E. Lau

Lineare Algebra 2, Übungsblatt 13

Abgabe 4.7.2019 bis 10:15 Uhr im Postfach des Tutors in V3-216

Die Abgabe ist in Zweiergruppen möglich.

Aufgabe 1. Bestimmen Sie die Elementarteiler der folgenden ganzzahligen Matrizen.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 8 \\ 3 & 1 & 2 \\ 9 & 5 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2. Zeigen Sie:

1. Für eine Matrix A über einem Hauptidealring haben A und A^t die gleichen Elementarteiler.
2. Für eine quadratische Matrix A über einem Körper K sind A und A^t ähnlich.

Aufgabe 3. Welche der folgenden Matrizen über $\mathbb{Q}$ sind ähnlich?

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie auch die charakteristischen Polynome und alle Eigenwerte dieser Matrizen.

Aufgabe 4. Es sei $f : V \to W$ ein Homomorphismus von K-Vektorräumen. Zeigen Sie

1. f ist genau dann injektiv (bzw. surjektiv), wenn es einen Homomorphismus $g : W \to V$ gibt so dass $g \circ f = \mathrm{id}_V$ (bzw. $f \circ g = \mathrm{id}_W$).
2. Wenn f injektiv bzw. surjektiv ist, dann ist auch $\Lambda^d f : \Lambda^d V \to \Lambda^d W$ injektiv bzw. surjektiv.