E. Lau

Lineare Algebra 2, Übungsblatt 8

Abgabe **Freitag 31.5.2019** bis 10:15 Uhr im Postfach des Tutors in V3-216

Die Abgabe ist in Zweiergruppen möglich.

Es sei K ein Körper der Charakteristik ungleich zwei.

Aufgabe 1. Welche der folgenden komplexen Matrizen sind Hermitesch kongruent?

$$\begin{pmatrix} 2 & i \\ -i & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2i \\ -2i & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2. Es sei β eine symmetrische Bilinearform auf dem K-Vektorraum V. Zeigen Sie:

1. Die quadratische Form $q(x) = \beta(x, x)$ ist genau dann anisotrop, wenn ihre Einschränkung auf jeden Untervektorraum von V nicht-ausgeartet ist.

2. Angenommen, q ist anisotrop. In dem Fall sind $v_1, \ldots, v_r \in V$ genau dann linear unabhängig, wenn $\det(\beta(v_i, v_j)) \neq 0$.

Aufgabe 3. Es sei β eine nicht-ausgeartete symmetrische Bilinearform auf dem K-Vektorraum V, und $W \subseteq V$ sei ein total isotroper Unterraum. Zeigen Sie, dass jede Basis $w_1, \ldots, w_d$ von W sich durch Vektoren $w_{d+1}, \ldots, w_{2d} \in V$ ergänzen lässt, so dass

$$(\beta(w_i, w_j))_{i,j} = \begin{pmatrix} 0 & E_d \\ E_d & 0 \end{pmatrix}.$$

Hinweis: Man wähle w_{d+1} und betrachte das orthogonale Komplement der linearen Hülle von w_1 und w_{d+1}.

Aufgabe 4. Es sei (V, q) ein nicht-ausgearteter quadratischer Raum über $\mathbb{R}$ mit der Signatur $(n, 1)$. Ein Vektor $v \in V$ mit $v \neq 0$ heißt Raumvektor wenn $q(v) > 0$, er heißt Zeitvektor wenn $q(v) < 0$, und er heißt Lichtvektor wenn $q(v) = 0$. Es sei $\beta : V \times V \to \mathbb{R}$ die durch q definierte symmetrische Bilinearform. Zeigen Sie:

1. Für zwei Zeitvektoren $v, w \in V$ gilt $\beta(v, w) \neq 0$.

2. Für einen Zeitvektor $v \in V$ und einen Lichtvektor $w \in V$ gilt $\beta(v, w) \neq 0$.

3. Für zwei Lichtvektoren $v, w \in V$ ist genau dann $\beta(v, w) = 0$, wenn v und w linear abhängig sind.

4. Sei $v \in V$ mit $v \neq 0$. Bestimmen Sie die Signatur von q auf dem orthogonalen Komplement $U = \langle v \rangle^{\perp}$ in Abhängigkeit davon, ob v ein Zeitvektor, Raumvektor oder Lichtvektor ist.