E. Lau

Lineare Algebra 2, Übungsblatt 12

Abgabe 27.6.2019 bis 10:15 Uhr im Postfach des Tutors in V3-216

Die Abgabe ist in Zweiergruppen möglich.

Aufgabe 1. Es seien $f, g \in \mathrm{End}(\mathbb{Q}^2)$ durch die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

gegeben. Bestimmen Sie die Jordansche Normalform von $f \otimes g \in \mathrm{End}(\mathbb{Q}^2 \otimes \mathbb{Q}^2)$.

Aufgabe 2. Es sei V ein K-Vektorraum. Zeigen Sie, dass $v_1, \ldots, v_d \in V$ genau dann linear unabhängig sind, wenn das Element $v_1 \wedge \ldots \wedge v_d \in \Lambda^d V$ nicht Null ist.

Hinweis: Wenn nötig können Sie annehmen, dass V endlichdimensional ist.

Aufgabe 3. Es sei $\beta : V \times W \to K$ eine bilineare Abbildung von K-Vektorräumen und $v_1, \ldots, v_n \in V$ sowie $w_1, \ldots, w_n \in W$ gegeben. Zeigen Sie, dass die Matrix $A = (a_{ij})$ mit $a_{ij} = \beta(v_i, w_j)$ genau dann invertierbar ist, wenn gilt: $v_1, \ldots, v_n$ sind linear unabhängig, $w_1, \ldots, w_n$ sind linear unabhängig, und die Einschränkung $\beta : \langle v_1, \ldots, v_n \rangle \times \langle w_1, \ldots, w_n \rangle \to K$ ist nicht ausgeartet.

Aufgabe 4. Es sei V ein K-Vektorraum. Zeigen Sie, dass es eine bilineare Abbildung

$$\phi : \Lambda^d(V^*) \times \Lambda^d(V) \to K$$

gibt so dass $\phi(h_1 \wedge \ldots \wedge h_d, v_1 \wedge \ldots \wedge v_d) = \det(h_i(v_j)_{1 \leq i,j \leq d})$. Zeigen Sie, dass diese nicht-ausgeartet ist, wenn V endlich-dimensional ist.