E. Lau

Lineare Algebra 2, Präsenzübungsblatt 9

Aufgabe 1. Zeigen Sie, dass für $A \in M_n(\mathbb{C})$ gilt:

1. A ist unitär $\Longleftrightarrow$ die Spalten von A bilden eine Orthonormalbasis von $\mathbb{C}^n$ $\Longleftrightarrow$ die Zeilen von A bilden eine Orthonormalbasis von $\mathbb{C}^n$.
2. Wenn A unitär und eine obere Dreiecksmatrix mit positiven reellen Diagonaleinträgen ist, dann gilt $A = E_n$.

Aufgabe 2. Prüfen Sie, dass die komplexe Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ i & 1 \end{pmatrix}$$

invertierbar ist und bestimmen Sie ihre Iwasawa-Zerlegung $A = QDU$, d.h. Q ist unitär, D ist diagonal mit positiven reellen Diagonaleinträgen, und U ist eine komplexe unipotente obere Dreiecksmatrix.

Aufgabe 3. Prüfen Sie, dass die reelle symmetrische Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

positiv definit ist und berechnen Sie die Choleski-Zerlegung $A = S^t S$, d.h. S ist eine reelle obere Dreiecksmatrix mit positiven Diagonaleinträgen.

Aufgabe 4. Zeigen Sie, dass jede invertierbare obere Dreiecksmatrix A eine eindeutige Darstellung $A = DU$ mit einer Diagonalmatrix D und einer unipotenten oberen Dreiecksmatrix U hat.