BEWEIS DES SIEGELSCHEN HAUPTSATZES ÜBER QUADRATISCHE FORMEN AUS DER THEORIE DER TAMAGAWAZAHLEN ORTHOGONALER GRUPPEN .

DIPLOMARBEIT

von

ULF REHMANN

Göttingen 1969

I n h a l t

§ 0 . Einleitung

Seit einiger Zeit ist bekannt, daß der Siegelsche Satz über das Maß der Darstellungen einer quadratischen Form über einem algebraischen Zahlkörper durch das Geschlecht einer anderen Form [S I, II, III] im wesentlichen äquivalent ist zu der Tatsache, daß die Tamagawazahl der fasteinfachen speziellen orthogonalen Gruppen den Wert 2 hat [W, chap. 3 - 4; K_1, p. 191, Fußnote 1; K_3]. Die Äquivalenz ist insofern nicht ganz vollständig, als nur die speziellen orthogonalen Gruppen von Formen in mehr als zwei Variabeln fasteinfach sind. Jedoch läßt sich Siegels Satz vollständig aus der Theorie der Tamagawazahlen beweisen, wenn man die Definition der Tamagawazahlen algebraischer Tori von Ono [O_1, O_2] mit zu Hilfe nimmt. (Die spezielle orthogonale Gruppe einer zweidimensionalen Form ist ein algebraischer Torus.) Dieser Beweis ist der Inhalt der vorliegenden Arbeit. (Ein ähnlicher Zusammenhang besteht zwischen der Tamagawazahl unitärer Gruppen und einem dem Siegelschen Satz entsprechenden Satz von H. Braun über hermitesche Formen. Für den Fall definiter Formen hat S. Böge den Beweis dazu geliefert [B].)

Siegels Satz sagt aus, daß das Darstellungsmaß einer quadratischen Form durch das Geschlecht einer anderen Form (wenn es in der Weise "kanonisch" normiert wird, daß es im Fall definiter Formen in einen einfachen gemittelten Ausdruck aus den Darstellungsanzahlen der Klassen des betrachteten Geschlechtes übergeht) gerade bis auf einen Faktor, der in einfacher Weise von den Dimensionen der Formen abhängt, gleich dem Produkt $\mathfrak{p}$-adischer Darstellungsmaße über alle Primstellen $\mathfrak{p}$ des zugrundeliegenden Zahlkörpers ist. Die $\mathfrak{p}$ - adischen Darstellungsmaße tragen eine natürliche Normierung insoweit, als sie als mittlere Lösungsanzahlen von Kongruenzgleichungen aufgefaßt werden können [cf. S I, Einleitung] . Eine Formulierung des Satzes findet sich am Schluß des vierten Paragraphen dieser Arbeit.

Im ersten Paragraphen wird die Definition der Tamagawazahl einer algebraischen Gruppe gegeben und, soweit für den Beweis erforderlich, die Onosche Theorie erläutert. Der zweite Paragraph enthält neben einigen Hilfssätzen die Berechnung der $\mathfrak{p}$ - adischen Darstellungsmaße (Hilfssatz 2.7). Im dritten Paragraphen wird der Zusammenhang der Darstellungsmaße quadratischer Formen (wie sie in [K_1] definiert sind) mit der Definition der Tamagawazahl der zugehörigen speziellen orthogonalen Gruppe dargestellt, und im vierten Paragraphen wird der Beweis des Satzes abgeschlossen -- dieser Abschnitt besteht zum größten Teil aus dem Äquivalenzbeweis der Maßdefinitionen Siegels und den sich aus der Theorie der Tamagawazahlen ergebenden.

Im Text verwenden wir die folgenden Symbole ohne nähere Erläuterung:

Z = ganzrationale Zahlen,

Q = rationale Zahlen,

R = reelle Zahlen,

C = komplexe Zahlen.

Für einen Ring A bedeutet:

A^* die Einheitengruppe von A ,

für natürliche Zahlen m, n:

$M_n^m(A)$ = Menge der Matrizen über A mit m Zeilen und n Spalten ,

$M_n^{m*}(A)$ = Menge der Elemente aus $M_n^m(A)$ mit maximalem Rang,

$S_m(A)$ = Menge der symmetrischen Matrizen mit m Zeilen und Spalten,

$GL_m(A) = (M_m^m(A))^*$,

$\det: M_m^m(A) \to A$ die Determinantenabbildung,

$SL_m(A) = \{ x \in GL_m(A) | \det x = 1 \}$.

Neben der üblichen Matrizenmultiplikation verwenden wir noch folgende Kompositionen von Matrizen: Sei $x \in M_n^m(A)$, $y \in M_{n'}^{m'}(A)$, so sei im Fall $m = m'$ die Matrix $(xy) \in M_{n+n'}^m(A)$ definiert durch Nebeneinanderschreiben zunächst der Spalten von x und dann der Spalten von y in der natürlichen Reihenfolge. Analog sei im Fall $n = n'$ die Matrix $\binom{x}{y} \in M_n^{m+m'}(A)$ definiert. Für $x \in M_n^m(A)$ bedeutet $x' \in M_m^n(A)$ die zu x transponierte Matrix.

Ist $\psi : M \to M'$ ein Morphismus algebraischer Mannigfaltigkeiten, so wird der ψ kontravariant zugeordnete Homomorphismus der Differentialformenalgebren $D(M)$, $D(M')$ mit $\psi^*: D(M') \to D(M)$ bezeichnet.

Für die Anleitung beim Abfassen dieser Arbeit möchte ich mich bei Herrn Professor M. Kneser herzlich bedanken.

§ 1 . Die Tamagawazahl spezieller orthogonaler Gruppen

Es sei k ein algebraischer Zahlkörper mit der Diskriminante d_k, der Primstellenmenge P, der Menge ∞ der unendlichen Primstellen; für $v \in P$ sei k_v die Komplettierung bei v, für $v \notin \infty$ sei $\mathfrak{o}_v$ der Ring der bei v ganzen Elemente, für $v \in \infty$ sei $\mathfrak{o}_v = k_v$. Der Adelring von k heiße A.

Die folgenden Definitionen findet man, teils etwas allgemeiner gefaßt, in [W, chap. 2 - 3].

Es sei V eine affine, algebraische Mannigfaltigkeit über k, so bezeichne für die k-Algebra B das Symbol V_B die B - rationalen Punkte von V. Fixieren wir eine Einbettung von V in einen affinen Raum über k, so sei $V_{\mathfrak{o}_v}$ für $v \in P - \infty$ die Menge der Punkte von V_{k_v} mit v-ganzen Koordinaten. In der k_v - Topologie ist V_{k_v} ein lokalkompakter Raum, und für $v \in P - \infty$ ist $V_{\mathfrak{o}_v}$ eine kompakte Teilmenge. Wir nehmen weiter an, daß V nichtsingulär ist und daß auf V eine überall holomorphe und nicht verschwindende algebraische Differentialform ω maximalen Grades existiert. Eine solche Form nennen wir eine Eichform. Wie in [W, chap. 2] definieren wir mit ω auf V_{k_v} ein positives Maß ω_v und bezeichnen ein System $\{\lambda_v\}_{v \in P}$ positiver reeller Zahlen als Menge konvergenzerzeugender Faktoren für V, wenn das Produkt $\prod_{v \in P-\infty} \lambda_v^{-1} \omega_v (V_{\mathfrak{o}_v})$ absolut konvergiert. Das Maß

$$\tau = |d_k|^{-\frac{1}{2}\dim V} \prod_{v \in P} \lambda_v^{-1} \omega_v$$

auf V_A heißt das durch ω mittels $\{\lambda_v\}$ definierte Tamagawamaß.

Ist $V = G$ eine affine algebraische Gruppe über k mit einer linksinvarianten Eichform ω und der Menge $\{\lambda_v\}$ konvergenzerzeugender Faktoren , so ist das zugehörige Tamagawamaß ein linksinvariantes Haarsches Maß auf G und unabhängig von der Wahl von ω [W, chap. 2.4].
G heißt unimodular, wenn ω zugleich rechtsinvariant ist. Unter der Diagonaleinbettung ist G_k eine diskrete Untergruppe von G_A , G_A/G_k ist also ein lokalkompakter linkshomogener G_A - Raum und besitzt mithin ein G_A -invariantes Haarsches Maß τ', welches unter der Voraussetzung, daß G unimodular ist, so normiert werden kann, daß

$$(*) \qquad \tau = \tau' \circ dG_k$$

gilt, wenn dG_k das kanonische diskrete Maß auf G_k ist.
Ist nun G unimudular, $\{\lambda_v\}_{v \in P}$ mit $\lambda_v = 1$ für alle $v \in P$ ein System konvergenzerzeugender Faktoren für G , ist τ' wie in (*) normiert und $\tau'(G_A/G_k)$ endlich, so heißt

$$\tau(G) := \tau'(G_A/G_k)$$

die Tamagawazahl von G [W, chap. 2.4] .

<u>Satz 1.1</u>: Es sei G die spezielle orthogonale Gruppe einer quadratischen Form über k in wenigstens drei Variabeln, so sind die Voraussetzungen für die Definition der Tamagawazahl von G erfüllt und es ist $\tau(G) = 2$. - Einen Beweis des Satzes liefert [W, chap. 3-4].
Im Falle von quadratischen Formen zweier Variabler haben wir ein ähnliches Ergebnis nur, wenn Anisotropie vorliegt. Eine solche Form ist über k äquivalent zu einer Form der Gestalt $f(x_1,x_2) = ax_1^2 + bx_2^2$, und wir wollen die für die

zugehörige Gruppe unwesentliche Einschränkung machen, daß a und b ganz sind. Wegen der Anisotropie ist $-\frac{a}{b}$ kein Quadrat in k. Die zu f gehörige Bilinearform wird durch die Matrix

$$s = \begin{pmatrix} 2a & 0 \\ 0 & 2b \end{pmatrix}$$

gegeben. Sei $d = \sqrt{-\frac{a}{b}}$, dann wird über $K := k(d)$ die Transformation $x_1 = \frac{1}{2}(y_1 + y_2)$, $x_2 = \frac{d}{2}(y_1 - y_2)$ durch die Matrix

$$t = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ d & -d \end{pmatrix}$$

gegeben. Es ist $t'st = s_1$ mit

$$s_1 = \begin{pmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{pmatrix},$$

das heißt, f geht unter dieser Transformation in $f_1(y_1,y_2) = ay_1y_2$ über. Ist x ein Element der speziellen orthogonalen Gruppe G von f, also $x'sx = s$, so erhält man $y's_1y = s_1$ mit $y = t^{-1}xt$. Man errechnet, daß y von der Gestalt

$$y = \begin{pmatrix} y_0 & 0 \\ 0 & y_0^{-1} \end{pmatrix} \quad (y_0 \in k(d)^*)$$

ist, also erhält man in $\xi : x \mapsto y_0$ einen K-rationalen Charakter von G. Offenbar ist ξ sogar eine K-rational invertierbare Isomorphie $G_K \xrightarrow{\sim} K^*$, ist also $\xi' : G_K \to K^*$ irgendein K - rationaler Charakter, so ist auch

$\xi' \circ \xi^{-1} : K^* \to K^*$ K-rationaler Gruppenhomomorphismus, also $\xi'(\xi^{-1}(y_0)) = y_0^{\mu}$ $(\mu \in Z)$. Mithin ist $\xi'(x) = \xi(x)^{\mu}$ für $x \in G_K$; es werde $\xi' = \xi_{\mu}$ gesetzt. Die Galoisgruppe von K/k besteht aus der Identität id_K und dem

Automorphismus σ von K , unter dem d auf -d geht. Sie operiert in natürlicher Weise auf G_K . Eine Rechnung zeigt: $\sigma \circ \xi \circ \sigma^{-1} = \xi_{-1}$. Aus dem Bisherigen folgt: G ist ein anisotroper k- Torus mit K als Zerfällungskörper, insbesondere wegen der Kommutativität unimodular. Es sei $S \subseteq P$ die Menge der unendlichen Primstellen von k vereinigt mit den Primteilern von det s = 4 ab und den in K/k verzweigten.

Für $v \in P$ setzen wir

$$\chi(v) = \begin{cases} 0 \text{ falls } & v \in S \\ \left(\frac{-\det s}{\mathfrak{p}_v}\right) & \text{sonst} \end{cases} \quad ;$$

hierbei ist $\mathfrak{p}_v$ das zu v gehörige Primideal. Für komplexes z sei $L_v(z, \chi) = (1 - \chi(v)\, N(\mathfrak{p}_v)^{-z})^{-1}$ die lokale L-Funktion bei $v \in P$ und $L(z, \chi)$ die durch χ definierte L-Funktion von k . Aus der Theorie der L - Reihen weiß man, daß

$$L(z, \chi) = \prod_{v \in P} L_v(z, \chi) \quad (\mathrm{Re}\ z > 1)$$

gilt und daß $L(1, \chi) \neq 0$ und endlich ist, da $\chi \not\equiv 1$.

<u>Satz 1.2</u>. Es sei G die spezielle orthogonale Gruppe einer anisotropen quadratischen Form f über k in zwei Variabeln. Dann ist $\{ L_v(1, \chi)^{-1} \}_{v \in P}$ ein System konvergenzerzeugender Faktoren für G bezüglich einer (und damit jeder) linksinvarianten Eichform ω auf G . Bezeichnet τ' das wie bei Satz 1.1 , jedoch mit den hier angegebenen konvergenzerzeugenden Faktoren definierte Maß auf G_A/G_k, so ist $\tau'(G_A/G_k) = 2\, L(1, \chi)$.

Die Zahl $\tau(G) := L(1,\chi)^{-1}\,\tau'(G_A/G_k) = 2$ nennen wir mit [O_1] die Tamagawazahl von G.

Für den Beweis ist es erforderlich, die Definition der Tamagawazahl algebraischer Tori nach Ono [O_1] zu erläutern.

Sei T ein algebraischer k-Torus mit Zerfällungskörper K/k. (Man weiβ, dass K/k galoissch und $\dim_k K$ endlich ist.) $\hat{T}_K$ bezeichne die K - rationalen Charaktere von T. Diese bilden vermöge

$$\mu \in Z\ ,\ \xi \in \hat{T}_K\ :\ \xi_\mu(x) := \xi(x)^\mu \quad \text{für}\quad x \in T_K$$

einen Z - Modul, von dem man weiβ, daβ er frei und endlich erzeugt ist. Die Galoisgruppe $\mathfrak{g} = \mathrm{Gal}\,(K/k)$ operiert auf $\hat{T}_K$ vermöge

$$\sigma \in \mathfrak{g}\ ,\ \xi \in \hat{T}_K\ :\ {}^\sigma\xi(x) := {}^\sigma(\xi({}^{\sigma^{-1}}x)) \quad \text{für}\quad x \in T_K\ .$$

Auf Q lassen wir $\mathfrak{g}$ trivial operieren und erhalten wegen ${}^\sigma(\xi_\mu) = ({}^\sigma\xi)_\mu$ somit eine Darstellung D von $\mathfrak{g}$ in $\hat{T}_K \otimes_Z Q$. Deren Charakter bezeichnen wir mit χ_T. Sei $\bar{S}$ die Menge der unendlichen vereinigt mit der Menge der in K/k verzweigten Primstellen von k. Ist w ein Teiler von $v \in P-\bar{S}$ in K, so sei $(\frac{K}{w}) \in \mathfrak{g}$ der zu w gehörige Frobeniusautomorphismus; diesem entspricht nach Basiswahl in $\hat{T}_K \otimes_Z Q$ vermöge D eine Transformationsmatrix $D((\frac{K}{w}))$ von $\hat{T}_K \otimes_Z Q$. Für komplexes z hängt

$$L_v(z,\chi_T) := \det\,(1 - N(\mathfrak{p}_v)^{-z}\, D\,((\tfrac{K}{w}))\,)^{-1}$$

weder von der Basiswahl noch von der Wahl des speziellen w mit $w|v$ ab, sondern nur von v und dem Charakter χ_T der Darstellung [A, § 2.]. Für $v \in \bar{S}$ setzt man $L_v(z,\chi_T) = 1$ und erhält in

$L(z, \chi_T) := \prod_{v \in P} L_v(z, \chi_T)$ für Re $z > 1$

eine in Re $z > 1$ holomorphe Funktion [H, § 3] . Weiter weiß man: $L(z, \chi_T)$ läßt sich meromorph auf die ganze komplexe Ebene fortsetzen, und ist r der Rang des Fixmoduls von $\hat{T}_K \otimes_Z Q$ unter der Operation von $\mathfrak{g}$ (nach unseren Bemerkungen ist $r = \mathrm{rg}\ \hat{T}_k$) , so existiert der Grenzwert

$$\rho_T := \lim_{z \to 1+} (z-1)^r L(z, \chi_T)$$

und ist nicht null [H, § 3] .

In [O_1, § 3.3] ist bewiesen: $\{L_v(z, \chi_T)^{-1}\}_{v \in P}$ ist ein System konvergenzerzeugender Faktoren zu T . ω sei eine linksinvariante Eichform auf T; in [O_1, § 3.5] wird das Tamagawamaß für Tori definiert durch

$$\tau_T := \rho_T^{-1} |d_k|^{-\frac{1}{2} \dim T} \prod_{v \in P} L_v(z, \chi_T)\, \omega_v \,.$$

Es ist klar, daß die Definition der $L_v(z, \chi_T)$ an endlich vielen Stellen beliebig abgeändert werden darf, da durch ρ_T dividiert wird.

Dazu benutzen wir den Hauptsatz über Tori [O_2, § 5], der – bei Benutzung der obigen Bezeichnungen – besagt, daß

$$\tau_T\,(T_A^1/T_K) = \frac{h(T)}{i(T)}$$

ist, wobei

$h(T) = [H^1(\mathfrak{g}, \hat{T}_K)]$, $i(T) = [\mathrm{Ker}(H^1(\mathfrak{g}, T_K) \to H^1(\mathfrak{g}, T_A)]$

bedeutet. In unserem Fall ist $K|k$ zyklisch, hierfür gilt mit [O_2, prop. 4.5.1] $i(T) = 1$. Für den Rest des Beweises ist also $h(T) = 2$ zu zeigen.

Ist α ein Kozykel von $\mathfrak{g}$ nach $\hat{G}_K$, so fordert die Kozykelbedingung wegen $\alpha_{id} = \alpha_\sigma\,{}^\sigma\alpha_\sigma = \alpha_\sigma(\alpha_\sigma)_{-1}$, daß $\alpha_{id} = 1$ ist, umgekehrt ist jedes α mit $\alpha_{id} = 1$, $\alpha_\sigma = \xi_\mu$ ($\mu \in Z$) ein Kozykel. Sind α, β äquivalente Kozykel, etwa $\alpha_\sigma = \xi_\mu$, $\beta_\sigma = \xi_{\mu'}$ ($\mu, \mu' \in Z$), so existiert $\varrho \in Z$ mit $\xi_\mu = \xi_{-\varrho}\,\xi_{\mu'}\,{}^\sigma\xi_\varrho = \xi_{-\varrho}\,\xi_{\mu'}\,\xi_{-\varrho}$ (σ ist hier immer der von der Identität verschiedene Automorphismus von $K|k$), dies ist aber äquivalent mit $\mu \equiv \mu'$ mod 2; damit ist alles gezeigt.

Die spezielle orthogonale Gruppe eines Raumes der Dimension kleiner oder gleich 1 besteht nur aus der Identität; die formale Anwendung der Definition des Tamagawamaßes führt zu dem Ergebnis, daß zu den konvergenzerzeugenden Faktoren $\{1\}$ die Tamagawazahl existiert und gleich 1 ist. Als invariante Eichform kann man dabei eine beliebige Konstante, aufgefaßt als "Nullform", wählen, deren zugehörige lokale Maße jeder (endlichen) Menge des Definitionsbereichs deren Kardinalzahl multipliziert mit dieser Konstanten zuordnen.

§ 2 . Hilfssätze

Hilfssatz 2.1 (Mittelwertsatz der Integralrechnung) : I sei ein lokalkompakter topologischer Raum, versehen mit einem positiven Maß μ . $f : I \to R$ sei eine stetige, μ-integrierbare Funktion. Ist $\{I_\alpha\}_{\alpha = 1,2,\ldots}$ ein System von kompakten Umgebungen von $x_0 \in I$ mit $I_\alpha \supseteq I_{\alpha+1}$ für $\alpha = 1,2,\ldots$ und $\bigcap_\alpha I_\alpha = \{x_0\}$, so ist

$$(2.1) \qquad \lim_{\alpha \to \infty} \Big[\int_{I_\alpha} d\mu \Big]^{-1} \int_{I_\alpha} f\, d\mu = f(x_0) \, .$$

Der Beweis ist klar. -

Es sei k ein algebraischer Zahlkörper, m , n seien natürliche Zahlen mit $n \leq m$.

Hilfssatz 2.2 : Es sei $s \in S_m(k)$ mit $\det s \neq 0$. Die durch

$$(2.2) \qquad \varphi_s(x) = x'sx \qquad (x \in M_n^{m*}(k))$$

erklärte Abbildung

$$\varphi_s : M_n^{m*}(k) \to S_n(k)$$

ist regulär, d.h. die (transponierte) Jacobimatrix φ_s^* von φ_s hat überall maximalen Rang, und ihre Komponentenfunktionen sind überall holomorph.

Beweis: Indem man gegebenenfalls eine trivialerweise reguläre Basistransformation vorschaltet, kann man erreichen, daß s in Diagonalgestalt vorliegt:

$$s = \begin{pmatrix} s_1 & & \\ & \ddots & \\ & & s_m \end{pmatrix}, \quad s_1, \ldots, s_m \in k^*.$$

Die Jacobimatrix von φ_s hat $\frac{n}{2}(n+1)$ Zeilen und mn Spalten. Zu zeigen ist, daß sie für jedes $x \in M_n^{m*}(k)$ maximalen Rang hat.

Sei ein solches $x = (x_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m\\ j=1,\dots,n}}$ vorgelegt, so besitzt es eine quadratische n-reihige Untermatrix mit nichtverschwindender Determinante. Durch Umordnen der Zeilen und Spalten läßt sich erreichen, daß

$$\det\left((x_{ij})_{i,j=1,\dots,e}\right) \neq 0$$

für alle $e = 1,\dots,n$. Dabei bleibt die Diagonalgestalt von s erhalten. Bezeichnet $\varphi_s^{\alpha\beta}$ die Komponente von φ_s mit Zeilennummer α und Spaltennummer β ($\alpha,\beta = 1,\dots,n$), so hat man

$$\frac{\partial\varphi_s^{\alpha\beta}(x)}{\partial x_{\varkappa,\lambda}} = \begin{cases} 0, & \text{falls } \alpha \neq \lambda \neq \beta\,, \\ s_\varkappa x_{\varkappa,\beta} & \text{falls } \alpha = \lambda \neq \beta\,, \\ s_\varkappa x_{\varkappa,\alpha} & \text{falls } \alpha \neq \lambda = \beta\,; \\ 2s_\varkappa x_{\varkappa,\lambda} & \text{falls } \alpha = \lambda = \beta\,. \end{cases}$$

Es sei für $\mu \leq n$:

$$A_\mu := \left(\frac{\partial\varphi_s^{\alpha\beta}(x)}{\partial x_{\varkappa,\lambda}} \right)_{\substack{1\leq\alpha\leq\beta\leq\mu\\ 1\leq\varkappa\leq\lambda\leq\mu}}\,.$$

Wir beweisen $\det A_\mu \neq 0$ durch Induktion nach μ, wobei x festgehalten wird. Für $\mu = 1$ ist dies trivial. Sei für $\mu > 1$ bereits $\det A_{\mu-1} \neq 0$ gezeigt. Man hat

$$A_\mu = \begin{pmatrix} A_{\mu-1} & * \\ 0 & X \end{pmatrix}\,,$$

denn A_μ erhält man aus $A_{\mu-1}$ durch Hinzufügen der Zeilen und Spalten mit den Nummern $(1,\mu),\dots,(\mu,\mu)$, und es ist

$$\frac{\partial\varphi_s^{\alpha\beta}(x)}{\partial x_{i,\mu}} = 0 \quad \text{für } \beta < \mu\,,$$

da dann $\alpha \neq \mu \neq \beta$ ist. Somit ist zur Berechnung von $\det A_\mu$

nur noch der Teil X von A_μ interessant:

$$\det X = \det \left(\frac{\partial \varphi_s^{\alpha\mu}(x)}{\partial x_{i\mu}}\right)_{\alpha, i=1,\ldots,\mu} =$$

$$= 2\det\left((s_i x_{i\alpha})_{i,\alpha = 1,\ldots,\mu}\right) =$$

$$= 2\prod_{j=1}^{\mu} s_j \det\left((x_{i\alpha})_{i,\alpha=1,\ldots,\mu}\right) \neq 0 .$$

Damit ist die Regularität von φ_s für alle $x \in M_n^{m*}(k)$ gezeigt. -

s, φ_s seien weiterhin wie in Hilfssatz 2.2 definiert. Es bezeichne

$$O(s) := \{ g \in GL_m(k) \mid g'sg = s \} \quad , \quad SO(s) := \{ g \in GL_m(k) \mid g'sg=s, \det g = 1\}$$

die durch s definierte orthogonale bzw. spezielle orthogonale Gruppe, und für $g \in GL_m(k)$ sei

$$L_g : M_n^{m*}(k) \to M_n^{m*}(k)$$

die Abbildung

(2.3) $\qquad x \mapsto gx \qquad (x \in M_n^{m*}(k))$.

Mittels dieser Abbildungen operiert $O(s)$, also auch $SO(s)$, auf $M_n^{m*}(k)$, und offenbar ist

(2.4) $\qquad \varphi_s \circ L_g = \varphi_s \qquad$ für $g \in O(s)$,

d.h. für $t \in S_n(k)$ wird $\varphi_s^{-1}(t)$ durch diese Operation zu einem homogenen $O(s)$ - (bzw. $SO(s)$-) Raum.

Es ist

$$dx := \bigwedge_{i=1}^{m} \bigwedge_{j=1}^{n} dx_{ij}$$

eine gegen die Operation von $O(s)$ bis auf einen Faktor ± 1 invariante Eichform auf $M_n^{m*}(k)$. (Wir wollen später mit dieser Form invariante Maße definieren, weswegen der

Faktor ± 1 für unsere Zwecke unerheblich ist.) Weiter ist

$$dt := \bigwedge_{i=1}^{n} \bigwedge_{j=1}^{i} dt_{ij}$$

eine Eichform auf $S_n(k)$.

<u>Hilfssatz 2.3</u>: Es gibt auf $M_n^{m*}(k)$ eine Differentialform ω mit

$$dx = \omega \wedge \varphi_s^*(dt),$$

und bezeichnet für $t \in S_n(k)$ mit $\det t \neq 0$ und $\varphi_s^{-1}(t) \neq \emptyset$

$$\iota_t : \varphi_s^{-1}(t) \to M_n^{m*}(k)$$

die Inklusion, so ist $\omega_t := \iota_t^*(\omega)$ eine gegen die Operation von $O(s)$ bis auf einen Faktor ± 1 invariante Eichform auf $\varphi_s^{-1}(t)$ und unabhängig von der speziellen Wahl von ω.

<u>Beweis</u>: Die Existenz von ω mit

$$dx = \omega \wedge \varphi_s^*(dt)$$

ist klar. Wegen der Definition von dx und wegen (2.4) ist für $g \in O(s)$

$$\omega \wedge \varphi_s^*(dt) = dx = (\det g)^n L_g^*(dx) = (\det g)^n L_g^*(\omega) \wedge L_g^* \circ \varphi_s^*(dt) =$$

$$= (\det g)^n L_g^*(\omega) \wedge \varphi_s^*(dt) ;$$

daraus folgt

$$(\omega - (\det g)^n L_g^*(\omega)) \wedge \varphi_s^*(dt) = 0 .$$

Nach Hilfssatz 2.2 ist φ_s regulär, also ist $\varphi_s^*(dt_{ij})$, $1 \leq j \leq i \leq n$, ein System linear unabhängiger überall holomorpher und nirgends verschwindender Differentialformen. Dies ergänzen wir durch $\{\sigma_k\}$ ($= \emptyset$ falls $m = n = 1$) zu einer Basis der 1- Formen über dem Körper der rationalen Funktionen auf $M_n^{m*}(k)$. Das durch $\varphi_s^*(dt_{ij})$, $1 \leq j \leq i \leq n$, in $D(M_n^{m*}(k))$ erzeugte Ideal $\langle \varphi_s(dt_{ij}) \rangle$ ist genau der Kern der Abbildung

$$\alpha \mapsto \alpha \wedge \varphi_s^*(dt) \quad (\alpha \in D(M_n^{m*}(k)))$$

von $D(M_n^{m*}(k))$ in sich. Wegen

$$\varphi_s \circ \iota_t (\varphi_s^{-1}(t)) = \{t\} \quad (t \in S_n(k))$$

ist $\iota_t^* \circ \varphi_s^*(dt_{ij}) = 0$ für $1 \leq j \leq i \leq n$, also $\langle \varphi_s^*(dt_{ij}) \rangle \subseteq \operatorname{Ker} \iota_t^*$. Im Fall $\det t \neq 0$, $\varphi_s^{-1}(t) \neq \emptyset$ ist andererseits aus Dimensionsgründen die Einschränkung von ι_t^* auf die durch $\{\sigma_k, 1\}$ erzeugte Unteralgebra $[\sigma_k]$ von $D(M_n^{m*}(k))$ injektiv, und wegen der Vektorraumzerlegung

$$(2.5) \quad D(M_n^{m*}(k)) = \langle \varphi_s^*(dt_{ij}) \rangle \oplus [\sigma_k]$$

ist also

$$\langle \varphi_s^*(dt_{ij}) \rangle = \operatorname{Ker} \iota_t^* .$$

Es folgt die Invarianz:

$$\omega_t = \iota_t^*(\omega) = \iota_t^*((\det g)^n L_g^*(\omega)) =$$

$$= (\det g)^n (L_g|_{\varphi_s^{-1}(t)})^* \iota_t^*(\omega) =$$

$$= (\det g)^n (L_g|_{\varphi_s^{-1}(t)})^* \omega_t .$$

Für den Beweis der Eichformeigenschaften sei

$$\omega = \alpha + \beta$$

eine Zerlegung gemäß (2.5), so ist $\beta = f(x) \bigwedge_k \sigma_k$ mit auf $M_n^{m*}(k)$ rationalem f $(\bigwedge_\emptyset \sigma_k = 1)$, und offenbar ist

$$dx = \omega \wedge \varphi_s^*(dt) = \beta \wedge \varphi_s^*(dt),$$

also ist β überall ungleich null und holomorph; mit der Regularität von ι_t^* und mit

$$\iota_t^*(\omega) = \iota_t^*(\beta)$$

folgt das Gleiche für ω_t. Schließlich ist klar, daß verschiedene ω mit $dx = \omega \wedge \varphi_s^*(dt)$ das gleiche ω_t liefern. Das war zu zeigen. -

Für $h \in GL_n(k)$ definieren wir die Abbildungen

$$\Phi_h : S_n(k) \to S_n(k), \quad R_h : M_n^{m*}(k) \to M_n^{m*}(k)$$

durch

(2.6) $\quad t \mapsto h' \, t \, h \qquad (t \in S_n(k))$,

(2.7) $\quad x \mapsto xh \qquad (x \in M_n^{m*}(k))$.

Der nächste Hilfssatz besagt, wie sich die in Hilfssatz 2.3 definierte Eichform ω bei Basistransformation verhält.

Für $h \in GL_n(k)$ wird mittels

$$x \longmapsto R_h(x) = x\,h$$

$$(\Phi_h \circ \varphi_s)^{-1}(t) \text{ in } \varphi_s^{-1}(t) \text{ übergeführt.}$$

Hilfssatz 2.4: Sei $h \in GL_n(k)$, $\bar{t} = \Phi_h(t)$ für $t \in S_n(k)$, seien $\omega, \bar{\omega}$ Differentialformen auf $M_n^{m*}(k)$ mit

$$dx = \omega \wedge \varphi_s^*(dt), \quad R_h^*(dx) = \bar{\omega} \wedge (\Phi_h \circ \varphi_s)^*(dt),$$

so ist

$$\iota_t^*(\omega) = (\det h)^{-(m-n-1)} \iota_t^*(\bar{\omega}),$$

hierbei hat ι_t die gleiche Bedeutung wie in Hilfssatz 2.3.

Beweis: Zunächst ist $\Phi_h^*(dt) = d\bar{t} = (\det h)^{n+1}\, dt$.

Um das zu zeigen, schreiben wir h in der Form

$$h = \begin{pmatrix} 1_{n-1} & 0 \\ 0 & \det h \end{pmatrix} \tilde{h} \quad \text{mit} \quad \tilde{h} \in SL_n(k) .$$

$SL_n(k)$ wird von unipotenten Elementen der Form $1_n + x\, e_{ij}$, $x \in k$, $i \neq j$ erzeugt, wobei e_{ij} die Matrix aus $M_n^n(k)$ ist, die im Schnitt der i-ten Zeile und der j-ten Spalte eine Eins und sonst Nullen als Koordinaten besitzt. Für solche Elemente ist die Formel sofort zu verifizieren. Es genügt also, Transformationen mit

$$h = \begin{pmatrix} 1_{n-1} & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} \quad , \; x \in k^*$$

zu betrachten. Hierzu zerlegen wir die symmetrische Matrix $t \in S_n(k)$ in der folgenden Weise:

$$t = \begin{pmatrix} t_1 & t_2 \\ t_2' & t_3 \end{pmatrix} ,$$

hierbei ist $t_1 \in S_{n-1}(k)$, t_2 ist ein Spaltenvektor mit n-1 Koordinaten und t_3 ist ein Element aus k. Für $\overline{t} = h' \, t \, h$ hat man also

$$\overline{t} = \begin{pmatrix} t_1 & xt_2 \\ xt_2' & x^2 t_3 \end{pmatrix} ,$$

folglich

$$d\overline{t} = \bigwedge_{i=1}^{n} \bigwedge_{j=1}^{i} d\overline{t}_{ij} = \Big(\bigwedge_{i=1}^{n-1} \bigwedge_{j=1}^{i} dt_{ij} \Big) \wedge d(xt_2) \wedge x^2 dt_3 =$$

$$= \bigwedge_{i=1}^{n-1} \bigwedge_{j=1}^{i} dt_{ij} \wedge \Big(x^{n-1} \bigwedge_{j=1}^{n} dt_{nj} \Big) \wedge x^2 \, dt_{nn} = x^{n+1} \, dt \; .$$

Weiter ist trivialerweise $R_h^*(dx) = (\det h)^m \, dx$.

Damit hat man

$$\omega \wedge \varphi_s^*(dt) = (\det h)^{-m+n+1} \; \overline{\omega} \wedge \varphi_s^*(dt) = dx \; ,$$

und mit der Eindeutigkeitsaussage in Hilfssatz 2.3 folgt die Behauptung.

Es sei jetzt v eine Primstelle von k . Wie in § 1 bezeichnen wir das einer Differentialform α über k entsprechende Maß über k_v mit α_v.

<u>Hilfssatz 2.5</u> ("Cavalieri-Prinzip") : f sei eine bezüglich dx_v auf $M_n^{m*}(k_v)$ integrierbare Funktion mit kompaktem Träger; dann ist für alle $t \in S_n(k_v)$ mit Ausnahme der in einer gewissen dt_v - Nullmenge liegenden die Einschränkung f_t von f auf $\overset{-1}{\varphi}_s(t)$ bezüglich $\iota_t^*(\omega_v)$ integrierbar, die Funktion

$$t \mapsto \int_{\overset{-1}{\varphi}_s(t)} f_t \, \iota_t^*(\omega_v)$$

ist auf $S_n(k_v)$ bezüglich dt_v integrierbar, und es gilt:

$$\int_{M_n^{m*}(k_v)} f dx_v = \int_{S_n(k_v)} \Big[\int_{\overset{-1}{\varphi}_s(t)} f_t \, \iota_t^*(\omega_v) \Big] \, dt_v .$$

<u>Beweis</u>: Sei $x_o \in M_n^{m*}(k_v)$, $t_o = \varphi_s(x_o)$. Wegen der Regularität von φ_s gibt es offene Umgebungen $U \subseteq M_n^{m*}(k_v)$ von x_o, $V \subseteq S_n(k_v)$ von t_o und $W \subseteq \overset{-1}{\varphi}_s(t_o)$ von x_o und einen Isomorphismus $\psi : U \to V \times W$ mit den Eigenschaften

$$\varphi_s(U) = V$$

und, wenn $p : V \times W \to V$ die erste Projektion bedeutet,

$$\varphi_s = p \circ \psi .$$

(Dies ist eine einfache Folgerung aus dem Satz über implizite Funktionen, cf. [Se, LG chap. 3 § 10].)

Wir bezeichnen noch die Abbildungen

$u \in W$: $in_u : V \to V \times W$ mit $in_u(t) := (t,u)$ für $t \in V$,

und $t \in V$: $in_t : W \to V \times W$ mit $in_t(u) := (t,u)$ für $u \in W$.

Dann ist $\psi^{-1} \circ in_t = \iota_t|_W$ und $\varphi_s \circ \psi^{-1} \circ in_u = p \circ in_u = id|_V$, und der Satz von Fubini ergibt für eine auf $M_n^{m*}(k_v)$ integrierbare Funktion f mit in U enthaltenem Träger die Integrierbarkeit der angegebenen Funktionen und

$$\int_{M_n^{m*}(k_v)} f\, dx_v = \int_U f\, dx_v = \int_{V\times W} (f \circ \psi^{-1})(\psi^{-1})^*(\omega_v' \wedge \varphi_s^*(dt_v)) =$$

$$= \int_V \Big[\int_W (f \circ \psi^{-1} \circ in_t)(\psi^{-1} \circ in_t)^* \omega_v \Big] \, in_u^* \circ (\varphi_s \circ \psi^{-1})^*(dt_v) =$$

$$= \int_{S_n(k_v)} \Big[\int_{\varphi_s^{-1}(t)} f_t \; \iota_t^{*}(\omega_v) \Big] dt_v \; .$$

Hat f einen beliebigen kompakten Träger, so erhält man die gleiche Formel, indem man diesen durch endlich viele U überdeckt, und der Hilfssatz ist bewiesen.

Der nächste Hilfssatz hat eine formale Ähnlichkeit mit dem Henselschen Lemma. In etwas allgemeinerer Form steht er in [K_2, I, § 8 Satz 2]. Unser Beweis ist implizit im Beweis von Hilfssatz 13 bei [S,I] enthalten. - Es sei also weiter im folgenden k ein algebraischer Zahlkörper, und wir verwenden wieder die Bezeichnungen von § 1 .

<u>Hilfssatz 2.6</u>: Es sei v eine nichtarchimedische Primstelle von k. Es sei $\bar{t} \in S_n(\mathfrak{o}_v)$ und $\det \bar{t} \neq 0$, $\mu := v(2 \det \bar{t})$ (v bezeichne gleichzeitig die zugehörige Exponentenbewertung). Gilt dann für $t \in S_n(\mathfrak{o}_v)$ mit $\det t \neq 0$ die Kongruenz

$$t \equiv \bar{t} \mod \mathfrak{p}_v^{\lambda} \quad \text{mit } \lambda > 2\mu ,$$

so existiert ein Element $\gamma \in GL_n(\mathfrak{o}_v)$ mit $\gamma \equiv 1_n \mod \mathfrak{p}_v^{\lambda-\mu}$, also $|\det \gamma|_v = 1$, und mit der Eigenschaft

$$\gamma' \, t \, \gamma = \bar{t} \; .$$

<u>Beweis</u>: Durch Konstruktion einer Folge $\{\gamma_i\}_{i=0,1,\dots} \subseteq GL_n(\mathfrak{o}_v)$ mit $\gamma_0 = 1_n$, $\gamma_i \equiv \gamma_{i-1} \mod \mathfrak{p}_v^{\lambda-\mu+i-1}$ für $i > 1$ und $\gamma_i' \, t \, \gamma_i \equiv \bar{t} \mod \mathfrak{p}_v^{\lambda+i}$. $\gamma_0 = 1_n$ erfüllt offenbar die Be-

dingungen für $i = 0$. – Seien bereits die ersten $\varkappa$ Elemente der Folge konstruiert, so werde

$$\gamma_{\varkappa+1} := \gamma_\varkappa + \pi^{\lambda-\mu+\varkappa} x, \quad x \in S_n(\mathfrak{o}_v)$$

gesetzt, hierbei ist π ein Primelement von $\mathfrak{p}_v$. Dann ist

$$\gamma'_{\varkappa+1} t \gamma_{\varkappa+1} = \gamma'_\varkappa t \gamma_\varkappa + \pi^{\lambda-\mu+\varkappa} (x' t \gamma_\varkappa + \gamma'_\varkappa tx) +$$

$$+ \pi^{2(\lambda-\mu+\varkappa)} x' tx \equiv \gamma'_\varkappa t \gamma_\varkappa + \pi^{\lambda-\mu+\varkappa}(x' t \gamma_\varkappa + \gamma'_\varkappa tx) \bmod \mathfrak{p}_v^{\lambda+\mu+\varkappa}$$

da $2(\lambda-\mu+\varkappa) \geq \lambda + \varkappa + 1$ für $\varkappa \geq 0$.

Es ist also $\gamma'_{\varkappa+1} t \gamma_{\varkappa+1} \equiv \bar{t} \bmod \mathfrak{p}_v^{\lambda+\varkappa+1}$, wenn sich x so wählen läßt, daß

$$x' t \gamma_\varkappa + \gamma'_\varkappa tx \equiv \pi^\mu [\pi^{-(\lambda+\varkappa)} (\bar{t} - \gamma'_\varkappa t \gamma_\varkappa)] \bmod \mathfrak{p}_v^{\mu+1}$$

ist. Die in der eckigen Klammer stehende Matrix wollen wir mit c bezeichnen. Sie liegt nach Voraussetzung in $S_n(\mathfrak{o}_v)$. Nach dem Elementarteilersatz gibt es eigentlich unimodulare u_1, u_2, und eine Diagonalmatrix d, alle aus $GL_n(\mathfrak{o}_v)$, mit $u_1 \gamma'_\varkappa t u_2 = d$. Sei $z := u_2^{-1} x u_1'$, so ist $u_1(x' t \gamma_\varkappa + \gamma'_\varkappa tx)u_1' = z' u_2' t \gamma_\varkappa u_1' + du_2^{-1} xu_1' =$ $= z'd + dz$. Also ist x bestimmt, wenn die Kongruenz

$z'd + dz \equiv \pi^\lambda (u_1 c u_1') \bmod \mathfrak{p}_v^{\mu+1}$ gelöst ist. Sei $u_1 c u_1' = (c_{rs})_{r,s=1,\dots,n}$, so ist das System der $\frac{n}{2}(n+1)$ Kongruenzen

$$2 d_r z_{rr} \equiv \pi^\mu c_{rr} \bmod \mathfrak{p}_v^{\mu+1} \quad (r = 1, \dots, n)$$

$$d_r z_{rs} + d_s z_{sr} \equiv \pi^\mu c_{rs} \bmod \mathfrak{p}_v^{\mu+1} \quad (1 \leq r < s \leq n)$$

zu lösen. Hierfür genügt es zu zeigen, daß $2 d_r$ Teiler von π^μ in $\mathfrak{o}_v$ ist. Es ist aber $d^{-1} u_1 \gamma'_\varkappa t \gamma_\varkappa = u_2^{-1} \gamma_\varkappa$, also ganz. Also ist $\det d = d_1 \dots d_r$ Teiler von $\det(\gamma'_\varkappa t \gamma_\varkappa)$

in $\mathfrak{o}_v$, etwa $\det(\gamma_\varkappa' t \gamma_\varkappa) = a \det d$. Sei $2(\det(\gamma_\varkappa' t \gamma_\varkappa) - \det \bar{t}) = a_1 \pi^{\lambda+\varkappa}$, $2 \det \bar{t} = a_2 \pi^\mu$, wo a_2 Einheit in $\mathfrak{o}_v$ ist, so ist

$$2 a \det d = \pi^\mu (a_2 + a_1 \pi^{\lambda+\varkappa-\mu}) ,$$

also ist $2 d_r$ Teiler von π^μ. - Damit ist alles bewiesen.

Es seien V, W nicht entartete quadratische k - Vektorräume mit freien Gittern M, N und $\dim V = m \geq \dim W = n$.

$\{a_1, \ldots, a_m\}$ bzw. $\{b_1, \ldots, b_n\}$ seien Basen von M bzw. N, bezüglich derer die jeweilige quadratische Form durch die Matrizen $s \in S_m(\mathfrak{o})$, $t \in S_n(\mathfrak{o})$ mit $\det s \det t \neq 0$ gegeben sei. v sei eine nichtarchimedische Primstelle, $N_k(v)$ sei die Anzahl der Elemente des Restklassenkörpers bei v, die übrigen Bezeichnungen seien wie in § 1 gewählt. Weiter sei $V_v := V \otimes_k k_v$, $M_v := M \otimes_{\mathfrak{o}} \mathfrak{o}_v$, analog W_v, N_v. Die oben definierten Basen sind dann auch Basen von M_v, N_v, und man kann s, t als Elemente aus $S_m(\mathfrak{o}_v)$, $S_n(\mathfrak{o}_v)$ auffassen. Die linearen Injektionen $W_v \to V_v$ entsprechen eindeutig den Elementen von $M_n^{m*}(K_v)$. Wie bei Hilfssatz 2.2 liefert s eine Abbildung $\varphi_s : M_n^{m*}(k_v) \to S_n(k_v)$. Die sonstigen Bezeichnungen von Hilfssatz 2.3 seien ebenfalls übernommen. $O(N_v, M_v)$ sei die Menge der Darstellungen von N_v durch M_v, d.h. die Menge der isometrischen $\mathfrak{o}_v$-linearen Injektionen von N_v in M_v.

<u>Hilfssatz 2.7</u> : ω, ι_t seien wie in Hilfssatz 2.3 erklärt. Dann gilt für genügend großes λ

$$\int_{O(N_v,M_v)} \iota_t^*(\omega_v) = N_k(v)^{-\lambda(mn-\frac{n}{2}(n+1))} A_\lambda(N_v, M_v);$$

hierbei bedeutet $A_\lambda(N_v, M_v)$ die Anzahl der modulo $\mathfrak{p}_v^\lambda$

inkongruenten $\mathfrak{o}_v$-linearen Injektionen von N_v in M_v, die die quadratische Form modulo $\mathfrak{p}_v^\lambda$ invariant lassen.

<u>Beweis</u>: (Ein ähnlicher Beweis für den Fall unitärer Darstellungen findet sich in [B, § 8].) Die linearen Injektionen $W_v \to V_v$, die N_v in M_v abbilden und dort die quadratische Form modulo $\mathfrak{p}_v^\lambda$ invariant lassen, entsprechen eineindeutig den Elementen $x \in M_n^{m*}(\mathfrak{o}_v)$ mit $x'sx \equiv t \bmod \mathfrak{p}_v^\lambda$. Deren charakteristische Funktion auf $M_n^{m*}(k_v)$ sei ϕ_λ. Wir zeigen zunächst: Ist $\lambda > 2v(2 \det t) = 2\mu$, so gilt für $u \in S_n(k_v)$:

$$(2.8)\quad J_u^\lambda := \int_{\varphi_s^{-1}(u)} (\phi_\lambda)_u \, \iota_u^*(\omega_v) = \begin{cases} \int_{O(N_v,M_v)} \iota_t^*(\omega_v) & u \equiv t \bmod \mathfrak{p}_v^\lambda \\ & \text{falls} \\ 0 & \text{sonst}. \end{cases}$$

Für jedes λ ist nämlich $J_u^\lambda = \int_{\mathfrak{M}_u^\lambda} \iota_u^*(\omega_v)$, wobei

$\mathfrak{M}_u^\lambda = \{ x \in M_n^{m*}(\mathfrak{o}_v) \mid u = x'sx \equiv t \bmod \mathfrak{p}_v^\lambda \}$ ist, woraus für $u \not\equiv t \bmod \mathfrak{p}_v^\lambda$ folgt: $\mathfrak{M}_u^\lambda = \emptyset$, also $J_u^\lambda = 0$. Ist dagegen $u \equiv t \bmod \mathfrak{p}_v^\lambda$ und $\lambda > 2\mu$, so existiert nach Hilfssatz 2.6 ein $\gamma \in GL_n(\mathfrak{o}_v)$ mit $|\det \gamma|_v = 1$ und $\gamma' t \gamma = u$. Gemäß Hilfssatz 2.4 wählen wir $\bar{\omega}$ und bekommen wegen $|\det \gamma|_v = 1$:

$$J_u^\lambda = \int_{\substack{x'sx = u \\ x \text{ ganz}}} \iota_u^*(\omega_v) = \int_{\substack{y'sy=t \\ y \text{ ganz}}} \iota_t^*(\bar{\omega}_v) = \int_{O(N_v,M_v)} \iota_t^*(\omega_v).$$

Weiter ist

$$(2.9)\quad \int_{M_n^{m*}(k_v)} \phi_\lambda \, dx_v = \int_{\substack{x'sx \equiv t \bmod \mathfrak{p}_v^\lambda \\ x \text{ ganz}}} dx_v = N_k(v)^{-\lambda mn} A_\lambda(N_v,M_v),$$

und andererseits aber nach Hilfssatz 2.5 und nach Formel (2.8):

$$(2.10) \qquad \int_{M_n^{m*}(k_v)} \phi_\lambda \, dx_v = \int_{S_n(k_v)} \Big[\int_{\varphi_s^{-1}(u)} (\phi_\lambda)_u \, \iota_u^*(\omega_v) \Big] \, du_v =$$

$$= \int_{O(N_v, M_v)} \iota_t^*(\omega_v) \cdot \int_{\substack{u \equiv t \bmod \mathfrak{p}_v^\lambda \\ u \text{ ganz}}} du_v =$$

$$= \int_{O(N_v, M_v)} \iota_t^*(\omega_v) \cdot N_k(v)^{-\lambda \frac{n}{2}(n+1)} \; .$$

Aus (2.9) und (2.10) folgt die Behauptung.

§ 3 . Darstellungsmaße

Es sei V ein m-dimensionaler nicht entarteter quadratischer Vektorraum über dem algebraischen Zahlkörper k, $M \subseteq V$ sei ein ganzes $\mathfrak{o}$-Gitter in V, die weiteren Bezeichnungenseien wie in § 1 und wie in den Voraussetzungen zu Hilfssatz 2.4 definiert. Zusätzlich seien für nichtarchimedisches $v \in P$ die Räume $V_v = M_v = V \otimes_k k_v$ definiert. Nach Wahl einer Basis läßt sich dann V mit k^m identifizieren, analog in den Komplettierungen. Für $v \notin \infty$ ist dann M_v Gitter in V_v, und für fast alle v ist sogar $M_v = \mathfrak{o}_v^m$. Man hat $M = \bigcap_{v \in P} (M_v \cap V)$. Ist umgekehrt $\{M_v\}_{v \in P}$ ein System von Gittern mit $M_v \subseteq V_v$ und $M_v = \mathfrak{o}_v^m$ für fast alle $v \in P$, so gibt es ein eindeutig bestimmtes Gitter $M = \bigcap_{v \in P} (M_v \cap V) \subseteq V$ mit $M_v = M \otimes_{\mathfrak{o}} \mathfrak{o}_v$.

Für die Räume V, V_v bezeichne nun $O(V)$, $SO(V)$ etc. die orthogonale bzw. die spezielle orthogonale Gruppe;
$O(M)$, $SO(M)$ etc. seien die entsprechenden Einheitengruppen der Gitter. A sei wieder der Adelring von K. Die Adelisierungen der Gruppen sind dann die induktiven Limites

$$O_A(V) = \varinjlim_S \prod_{v \in S} O(V_v) \prod_{v \notin S} O(M_v) ,$$

$$SO_A(V) = \varinjlim_S \prod_{v \in S} SO(V_v) \prod_{v \notin S} SO(M_v) ,$$

wo S alle endlichen die Menge der archimedischen Primstellen enthaltenden Teilmengen von P durchläuft.
Ist dann $x \in O_A(V)$, so ist $x_v M_v = \mathfrak{o}_v^m$ für fast alle $v \in P$, und nach dem Obigen ist $xM := \bigcap_{v \in P} (x_v M_v \cap V)$ Gitter in V.

Also operieren $O_A(V)$, $SO_A(V)$ auf der Menge der Gitter in V . Die Fixgruppen von M mögen $O_A(M)$, $SO_A(M)$ heißen. Offenbar ist

$$O_A(M) = O_\infty(V) \prod_{v \notin \infty} O(M_v) \quad \text{mit} \quad O_\infty(V) = \prod_{v \in \infty} O(V_v) ,$$

analog für $SO_A(M)$.

Im folgenden sollen Darstellungen eines regulären quadratischen $\mathfrak{o}$- Moduls N vom Rang n durch Moduln M' aus dem Geschlecht eines festen regulären quadratischen $\mathfrak{o}$-Moduls M vom Rang m betrachtet werden; es sei $0 \leq n \leq m$. (Unter einer Darstellung verstehen wir wie in § 2 eine $\mathfrak{o}$-lineare isometrische Injektion $N \to M'$.) Setzt man voraus, daß eine solche Darstellung existiert, so kann man offenbar ohne Einschränkung annehmen, daß $N \subseteq M$ und $W := N \otimes_{\mathfrak{o}} k \subseteq V := M \otimes_{\mathfrak{o}} k$ gilt. Es bezeichne dann $i: N \to M$ die Inklusion, und schließlich sei noch U das Orthokomplement von W in V: $V = W \perp U$.

<u>Definition</u> (cf. [K_2,II]): Sei M' Gitter in V und $N \subseteq M'$. Eine Darstellung $\varphi: N \to M'$ heißt <u>speziell</u>, wenn φ die Inklusion von N in M' ist. Seien $\varphi: N \to M'$, $\psi: N \to M''$ Darstellungen von N durch M', $M'' \subseteq V$. φ liegt in der eigentlichen bzw. uneigentlichen <u>Klasse</u> von ψ , wenn $u \in SO(V)$ bzw. $u \in O(V)$ existiert mit $u(M'') = M'$ und $\varphi = u\psi$. φ liegt im eigentlichen bzw. uneigentlichen <u>Geschlecht</u> von ψ , wenn -- bei Bezeichnung der für $v \in P$ durch φ etc. induzierten Abbildungen $N_v \to M'_v$ etc. mit φ_v -- zu jedem $v \in P$ ein $u_v \in SO(V_v)$ bzw. $u_v \in O(V_v)$ existiert mit $u_v(M''_v) = M'_v$ und $\varphi_v = u_v \psi_v$.

Hilfssatz 3.1 : In jeder eigentlichen Klasse aus dem eigentlichen Geschlecht von i gibt es eine spezielle Darstellung.

Beweis: Mit den Sätzen von Minkowski-Hasse und von Witt, cf. [K_2, II, Hilfssatz 5].

Hilfssatz 3.2 : Die eigentlichen Klassen spezieller Darstellungen aus dem eigentlichen Geschlecht von i entsprechen eineindeutig den Doppelnebenklassen

$SO_A(M,U)\ u\ SO(U) \in SO_A(M,U) \setminus SO_A(U) / SO(U)$;

hierbei bezeichnet $SO_A(M,U)$ die offene Untergruppe von $SO_A(U)$, die M in sich überführt.

Beweis: Sei $\varphi : N \to M'$ eine spezielle Darstellung aus dem eigentlichen Geschlecht von i, d.h. $N \subseteq M'$, φ ist die Inklusion, und für $v \in P$ gibt es $u_v \in SO(V_v)$ mit $u_v(M'_v) = M_v$, $u_v\, \varphi_v = i_v$. Wegen $u_v | N_v = id_{N_v}$ ist $u_v \in SO(U_v) \subseteq SO(V_v)$; da M, M' im gleichen Raum liegen, ist $M_v = M'_v$ für fast alle $v \in P$, also ist $u = (u_v) \in SO_A(U)$. Es bleiben die Gleichungen $u_v(M'_v) = M_v$, $u_v\, \varphi_v = i_v$ bei Abänderung von u durch einen Linksfaktor genau dann bestehen, wenn der Faktor in $SO_A(M,U)$ liegt. Die spezielle Darstellung $\psi : N \to M''$ gehört genau dann zur eigentlichen Klasse von φ, wenn es $\tilde{u} \in SO(V)$ gibt mit $\varphi = \tilde{u}\psi$, $\tilde{u}(M'') = M'$; es folgt wieder $\tilde{u} \in SO(U)$, und umgekehrt liefert ein solches $\tilde{u}$ wieder eine spezielle Darstellung aus der eigentlichen Klasse von φ, liegt φ also im Geschlecht von i ; so gibt es u_v wie oben mit $u_v \varphi_v = u_v \tilde{u} \psi_v = i_v$ für alle $v \in P$, $u = (u_v)$ ändert sich also um einen Rechtsfaktor aus $SO(U)$. Damit ist der Beweis erbracht. -

Im Fall $N = \{0\}$ geht unsere Einteilung in Klassen und Geschlechter in die Klassen- und Geschlechtseinteilung von Gittern über, insbesondere fallen uneigentliches und eigentliches Geschlecht zusammen, da jedes lokale Gitter als Gitter über einem Hauptidealring uneigentliche Transformationen besitzt. Weiter ist jede Darstellung speziell, und es ist $U = V$, so daß wir als Folgerung erhalten:

Hilfssatz 3.3: Die eigentlichen Klassen von Gittern aus dem Geschlecht von M entsprechen eineindeutig den Doppelnebenklassen

$$SO_A(M)\ u\ SO(V) \in SO_A(M) \setminus SO_A(V) / SO(V) .$$

Da das eigentliche Geschlecht einer Darstellung nur endlich viele Klassen enthält, hat man eine disjunkte offene Zerlegung

$$SO_A(U) = \bigcup_{j=1}^{k} SO_A(M,U)u_j\ SO(U),$$

wobei $u_1, \ldots, u_k \in SO_A(U)$ ein Vertretersystem der Klassen seien.

Sei im folgenden U keine hyperbolische Ebene. Dann ist nach § 1 das Tamagawamaß $\tau'(SO_A(U)/SO(U))$ endlich, und die Additivität des Haarschen Maßes liefert entsprechend der obigen Zerlegung

$$\tau'(SO_A(U)/SO(U)) = \sum_{j=1}^{k} \tau'(SO_A(M,U)\ u_j\ SO(U)/SO(U)) .$$

Die einzelnen Summanden lassen sich wie in $[K_1]$ umformen; offenbar ist für $u \in SO_A(U)$:

$$(3.1) \qquad u^{-1}\ SO_A(M,U)\ u = SO_A(u^{-1}M,U).$$

Weiter ist $SO(U)$ eine diskrete, also abgeschlossene und $SO_A(u^{-1}M,U)$ eine offene Untergruppe von $SO_A(U)$, die

Isomorphie homogener Räume

$$SO_A(u^{-1}M,U)SO(U)/SO(U) \simeq SO_A(u^{-1}M,U)/SO_A(u^{-1}M,U) \cap SO(U) =$$
$$= SO_A(u^{-1}M,U)/SO(u^{-1}M,U)$$

ist also sogar eine Homöomorphie, und das Maß τ' läßt sich kanonisch übertragen [H-R, Th. 5.33]. Indem wir die Linksinvarianz von τ' ausnutzen, haben wir somit:

$$\tau'(SO_A(M,U)\ u\ SO(U)/SO(U)) = \tau'\ (SO_A(u^{-1}M,U)/SO(u^{-1}(M,U)))\ .$$

Es sei nun τ dargestellt als Produkt der Maße τ_∞ auf $SO_\infty(U)$ und τ_0 auf $SO_0(U) := \{ u \in SO_A(U) \mid u_v = 1 \text{ für } v \in \infty \}$.

τ_∞ ist nach der Definition des Tamagawamaßes ein gewöhnliches Lebesgue-Maß, und mit [E, Satz 27.2] gibt es in $SO_\infty(U)$ einen τ_∞ - meßbaren Fundamentalbereich F der Klassen modulo $SO(u^{-1}M, U)$. Demnach ist auch

$$F \times (SO_0(U) \cap SO_A(u^{-1}M,\ U))$$

τ - meßbarer Fundamentalbereich für

$$SO_A(u^{-1}M,U) = SO_0(U) \times (SO_0(U) \cap SO_A(u^{-1}M,U))$$

modulo $SO(u^{-1}M,U)$. Berücksichtigt man die Gleichung (3.1) und beachtet, daß die spezielle orthogonale Gruppe unimodular ist, so erhält man für das betrachtete Maß

$$\tau'(SO_A\ (u^{-1}M,U)/SO(u^{-1}\ M,U)) =$$
$$= \tau_\infty(SO_\infty(U)/SO(u^{-1}M,U))\ \tau_0\ (SO_0(U) \cap SO_A(u^{-1}M,U)) =$$
$$= \tau_\infty(SO_\infty(U)/\ SO(u^{-1}M,U))\ \tau_0(SO_0(U) \cap SO_A(M,U))\ .$$

Ähnlich wie in $[K_1]$ bezeichnen wir hier den ersten Faktor als ein Darstellungsmaß der durch u definierten eigentlichen Klasse aus dem eigentlichen Geschlecht von i.

§ 4 . Beweis des Siegelschen Satzes

Wie im letzten Paragraphen betrachten wir Darstellungen eines regulären quadratischen $\mathfrak{o}$-Moduls N vom Rang n durch Moduln M' aus dem Geschlecht eines festen regulären quadratischen $\mathfrak{o}$-Moduls vom Rang m . Wir fordern wieder, daß eine Darstellung existiert, und können also wieder $N \subseteq M$ annehmen. Auch die übrigen Bezeichnungen übernehmen wir aus § 3 : U, W seien Unterräume von $V = M \otimes_{\mathfrak{o}} k$ mit $W = N \otimes_{\mathfrak{o}} k$ und $V = W \perp U$.

Die Definition

$$\varphi(x) := x|_W \quad \text{für} \quad x \in O(V)$$

liefert eine nach dem Satz von Witt surjektive Abbildung

$$\varphi : O(V) \to O(W,V)$$

von $O(V)$ in die Menge der Isometrien von W in V, die in natürlicher Weise (cf. 2.3) zu einem homogenen $O(V)$-Raum wird. φ ist bezüglich dieser Struktur ein Homomorphismus, und da die Fixgruppe jedes Punktes in $O(W,V)$ gerade $O(U)$ ist, induziert φ eine Isomorphie homogener Räume

$$O(V)/O(U) \simeq O(W,V).$$

Für den Fall $n < m$ lassen sich entsprechende Bemerkungen für die speziellen orthogonalen Gruppen machen, wir bekommen

$$SO(V)/SO(U) \simeq O(W,V).$$

Wir lassen wieder $n \leq m$ zu und definieren für $g \in O(V)$

$$\iota_g : O(U) \to O(V) \text{ durch } \iota_g(x) := gx \ (x \in O(U)).$$

ι_1 ist also die Inklusion $O(U) \to O(V)$. In Hilfssatz 2.3 haben wir gezeigt, daß $O(W,V)$ eine gegen die Operation

von $O(V)$ bis auf Einheiten invariante Eichform σ besitzt.
Wir fixieren noch eine linksinvariante Eichform ω^1 auf $O(V)$ und bezeichnen mit

$$g \mapsto L_g \quad (g \in O(V)) \quad \text{und} \quad g' \mapsto l_{g'} \quad (g' \in O(U))$$

die linksregulären Darstellungen von $O(V)$, $O(U)$.

Hilfssatz 4.1: Ist $\tilde{\omega}^2$ eine Differentialform auf $O(V)$ mit

$$\omega^1 = \tilde{\omega}^2 \wedge \varphi^*(\sigma) ,$$

so ist $\omega^2 = \iota_1^*(\tilde{\omega}^2)$ eine linksinvariante Eichform auf $O(U)$ und von der Wahl von $\tilde{\omega}^2$ unabhängig, und für alle $g \in O(V)$ gilt

$$\iota_g^*(\tilde{\omega}^2) = \iota_1^* \circ L_g^*(\tilde{\omega}^2) = \omega^2.$$

<u>Beweis</u>: Für $g \in O(U)$ gilt:

$$L_{\iota_1(g)} \circ \iota_1 = \iota_1 \circ l_g,$$

weiter

$$\tilde{\omega}^2 \wedge \varphi^*(\sigma) = \omega^1 = L^*_{\iota_1(g)}(\omega^1) = L^*_{\iota_1(g)}(\tilde{\omega}^2) \wedge \varphi^*(\sigma) ,$$

daraus folgt

$$(\tilde{\omega}^2 - L^*_{\iota_1(g)}(\tilde{\omega}^2)) \wedge \varphi^*(\sigma) = 0 .$$

φ ist regulär, also ist $\varphi^*(\sigma)$ überall auf $O(V)$ holomorph und verschwindet nirgends. Weiter ist

$$\operatorname{Ker} \iota_1^* = \operatorname{Ker}(\alpha \mapsto \alpha \wedge \varphi^*(\sigma)) \qquad (\alpha \in D(O(V))) ,$$

es ist also zunächst für $g \in O(U)$

$$\omega^2 = \iota_1^*(\tilde{\omega}^2) = \iota_1^* \circ L^*_{\iota_1(g)}(\tilde{\omega}^2) = l_g^* \circ \iota_1^*(\tilde{\omega}^2) = l_g^*(\omega^2),$$

ω^2 ist also linksinvariant. Ist nun $\tilde{\omega}^2 = \alpha + \beta$ eine Zerlegung gemäß der direkten Vektorraumsumme $D(O(V)) = \operatorname{Ker} \iota_1^* \oplus Y$, so ist

$$\omega^1 = \tilde{\omega}^2 \wedge \varphi^*(\sigma) = \beta \wedge \varphi^*(\sigma) ,$$

also β überall holomorph und ungleich null, und da $\iota_1^* | Y$

regulär und injektiv ist, folgt das Gleiche für $\omega^2 = \iota_1^*(\beta)$. Die Eindeutigkeit von ω^2 folgt aus der Injektivität der Abbildung $\alpha \longmapsto \alpha \wedge \varphi^*(\sigma)$ auf Y, und den zweiten Teil der Behauptung bekommt man durch Anwendung von L_g^* $(g \in O(V))$ auf die Gleichung $\omega^1 = \tilde{\omega}^2 \wedge \varphi^*(\sigma)$ und aus der Eindeutigkeitsaussage. Das war zu zeigen.-

ω^2 habe weiterhin die Bedeutung wie in Hilfssatz 4.1. Durch Einschränkung von ω^1 und ω^2 erhalten wir invariante Eichformen auf $SO(V)$ und $SO(U)$ - wir bezeichnen sie mit den gleichen Symbolen - , die uns Tamagawamaße liefern. Die zugehörigen lokalen Haarschen Maße seien mit ω_v^1, ω_v^2 bezeichnet, die konvergenzerzeugenden Faktoren mit λ_v^1, λ_v^2 $(v \in P)$. Die den im letzten Paragraphen definierten Maßen τ_0, τ_∞ entsprechenden seien beziehungsweise ω_0^1, ω_∞^1, ω_0^2, ω_∞^2.

Wir setzen von nun an zusätzlich voraus, daß weder V noch U eine hyperbolische Ebene ist. Dann existieren nach § 1 die Tamagawazahlen von $SO(V)$, $SO(U)$, die wir mit $\tau(V)$, $\tau(U)$ bezeichnen. Die Zusammenfassung der Rechnungen im letzten Paragraphen liefert dann

$$(4.1)\quad \tau(U) = \omega_0^2(SO_0(U) \cap SO_\Lambda(M,U)) \sum_{j=1}^{k} \omega_\infty^2(SO_\infty(U)/SO(u_j^{-1}M,U)),$$

und nach dem Hilfssatz 3.3 ganz analog

$$(4.2)\quad \tau(V) = \omega_0^1(SO_0(V) \cap SO_\Lambda(M)) \sum_{j=1}^{l} \omega_\infty^1(SO_\infty(V)/SO(M_j)),$$

wobei $M_1, \ldots, M_l$ ein Repräsentantensystem der eigentlichen Klassen aus dem Geschlecht von M ist.

In $\omega_0^2(SO_0(U) \cap SO_\Lambda(M,U))$ ist M der Bildbereich der Darstellung $i: N \to M$; dieser Ausdruck hängt also von i ab, und wir wollen ihn mit τ_i bezeichnen. Für $\omega_o^1(SO_o(V)\cap SO_A(M))$ schreiben wir kurz τ_o. Dann ist

$$\frac{\tau_o}{\tau_i} = \prod_{v\notin\infty} \frac{\lambda_v^2 \;\omega_v^1(SO(M_v))}{\lambda_v^1 \;\omega_v^2(SO(M_v,U_v))} .$$

Sei zunächst $n < m$. Wir wollen $\omega_v^1(SO(M_v))$ berechnen. Hierzu sei ξ_v die charakteristische Funktion der kompakten Untergruppe $SO(M_v)$ von $SO(V_v)$, und für $y\in SO(V_v)$ bezeichne wieder $L_y\colon x\mapsto yx$ $(x\in SO(V_v))$ die Linkstranslation mit y. Nach einem bekannten Satz über die Integration auf lokalkompakten Gruppen (dessen Beweis sich im wesentlichen mit dem des Hilfssatzes 2.5 deckt) erhält man

$$\omega_v^1(SO(M_v)) = \int_{SO(V_v)} \xi_v\,\omega_v^1 = \int_{O(W_v,V_v)} \Big[\int_{SO(U_v)} (\xi_v\circ L_y|_{SO(U_v)})\,\omega_v^2\Big]\sigma_v,$$

wo y ein Vertretersystem von $SO(V_v)$ modulo $SO(U_v)$ durchläuft. Es ist für $x\in SO(U_v)$

$$\xi_v\circ L_y(x) = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases} \text{falls } yx \begin{matrix}\in \\ \notin\end{matrix} SO(M_v).$$

Sei y fest. Wenn ein $x_o\in SO(U_v)$ existiert mit $yx_o\in SO(M_v)$, so ist für jedes $x\in SO(U_v)$ mit $yx\in SO(M_v)$:

$$x_o^{-1}\,y^{-1}\,yx = x_o^{-1}\,x \in SO(M_v,U_v),$$

also:

$$x = x_o z \quad \text{mit} \quad z\in SO(M_v,U_v) ,$$

und umgekehrt ist für jedes solche x auch $yx\in SO(M_v)$, so daß das innere Integral gerade das Maß von $x_oSO(M_v,U_v)$ oder wegen der Linksinvarianz das von $SO(M_v,U_v)$ liefert. Durchläuft y das Vertretersystem von $SO(V_v)$ modulo $SO(U_v)$, so bedeutet die Existenz von $x_o\in SO(U_v)$ mit $yx_o\in SO(M_v)$, daß

$$\overline{y} := \varphi(y)|_{N_v} : N_v \longrightarrow yx_o(M_v) = M_v ,$$

daß also $\bar{y} = yx_o \circ i_v$ gilt, d.h. y einer Darstellung von N_v durch M_v aus der (lokalen) eigentlichen Klasse von i_v entspricht. Bezeichnen wir deren charakteristische Funktion auf $O(W_v,V_v)$ mit ξ_{i_v}, so ergibt sich insgesamt für $\dim U \geq 1$:

$$\omega_v^1 (SO(M_v)) = \omega_v^2 (SO(M_v,U_v)) \int\limits_{O(W_v,V_v)} \xi_{i_v} \sigma_v ,$$

und damit erhält man

$$\frac{\tau_o}{\tau_i} = \prod_{v \notin \infty} \frac{\lambda_v^2}{\lambda_v^1} \int\limits_{O(W_v,V_v)} \xi_{i_v} \sigma_v .$$

Dies wollen wir über ein System $\{ i \}$ von Repräsentanten von eigentlichen Darstellungsgeschlechtern von N durch Gitter aus dem Geschlecht von M summieren. Dazu sei g(i) das eigentliche Geschlecht von $i : N \to M_j$ für irgendein $j \in \{1,\ldots,l\}$. Für jedes $v \in P$ definiert g(i) eine lokale eigentliche Darstellungsklasse $g(i)_v$ von Darstellungen $N_v \to M_v$, und die Zuordnung

$$g(i) \longmapsto (g(i)_v)_{v \in P}$$

ist nach Definition des eigentlichen Geschlechtes von Darstellungen injektiv. Andererseits ist sie auch surjektiv. Denn sei für jedes $v \in P$ eine Klasse g_v lokaler Darstellungen $N_v \to M_v$ fixiert, so läßt sich jedes $\varphi_v \in g_v$ zu einer Isometrie $\varphi_v : W_v \to V_v$ fortsetzen. Nach dem Satz von Minkowski-Hasse gibt es also eine Isometrie $\psi : W \to V$, und hieraus folgt $\psi_v(N_v) \subseteq M_v$ für fast alle v, etwa für $v \in P - S$, S endlich. Nach dem Satz von Witt existiert für jedes $v \in P$ ein $\chi_v \in SO(V_v)$ mit $\chi_v \varphi_v = \psi_v$. Sei M' das Gitter mit den lokalen Koordinaten $\chi_v(M_v)$ für $v \in S$ und

M_v für $v \notin S$. Es ist klar, daß M' im Geschlecht von M liegt und daß die Darstellung $\psi|_N : N \to M'$ die vorgegebenen lokalen eigentlichen Klassen liefert. Da es nur endlich viele eigentliche Geschlechter von Darstellungen gibt, können wir folgern, daß fast alle lokalen Darstellungsmengen einklassig sind. Insbesondere trifft dies natürlich wegen des Wittschen Satzes für die unendlichen Primstellen zu, so daß bereits die Abbildung

$$g(i) \longmapsto (g(i)_v)_{v \in P-\infty}$$

bijektiv ist. Die Summation über $\{ i \}$ liefert also:

$$\tau_o \sum_i \frac{1}{\tau_i} = \prod_{v \notin \infty} \frac{\lambda_v^2}{\lambda_v^1} \int_{O(W_v,V_v)} \sum_{i_v} \xi_{i_v} \sigma_v = \prod_{v \notin \infty} \frac{\lambda_v^2}{\lambda_v^1} \int_{O(N_v,M_v)} \sigma_v .$$

Bezeichnet $i' : N \to M'$ eine Darstellung von N durch ein Gitter M' aus dem Geschlecht von M, so gibt es offenbar ein M_ς unter den bei (4.2) definierten M_j $(j=1,\dots,l)$ und eine Darstellung $i: N \to M_\varsigma$ aus der Klasse von i'.

Wir wollen das Vertretersystem so wählen. (4.1) liefert dann

$$\sum_i \frac{1}{\tau_i} = \frac{1}{\tau(U)} \Big(\sum_{j=1}^{l} \sum_{j'=1}^{k_j} \omega_\infty^2(SO_\infty(U)/SO(u_{jj'}^{-1}, M_j, U))\Big) .$$

Unter Verwendung von (4.2) erhalten wir weiter

$$(4.3') \quad \frac{\sum_{j=1}^{l} \sum_{j'=1}^{k_j} \omega_\infty^2 (SO_\infty(U)/SO(u_{jj'}^{-1}, M_j,U))}{\sum_{j=1}^{l} \omega_\infty^1 (SO_\infty(V)/SO(M_j))} =$$

$$= \frac{\tau(U)}{\tau(V)} \tau_o \sum_i \frac{1}{\tau_i} = \frac{\tau(U)}{\tau(V)} \prod_{v \notin \infty} \frac{\lambda_v^2}{\lambda_v^1} \int_{O(N_v,M_v)} \sigma_v$$

für den Fall $n < m$. Ist $n = m$, also $rgN = rgM$, so können wir, da wir uns mit Siegel nur für $\mathfrak{o}$-lineare, also ganzzahlige Darstellungen interessieren, N = M annehmen; weiter ist in diesem Fall $\omega^1 = \sigma$, und (4.2) liefert

$$(4.4') \quad \frac{1}{\sum_{j=1}^{l} \omega_\infty^1 \, (SO_\infty(V)/SO(M_j))} = \frac{1}{\tau(V)} \prod_{v \notin \infty} \frac{1}{\lambda_v^1} \int_{SO(M_v)} \sigma_v \, .$$

Für alle v ist aber $[O(M_v) : SO(M_v)] = 2$, also ist

$$\int_{SO(M_v)} \sigma_v = \frac{1}{2} \int_{O(M_v)} \sigma_v = \frac{1}{2} \int_{O(N_v, M_v)} \sigma_v \, .$$

In den Formeln (4.3'), (4.4') treten die konvergenzerzeugenden Faktoren $\{\lambda_v^i\}_{v \in P}$ (i = 1,2) auf. Diese sind nur dann nicht trivial, wenn U oder V die Dimension 2 hat. Satz 1.2 zeigt jedoch, daß sie sich gegen den Wert der Tamagawazahl bis auf den Faktor 2 wegkürzen, wobei allerdings im Fall dim U < dim V die absolute Konvergenz des Produktes verloren geht und, wie man aus der Theorie der L-Reihen weiß, bedingte Konvergenz bei Anordnung der Faktoren nach wachsender Norm der Primstellen vorliegt. Berücksichtigen wir die Ergebnisse des Paragraphen 1, so erhalten wir aus den Formeln (4.3') und (4.4'):

$$(4.3'') \quad \frac{\sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{k_j} \omega_\infty^2 \, (SO_\infty(U)/SO(u_{ij}^{-1} M_i, U))}{\sum_{i=1}^{l} \omega_\infty^1 \, (SO_\infty(V)/SO(M_i))} =$$

$$= \eta \prod_{v \notin \infty} \int_{O(N_v, M_v)} \sigma_v \quad \text{für } \operatorname{rg} N < \operatorname{rg} M \quad \text{und}$$

$$(4.4'') \quad \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{1} \omega_\infty^1 \,(SO_\infty(V)/SO(M_i))} = \eta \prod_{v \notin \infty} \frac{1}{2} \int\limits_{O(N_v,M_v)} \sigma_v(\text{rg } N = \text{rg } M)$$

wobei in (4.3"),(4.4") $\eta = \frac{1}{2}$ ist, falls rg N = rg M > 1 oder rg N = rg M-1 ist, und in allen anderen Fällen hat man $\eta = 1$ zu setzen.

Wir wollen (4.3"), (4.4") so umformulieren, daß nicht mehr Maße eigentlicher, sondern uneigentlicher Darstellungsklassen auftauchen.

Besitzt das Gitter M_i in V eine uneigentliche orthogonale Transformation, so ist offenbar jedes Gitter M' der uneigentlichen Klasse von M_i auch in der eigentlichen Klasse, da man eine uneigentliche Isomorphie $M_i \to M'$ durch Vorschalten eines uneigentlichen Automorphismus zu einer eigentlichen machen kann. Es ist dann $[O(M_i) : SO(M_i)] = 2$.

Ist h_1 die Anzahl der reellen, h_2 die Anzahl der komplexen Primstellen von k, so ist $[O_\infty(V) : SO_\infty(V)] = 2^{h_1+h_2}$, so daß man

$$\omega_\infty^1(O_\infty(V)/O(M_i)) = 2^{h_1+h_2-1} \; \omega_\infty^1 \,(SO_\infty(V)/SO(M_i))$$

erhält. Besitzt M_i dagegen keine uneigentlichen Automorphismen, so ist offenbar für $x \in O(V)$ mit $\det x = -1$ das Gitter xM_i nicht aus der eigentlichen Klasse von M_i, und es besitzt ebenfalls keine uneigentlichen Automorphismen, wie

$$O(xM_i) = xO(M_i)x^{-1} = x\, SO(M_i)x^{-1} = SO\,(xM_i)$$

zeigt. Die eigentlichen Klassen von M_i und xM_i zusammen bilden offenbar die uneigentliche Klasse von M_i, und wegen $[O(M_i) : SO(M_i)] = 1$ und $SO(M_i) \simeq SO(xM_i)$ erhält man

$$\omega_\infty^1\,(O_\infty(V)/O(M_i)) = 2^{h_1+h_2}\ \omega_\infty^1\,(SO_\infty(V)/SO(M_i)) =$$

$$= 2^{h_1+h_2-1}(\omega_\infty^1\,(SO_\infty(V)/SO(M_i)) + \omega_\infty^1(SO_\infty(V)/SO(x\,M_i))\,)\,.$$

Damit kann man im Nenner von $(4.3'')$ und $(4.4'')$ zu den Maßsummen aller uneigentlichen Geschlechter übergehen, indem man den Faktor $2^{1-h_1-h_2}$ anbringt. Durch analoge Betrachtungen für die Gruppen $SO(u^{-1}M,\ U)$ erhält man das gleiche Ergebnis für den Zähler von $(4.3'')$ und bekommt:

$$(4.3)\quad \frac{\sum\limits_{i=1}^{l}\sum\limits_{j=1}^{k_i}\omega_\infty^2(O_\infty(U)/O(u_{ij}^{-1}\,M_i,U))}{\sum\limits_{i=1}^{l}\omega_\infty^1\,(O_\infty(V)/O(M_i))} =$$

$$= \eta \prod_{v\notin\infty}\ \int\limits_{O(N_v,M_v)} \sigma_v \qquad \text{für}\quad rg\ N < rg\ M\quad ,$$

$$(4.4)\quad \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{l}\omega_\infty^1\,(O_\infty(V)/O(M_i))} = \eta\prod_{v\notin\infty}\frac{1}{2}\int\limits_{O(N_v,M_v)}\sigma_v$$

$$\text{für}\quad rg\ N\ =\ rg\ M\quad ,$$

wobei $\eta = 1$ für $rg\ M > rg\ N + 1$, $\eta = \frac{1}{2}$ für $rg\ M = rg\ N+1$, $\eta = 2^{1-h_1-h_2}$ für $rg\ M = rg\ N = 1$ und $\eta = 2^{-h_1-h_2}$ für $rg\ M = rg\ N > 1$. (Die Zahlen l und k_i sind im allgemeinen natürlich andere als in $(4.3'')$, $(4.4'')$, ebenso die u_{ij}.)

Wir zeigen jetzt, daß die Formeln (4.3), (4.4) äquivalent sind mit Siegels Satz [S III, p. 214 f.] .

Für $n \leq m$ seien $s \in S_m(\mathfrak{o})$, $t \in S_n(\mathfrak{o})$ mit $\det s \det t \neq 0$ gegeben, und es existiere ein $x \in M_n^{m*}(\mathfrak{o})$ mit $x'sx = t$. Wir fassen s,t als Formenwertmatrizen gewisser, für den Rest des Beweises fixierter Basen der nunmehr also als frei vorausgesetzten regulären quadratischen $\mathfrak{o}$-Moduln M, N auf und behalten die bisherigen Bezeichnungen bei, jedoch identifizieren wir alle auftretenden abstrakten Räume mit den durch die Basiswahl zugehörigen Matrizenräumen. Fordern wir mit Siegel, daß weder $m = 2$ und $(-\det s) \in k^{*2}$ noch $m - n = 2$ und $(-\det s \det t) \in k^{*2}$ ist, so ist weder V noch U eine hyperbolische Ebene, was die zusätzlichen Voraussetzungen in diesen Paragraphen waren. Also gelten (4.3) und (4.4). Bisher haben wir noch keine Normierung der Differentialformen $\omega^1, \omega^2, \sigma$ festgelegt. Wir werden das als nächstes tun. Dabei genügt es, ω^1 und σ zu normieren; gemäß Hilfssatz 4.1 ist dann ω^2 eindeutig bestimmt.

Wir definieren die Abbildungen

$$\varphi_s: M_m^{m*}(k) \to S_m(k) \quad \text{durch} \quad \varphi_s(x) := x'sx \quad (x \in M_m^{m*}(k)),$$
$$\psi_s: M_{n_1}^{m*}(k) \to S_n(k) \quad \text{durch} \quad \psi_s(x) := x'sx \quad (x \in M_n^{m*}(k)),$$
$$\left.\begin{array}{l} \iota_s: \ \varphi_s^{-1}(s) = O(V) \to M_m^{m*}(k) \\ \iota_t: \ \psi_s^{-1}(t) = O(W,V) \to M_n^{m*}(k) \end{array}\right\} \text{als die Inklusionen.}$$

Außerdem benötigen wir die folgenden Eichformen:

$$dx := \bigwedge_{i=1}^{m} \bigwedge_{j=1}^{m} dx_{ij} \text{ auf } M_m^{m*}(k), \quad ds := \bigwedge_{i=1}^{m} \bigwedge_{j=1}^{i} ds_{ij} \text{ auf } S_m(k),$$

$$dc := \bigwedge_{i=1}^{m} \bigwedge_{j=1}^{n} dx_{ij} \text{ auf } M_n^{m*}(k), \quad dt := \bigwedge_{i=1}^{n} \bigwedge_{j=1}^{i} dt_{ij} \text{ auf } S_n(k).$$

Nach Hilfssatz 2.3 wählen wir Differentialformen $\omega^{(1)}, \tilde{\sigma}$ auf $M_m^{m*}(k)$ bzw. $M_n^{m*}(k)$ mit

(4.5) $dx = \omega^{(1)} \wedge \varphi_s^*(ds)$ und $dc = \tilde{\sigma} \wedge \psi_s^*(dt)$,

und definieren

$$\omega^1 := \iota_s^*(\omega^{(1)}) \quad , \quad \sigma := \iota_t^*(\tilde{\sigma}) \,.$$

Nach dem gleichen Hilfssatz ist klar, daß ω^1 und σ $O(V)$-invariante Eichformen auf $O(V)$ und $O(W,V)$ sind und unabhängig von der speziellen Wahl von $\omega^{(1)}$ und $\tilde{\sigma}$ fixiert sind. Insbesondere liefert die Eindeutigkeitsaussage im Fall $n = m$, für den wir, wie beim Beweis von (4.4') gezeigt, $N = M$, also $s = t$ annehmen können, wie früher die Gleichung $\omega^1 = \sigma$. Mit Hilfssatz 2.7 erhalten wir sofort die Werte der in (4.3), (4.4) rechts auftretenden Faktoren

$$\int_{O(N_v,M_v)} \sigma_v = N_k(v)^{-\lambda(mn-\frac{n}{2}(n+1))} A_\lambda(N_v,M_v)$$

für hinreichend großes λ, wo $A_\lambda(N_v,M_v)$ die Anzahl der modulo $\mathfrak{p}_v^\lambda$ inkongruenten $\mathfrak{o}_v$-linearen Injektionen von N_v in M_v bedeutet, die die quadratische Form modulo $\mathfrak{p}_v^\lambda$ invariant lassen. Damit steht auf den rechten Seiten von (4.3), (4.4) das gleiche wie in Siegels Satz, und wir haben Entsprechendes für die linken Seiten zu zeigen.
Dazu müssen wir auf die Siegelschen Definitionen der Darstellungsmaße eingehen, und um ein Minimum an Übersicchtlichkeit bei den folgenden Rechnungen zu gewährleisten, beschränken wir uns dabei auf den Fall $k = Q$.-
Wir wenden uns zunächst den in (4.3), (4.4) auftretenden Nennern zu und geben die Siegelsche Definition der entsprechenden Maße an [S II, Einleitung].

Sei $B \subseteq S_m(R)$ ein Gebiet mit $s \in B$ und

$$B_1 = \{ x \in M_m^{m*}(R) \mid x'sx \in B \} .$$

Die Gruppe der Einheiten von M (oder von s)

$$O(M) = \{ a \in GL_m(\mathfrak{o}) \mid a'sa = s \}$$

operiert auf B_1. Nach Siegel gibt es in B_1 einen Fundamentalbereich $\overline{B}$ bezüglich $O(M)$, der ein endliches Volumen $v(\overline{B})$ besitzt, wenn B ein endliches Volumen $v(B)$ hat. Läßt man B auf den Punkt s zusammenschrumpfen, so existiert

$$\lim_{B \to s} \frac{v(\overline{B})}{v(B)} =: \varsigma(s).$$

Wir zeigen:

$$(4.6) \quad \varsigma(s) = \omega_\infty^1 (O(V_\infty)/O(M)) .$$

Sei hierzu $\overline{\chi}$ die charakteristische Funktion von $\overline{B}$ auf $M_m^{m*}(R)$.

Hilfssatz 2.5 ergibt

$$v(\overline{B}) = \int_{M_m^{m*}(R)} \overline{\chi}\, dx_\infty = \int_{S_m(R)} \Big[\int_{\varphi_s^{-1}(s')} \overline{\chi}_{s'}\, \iota_{s'}^*(\omega_\infty^{(1)}) \Big] ds_\infty .$$

Wir setzen $I(s') := \int_{\varphi_s^{-1}(s')} \overline{\chi}_{s'}\, \iota_{s'}^*(\omega_\infty^{(1)})$ und bekommen

$I(s') = 0$, falls $s' \notin B$. Nach Konstruktion ist $\omega_\infty^1 = \iota_s^*(\omega_\infty^{(1)})$; haben wir die Stetigkeit von I in B gezeigt, so folgt mit Hilfssatz 2.1:

$$\lim_{B \to s} \frac{v(\overline{B})}{v(B)} = \lim \Big[\int_B ds_\infty \Big]^{-1} \int_B I\, ds_\infty = I(s) = \int_{O(V_\infty)} \overline{\chi}_s\, \iota_s^*(\omega_\infty^{(1)})$$

$$= \omega_\infty^1(O(V_\infty)/O(M)) .$$

Für den Beweis der Stetigkeit von I in B sei $s' \in B$ und $x \in \varphi_s^{-1}(s')$. Bei der Transformation $R_{x^{-1}} : y \mapsto yx^{-1}$ ($y \in M_m^{m*}(k)$) geht $\varphi_s^{-1}(s')$ in $O(V_\infty)$ über, und nach Hilfssatz 2.4 geht $\iota_{s'}^*(\omega^{(1)})$ über in $\iota_s^*(\bar{\omega}^{(1)})$ mit

$$\iota_s^*(\omega^{(1)}) = (\det x)^{-1}\, \iota_s^*(\bar{\omega}^{(1)}) = (\det s' \det s^{-1})^{-\frac{1}{2}}\, \iota_s^*(\bar{\bar{\omega}}^{(1)}).$$

Also:

$$I(s') = \int_{\varphi_s^{-1}(s')} \bar{\chi}_{s'}\, \iota_{s'}^*(\omega_\infty^{(1)}) = \int_{O(V_\infty)} \bar{\chi}_{s'} \circ (R_{x^{-1}})^{-1}\, \iota_s^*(\bar{\omega}_\infty^{(1)}) =$$

$$=(\det s' \det s^{-1})^{\frac{1}{2}} \int_{O(V_\infty)} (\bar{\chi}_{s'} \circ R_x)\, \iota_s^*(\omega_\infty^{(1)}) =$$

$$=(\det s' \det s^{-1})^{\frac{1}{2}} \int_{O(V_\infty)} \bar{\chi}_s\, \omega_\infty^1 \;;$$

die letzte Gleichung folgt, weil $\chi_{s'} \circ R_x$ die charakteristische Funktion eines gewissen Fundamentalbereichs von $O(V_\infty)$ modulo $O(M)$ ist und wegen der Translationsinvarianz von $\iota_s^*(\omega^{(1)}) = \omega^1$. Damit ist die Stetigkeit von I in B gezeigt.

Die den im Zähler von (4.3) auftretenden entsprechenden Maße sind bei Siegel [l.c.] folgendermaßen definiert:

Es sei $n < m$ und $c \in M_n^{m*}(\mathfrak{o})$ mit $c'sc = t$. G sei ein $\frac{1}{2}(m-n)(m+n+1)$-dimensionales Gebiet von mit s reell äquivalenten Matrizen $z \in S_m(R)$ der Form

$z = \begin{pmatrix} t & q \\ q' & r \end{pmatrix}$, $q \in M_{m-n}^m(R)$, $r \in S_{m-n}(R)$, welches einen Punkt $z_o = \begin{pmatrix} t & q_o \\ q_o' & r_o \end{pmatrix}$ mit $\det z_o = \det s_o$ enthält, und

$G_1 := \{ y \in M^m_{m-n}(R) | (cy)' s(cy) \in G \}$, $E := \{ a \in O(M) | ac = c \}$.

E ist Untergruppe von $O(M)$ und operiert auf G_1, und nach Siegel existiert ein Fundamentalbereich $\overline{G}$ von G_1 modulo E, der ein endliches Volumen $\mathfrak{v}(\overline{G})$ besitzt, wenn G ein endliches Volumen $\mathfrak{v}(G)$ hat, und läßt man G sich auf z_o zusammenziehen, so existiert

$$\lim_{G \to z_o} \frac{\mathfrak{v}(\overline{G})}{\mathfrak{v}(G)} =: \varrho(s,t,c).$$

c entspricht einer Darstellung $N \to M$, und es ist $E = O(M,U)$. Wir zeigen:

$$(4.7) \quad \varrho(s,t,c) = \omega^2_\infty(O(U_\infty)/O(M, U)).$$

Wegen $\det s = \det z_o$ läßt sich zunächst durch Transformation mit einer Matrix, deren Determinante den Betrag 1 hat (wodurch die Volumina nicht abgeändert werden) die Situation $s = z_o$, $c = \begin{pmatrix} 1n \\ 0 \end{pmatrix}$ erreichen. Dann können wir

$$\{ y \in M^m_{m-n}(R) \mid (cy)' s(cy) = s \}$$

mit $O(U_\infty)$ identifizieren. Wir definieren noch die Abbildungen

$$\varrho_1 : M^{m*}_m(R) \to M^{m*}_n(R) \quad \text{durch } \varrho_1(x) := (x_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}} \quad \text{für}$$

$$x = (x_{ij})_{i,j=1,\dots,m} \in M^{m*}_m(R),$$

$$\varrho_2 : S_m(R) \to S_n(R) \quad \text{durch } \varrho_2(x) := (x_{ij})_{ij=1,\dots,n} \quad \text{für}$$

$$x = (x_{ij})_{i,j=1,\dots,m} \in S_m(R),$$

$$i_c : G_1 \to M^{m*}_m(R) \text{ durch } i_c(y) = (cy) \text{ für } y \in G_1 .$$

Es ist $\varphi_s \circ i_c(G_1) = G$. $O(U_\infty)$ operiert auf G_1 ($\varphi_s \circ i_c$) - fasertreu in der folgenden Weise: Für $y \in O(U_\infty)$ ist $(cy)'s(cy) = s$; ist also $cx \in G_1$, so ist $(cy)(cx)$ wieder von der Form (cz) mit geeignetem $z \in M^m_{m-n}(R)$, und es ist $(cz)'s(cz) = (cx)'s(cx)$, also $(cz) \in G_1$.

$dy := \bigwedge_{i=1}^{m} \bigwedge_{j=n+1}^{m} dx_{ij}$ ist eine nirgends verschwindende überall holomorphe Differentialform auf $M^{m*}_m(R)$ mit

$$(4.8) \qquad dx = dy \wedge \varrho_1^*(dc) ,$$

$i_c^*(dy)$ ist also Eichform auf G_1 und offenbar gegen die Operation von $O(U_\infty)$ invariant. Die Differentialform

$dr = \bigwedge_{i=n+1}^{m} \bigwedge_{j=1}^{i} dt_{ij}$ kann offenbar als Eichform auf G aufgefaßt werden, und auf $S_m(R)$ gilt

$$(4.9) \qquad ds = \varrho_2^*(dt) \wedge dr .$$

In der weiteren Rechnung konstruieren wir eine Differentialform $\tilde{\omega}$ auf $M^{m*}_m(R)$, deren Einschränkung $\tilde{\omega}^2 := \iota_s^*(\omega)$ auf $O(V)$ genau die Bedingung von Hilfssatz 4.1 erfüllt, in unserer Bezeichnungsweise also der Gleichung

$$(4.10) \qquad \omega^1 = \tilde{\omega}^2 \wedge \iota_s^* \circ \varrho_1^*(\tilde{\sigma})$$

(denn mit dem in Hilfssatz 4.1 benutzten φ ist gerade $\varrho_1 \circ \iota_s = \iota_t \circ \varphi$, also $\iota_s^* \circ \varrho_1^*(\tilde{\sigma}) = \varphi^*(\sigma)$) genügt; hieraus folgt, daß die Einschränkung von $\tilde{\omega}$ auf $O(U)$ genau ω^2 liefert. Andererseits wird die Einschränkung $\omega^{(2)} = i_c^*(\tilde{\omega})$ auf G_1 gerade

$$(4.11) \qquad i_c^*(dy) = \omega^{(2)} \wedge (\varphi_s \circ i_c)^*(dr)$$

erfüllen; da $i_c^*(dy)$ invariant gegen die Operation von $O(U_\infty)$ ist und diese Operation $(\varphi_s \circ i_c)$-fasertreu ist, schließt man wie in Hilfssatz 2.3, daß die Einschränkung von $\omega^{(2)}$ auf die Fasern von $\varphi_s \circ i_c$ invariante Eichformen liefert. Insbesondere ist die Einschränkung von $\omega^{(2)}$ auf $(\varphi_s \circ i_c)^{-1}(s) = O(U_\infty)$ nach dem Obigen gerade ω^2. Die Gleichung (4.11) aber ermöglicht ein genau dem Beweis von (4.6) analoges Weiterschließen auf (4.7).

Wir konstruieren also $\tilde{\omega}$:

Zunächst existiert eine Differentialform $\omega^{(2)}$ auf G_1 mit

(4.11) $\quad i_c^*(dy) = \omega^{(2)} \wedge (\varphi_s \circ i_c)^*(dr),$

und wegen der Surjektivität von i_c^* gibt es eine Differentialform $\tilde{\omega}$ auf $M_m^{m*}(R)$ mit $i_c^*(\tilde{\omega}) = \omega^{(2)}$, und, wegen (4.11), mit

$$dy = \tilde{\omega} \wedge \varphi_s^*(dr) + \varkappa , \ \varkappa \in \operatorname{Ker}(i_c^*).$$

(4.8) ergibt damit

$$dx = \tilde{\omega} \wedge \varphi_s^*(dr) \wedge \varrho_1^*(dc) + \varkappa \wedge \varrho_1^*(dc);$$

hier ist offensichtlich wegen $\varkappa \in \operatorname{Ker}(i_c^*)$ nach Definition von ϱ_1

$$\varkappa \wedge \varrho_1^*(dc) = 0 .$$

Die zweite Gleichung von (4.5) liefert damit

$dx = \tilde{\omega} \wedge \varphi_s^*(dr) \wedge \varrho_1^*(\tilde{\sigma}) \wedge (\psi_s \circ \varrho_1)^*(dt).$

Wegen $\psi_s \circ \varrho_1 = \varrho_2 \circ \varphi_s$ erhält man weiter mit (4.9)

$dx = \tilde{\omega} \wedge \varrho_1^*(\tilde{\sigma}) \wedge \varphi_s^*(ds);$

mit der ersten Gleichung von (4.5) wird dies zu

$\omega^{(1)} \wedge \varphi_s^*(ds) = \tilde{\omega} \wedge \varrho_1^*(\tilde{\sigma}) \wedge \varphi_s^*(ds) ,$

und Hilfssatz 2.3 ergibt mit der Eindeutigkeitsaussage

$\omega^1 = \iota_s^*(\omega^{(1)}) = \iota_s^*(\tilde{\omega}) \wedge \iota_s^* \circ \varrho_1^*(\tilde{\sigma}) = \tilde{\omega}^2 \wedge \iota_s^* \circ \varrho_1^*(\tilde{\sigma}) ;$

dies ist aber genau die Gleichung (4.10), die noch zu zeigen war. -

Die Gleichungen

(4.6) $\quad \varrho(s) = \omega_{\infty}^{1}\,(O(V_{\infty})/O(M))$

(4.7) $\quad \varrho(s,t,c) = \omega_{\infty}^{2}\,(O(U_{\infty})/O(M,U))$

besagen also gerade, daß die von uns benutzten Darstellungsmaße für den Fall $k = Q$ mit denen Siegels übereinstimmen. Ist k ein beliebiger Zahlkörper mit h_1 reellen und h_2 komplexen Primstellen, so hat man für den Beweis der Gleichheit die Maße ω_{∞}^{1} etc. zunächst zu "reellifizieren", was den in der Definition des Tamagawamaßes auftretenden von der Körperdiskriminante abhängigen Faktor liefert, und dann in allen $h_1 + 2\,h_2$ reellen Komponenten gleichzeitig die gleiche Rechnung wie oben durchzuführen(cf. Siegels Definition der Darstellungsmaße für den Zahlkörperfall, [S III, Einleitung]). Wir wollen annehmen, das sei geschehen. Summieren wir dann im Fall $n < m$ die $\varrho(s,t,c)$ über alle Klassen von Darstellungen von N durch Gitter aus dem Geschlecht von M und bezeichnen die Summe mit $\mu(N, M)$, und bezeichnet $\mu(M)$ die Summe aller $\varrho(s)$ über die Klassen von Gittern aus dem Geschlecht von M, so liefern (4.3), (4.4) bei der zusätzlichen Definition $\mu(N, M) = 1$ im Fall $n = m$ genau den Siegelschen Hauptsatz [S III, p. 215]:

$$\frac{\mu(N,M)}{\mu(M)} = \eta \prod_{v \notin \infty} \epsilon\, N_k(v)^{-\lambda\,(mn-\frac{n}{2}(n+1))}\, A_{\lambda}\,(N_v,M_v)$$

mit $\epsilon = \frac{1}{2}$, falls $m = n$, $\epsilon = 1$ sonst, und $\eta = 1$ für $m > n + 1$, $\eta = \frac{1}{2}$ für $m = n + 1$, $\eta = 2^{1-h_1-h_2}$ für $m = n = 1$ und $\eta = 2^{-h_1-h_2}$ für $m = n > 1$.

Literatur

[A] Artin, Emil , Über eine neue Art von L-Reihen ; Hamb. Abh. 3 (1923) pp. 89-108.

[B] Böge, Sigrid, Schiefhermitesche Formen über Zahlkörpern und Quaternionenschiefkörpern; Crelle 221 (1966) pp. 85-112.

[E] Eichler, Martin, Quadratische Formen und orthogonale Gruppen; Berlin (1952).

[H] Heilbronn, H., Zeta-functions and L-functions; Brighton (1967), pp. 204-230.

[H - R] Hewitt, Edwin and Kenneth Ross, Abstract Harmonic Analysis I ; Berlin (1963) .

[K_1] Kneser, Martin, Darstellungsmaße indefiniter quadratischer Formen; Math. Z. 77 (1961) pp. 188 - 194 .

[K_2] Kneser, M., Quadratische Formen I, II; Göttingen (1966-1967), (Vorlesung).

[K_3] Kneser, M. , Semi-simple Algebraic Groups; Brighton (1967), pp. 250-265.

[O_1] Ono, Takashi, Arithmetic of Algebraic Tori; Ann. of Math. 74 (1961) pp. 101-139.

[O_2] Ono, T., On the Tamagawa Number of Algebraic Tori; Ann. of Math. 78 (1963) pp. 47-73.

[Se] Serre, Jean-Pierre, Lie Algebras and Lie Groups ; Harvard (1964), (Vorlesung).

[S] Siegel, Carl Ludwig, Über die analytische Theorie der quadratischen Formen I, II, III; Ann. of Math. 36 (1935) pp. 527-606 , 37 (1936) pp. 230-263, 38 (1937) pp. 212-291.

[W] Weil, André, Adeles and Algebraic Groups; Princeton (1961), (Vorlesung) .