beta(A, B) = \mathrm{Tr}(AB)$.

1. Zeigen Sie, dass β eine nicht-ausgeartete symmetrische Bilinearform ist.
2. Bestimmen Sie die Signatur von β.

Aufgabe 3. Es sei $K = \mathbb{F}_5$ der endliche Körper mit 5 Elementen. Zeigen Sie:

1. Für jede nicht-ausgeartete symmetrische Bilinearform β auf einem endlich-dimensionalen K-Vektorraum V gibt es eine Basis $\mathcal{B}$ von V so dass
$$M_{\mathcal{B}}(\beta) = \begin{pmatrix} E_r & \\ & 2E_s \end{pmatrix}.$$
2. Über K sind $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ kongruent.
3. Jede invertierbare symmetrische Matrix über K ist kongruent zu genau einer Matrix der Form
$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & c \end{pmatrix} \text{ mit } c \in \{1, 2\}.$$

Aufgabe 4. Es sei (V, q) ein nicht-ausgearteter quadratischer Raum der Dimension n über einem Körper der Charakteristik ungleich zwei. Zeigen Sie, dass es Spiegelungen an Hyperebenen $s_1, \ldots, s_n$ gibt so dass $s_1 \circ \ldots \circ s_n = -\,\mathrm{id}_V$.