E. Lau

Lineare Algebra 2, Übungsblatt 10

Abgabe Donnerstag 13.6.2019 bis 10:15 Uhr im Postfach des Tutors in V3-216

Die Abgabe ist in Zweiergruppen möglich.

Aufgabe 1. Bestimmen Sie die Polarzerlegung der folgenden Matrizen.

$$\begin{pmatrix} 0 & 6/5 & 8/5 \\ 0 & -4/5 & 3/5 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R}), \qquad \begin{pmatrix} 3/\sqrt{2} & 3i/\sqrt{2} \\ i/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}).$$

Aufgabe 2. Es sei V ein unitärer Vektorraum und $f \in \mathrm{End}(V)$. Zeigen Sie:

1. Wenn $f \circ f = \mathrm{id}_V$, dann sind äquivalent:
   (i) f ist normal, (ii) f ist selbstadjungiert, (iii) f ist unitär.
2. Wenn $f \circ f = f$, dann sind äquivalent:
   (i) f ist normal, (ii) f ist selbstadjungiert.
3. Wenn $f^{\circ n} = f \circ \ldots \circ f = \mathrm{id}_V$ für ein $n \geq 3$, dann sind äquivalent:
   (i) f ist normal, (ii) f ist unitär.

Aufgabe 3. Zeigen Sie, dass eine quadratische reelle Matrix A genau dann symmetrisch ist, wenn es eine quadratische komplexe Matrix S gibt so dass $A = S^t S$.

Aufgabe 4. Zeigen Sie:

1. Für $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ gibt es ein Polynom $P \in \mathbb{C}[X]$ so dass $P(\lambda_i) = \bar{\lambda}_i$.
2. Ein Endomorphismus f eines unitären Vektorraums V ist genau dann normal, wenn es ein Polynom $P \in \mathbb{C}[X]$ gibt so dass $f^* = P(f)$.