Zentrale Erweiterungen der speziellen linearen Gruppe eines Schiefkörpers*)

Von *Ulf Rehmann* in Bielefeld

0. Einleitung

Zu einem Schiefkörper (oder allgemeiner einem assoziativen Ring mit 1) D und $n \in \mathbb{N}$, $n \geqq 3$ bezeichnet man mit Milnor [15], § 5 als Steinberg-Gruppe $St_n(D)$ die Gruppe mit Erzeugenden $x_{ij}(u)$ $(1 \leqq i, j \leqq n,\ i \neq j,\ u \in D)$ und definierenden Relationen

$$x_{ij}(u)\, x_{ij}(v) = x_{ij}(u+v), \quad [x_{ij}(u), x_{kl}(v)] = \begin{cases} 1 & \text{falls } i \neq l,\ j \neq k \\ x_{il}(uv) & \phantom{\text{falls }} i \neq l,\ j = k. \end{cases}$$

(Hierbei wie im folgenden werden für Elemente a, b einer Gruppe die Abkürzungen ${}^a b := aba^{-1}$, $[a, b] := {}^a b \cdot b^{-1}$ verwandt.) Diese Relationen beschreiben bekanntlich das Verhalten der Elementarmatrizen $e_{ij}(u) \in GL_n(D)$ (für $1 \leqq i, j \leqq n$, $i \neq j$, $u \in D$ ist $e_{ij}(u)$ die Matrix $(a_{\mu\nu})$ mit $a_{\mu\mu} = 1$, $a_{ij} = u$, $a_{\mu\nu} = 0$, falls $(\mu, \nu) \neq (i, j)$ und $\mu \neq \nu$): Die Zuordnung

$$x_{ij}(u) \to e_{ij}(u)$$

definiert einen Gruppenhomomorphismus $\phi_n : St_n(D) \to GL_n(D)$ der Steinberg-Gruppe auf die durch die $e_{ij}(u)$ erzeugte Untergruppe $E_n(D)$ von $GL_n(D)$. Wenn D Schiefkörper ist — was im folgenden stets angenommen wird —, ist die Gruppe $E_n(D)$ gleich dem Kern $SL_n(D)$ der Dieudonnéschen Determinante [6], also der speziellen linearen Gruppe von D.

Nun ist die Gruppe $SL_n(D)$ perfekt, also gleich ihrer Kommutatorgruppe, und besitzt als solche eine universelle zentrale Erweiterung (cf. [19], § 7, [15], § 5). Es gilt der

Satz (Steinberg). i) $\phi_n : St_n(D) \to SL_n(D)$ *ist zentrale Erweiterung.*

(ii) $St_n(D)$ *ist universelle zentrale Erweiterung von* $SL_n(D)$, *falls* $n \geqq 5$ *ist oder das Zentrum von* D *wenigstens fünf Elemente enthält.*

Für kommutatives D ist dies in [18] bewiesen, für den Schiefkörperfall verweisen wir auf unsere Bemerkung zu Korollar 1 Satz 1 Abschnitt 4.

In der Steinberg-Gruppe definiert man üblicherweise

$$w_{ij}(u) := x_{ij}(u)\, x_{ji}(-u^{-1})\, x_{ij}(u), \quad h_{ij}(u) := w_{ij}(u)\, w_{ij}(-1)$$

*) Habilitationsschrift Bielefeld 1977.

für $u \in D^*$. Es ist dann

$$\phi_n(h_{ij}(u)) = d_{ij}(u) := \mathrm{diag}(u_1, \ldots, u_n),$$
$$u_i = u, \ u_j = u^{-1}, \ u_k = 1 \quad (k \neq i, j),$$

hierbei bedeutet $\mathrm{diag}(u_1, \ldots, u_n) \in GL_n(D)$ die Diagonalmatrix aus den Elementen $u_1, \ldots, u_n \in D^*$.

Setzen wir nun $c(u, v) := h_{12}(u)\, h_{12}(v)\, h_{12}(vu)^{-1}$, so ist

$$\phi_n(c(u, v)) = \mathrm{diag}([u, v], 1, \ldots, 1).$$

Ist also $D = K$ ein kommutativer Körper, so ist $c(u, v) \in \mathrm{Kern}\, \phi_n$, und man hat den

Satz (Steinberg [18]). *Kern* ϕ_n *wird durch* $\{c(u, v) | u, v \in K^*\}$ *erzeugt.*

Die Elemente $c(u, v)$ sind im allgemeinen nicht unabhängig. Als Extrembeispiel führen wir den folgenden ebenfalls von Steinberg [18] gefundenen Sachverhalt an:

Ist K algebraische Erweiterung eines endlichen Körpers, so ist $c(u, v) = 1$ für alle $u, v \in K^*$.

Im allgemeinen hat man für die Elemente $c(u, v)$ die Relationen

0 $\qquad c(u, 1-u) = 1 \qquad (u, 1-u \in K^*),$

1 $\qquad c(uv, w) = c(u, w)\, c(v, w),$

2 $\qquad c(u, vw) = c(u, v)\, c(u, w),$

und Matsumoto hat in seiner Arbeit zum Kongruenzuntergruppenproblem [13] gezeigt, daß hieraus alle übrigen Relationen folgen:

Satz (Matsumoto). *Kern* ϕ_n *ist isomorph zur Gruppe mit Erzeugenden* $c(u, v)$ *und definierenden Relationen* 0, 1, 2.

Das Ziel dieser Arbeit ist es, eine Ausweitung dieses Satzes auf den Schiefkörperfall zu geben.

Es ist klar: Ist D Schiefkörper, $u_i, v_i \in D^*$ mit $\prod [u_i, v_i] = 1$, so ist

$$\prod c(u_i, v_i) \in \mathrm{Kern}\, \phi_n.$$

Mit einiger Rechnung in der Steinberg-Gruppe zeigt man, daß man so alle Elemente aus Kern ϕ_n erhält. Etwas schwieriger ist der Nachweis von folgender Aussage:

In $St_n(D)$ *gelten für die Elemente* $c(u, v)$ *folgende Relationen*:

U0 $\qquad c(u, 1-u) = 1 \qquad (u, 1-u \in D^*),$

U1 $\qquad c(uv, w) = c({}^u v, {}^u w)\, c(u, w),$

U2 $\qquad c(u, vw)\, c(v, wu)\, c(w, uv) = 1.$

Die von uns angestrebte Verallgemeinerung des Matsumotoschen Satzes besteht dann in folgendem

Satz. *Sei* U_D *die durch* $c(u, v)$ $(u, v \in D^*)$ *erzeugte Gruppe mit definierenden Relationen* U0, U1, U2. *Auf* U_D *operiert* D^* *vermöge* ${}^x c(u, v) := c({}^x u, {}^x v)$, *und es gilt*:

i) *Die Zuordnung* $c(u, v) \mapsto [u, v]$ *definiert einen* D^**-äquivarianten,* D^**-zentralen Gruppenepimorphismus* $\pi : U_D \to [D^*, D^*]$.

ii) *Die Zuordnung* $c(u,v) \mapsto h_{12}(u)\, h_{12}(v)\, h_{12}(vu)^{-1}$ *definiert einen Gruppenmonomorphismus* $U_D \to St_n(D)$, *dessen Einschränkung auf* Kern π *eine Isomorphie mit* Kern ϕ_n *induziert.*

(D^*-zentral bedeutet hier: Kern π ist zentral in U_D und elementweise fest unter D^*.) Satz 1 in Abschnitt 4 enthält eine etwas stärkere Formulierung.

Bemerkungen. 1) Für kommutatives D ist offenbar Kern $\pi = U_D$, und man erhält Matsumotos Satz.

2) Nach Milnor [15] setzt man $K_2(n, D) := \operatorname{Kern} \phi_n$. Der Satz liefert einen unabhängigen Beweis für ein schon länger bekanntes Resultat (cf. [1]):

$$K_2(n, D) \cong K_2(n+1, D) \cong K_2(D) \; \big(:= \xrightarrow[n]{\lim} K_2(n, D)\big) \quad \text{für } n \geqq 3.$$

3) Eine Anwendung der Hochschild-Serre-Spektralsequenz auf den Homomorphismus π liefert die exakte Sequenz

$$H_2(U_D) \to H_2([D^*, D^*]) \to K_2(D) \to H_1(U_D) \to H_1([D^*, D^*]) \to 1$$

(alle Homologiegruppen mit Werten in $\mathbb{Z}$ als trivialem Modul). Unter der zusätzlichen Annahme, daß $[D^*, D^*]$ perfekt ist, hat Dennis eine ähnliche exakte Sequenz hergeleitet (unveröffentlicht, cf. [3]).

4) Von Dennis und Stein wurde das Resultat von Matsumoto verwandt, um eine Präsentation für $K_2(A)$ zu erhalten, wo A ein kommutativer diskreter Bewertungsring ist [5]. Eine analoge Ausweitung des hier gegebenen Resultats auf nicht notwendig kommutative Bewertungsringe A ist von Dennis angekündigt worden [3], [4]. Es wird eine durch Erzeugende und Relationen gekennzeichnete zentrale Erweiterung von $[A^*, A^*]$ mit $K_2(A)$ angegeben und eine exakte Sequenz wie in 3) abgeleitet. Darüber hinaus wird die Präsentation von U_D für den Quotientenschiefkörper D von A benutzt, um eine explizite Beschreibung des „zahmen Symbols" von D zu erhalten.

5) Im Abschnitt 5 (Satz 2) wird eine topologische Fassung des Satzes gegeben. Es liegt nahe zu fragen, ob dieser Satz eine Verallgemeinerung der Resultate von C. C. Moore [16] auf lokal-kompakte Schiefkörper ermöglicht (für den kommutativen Fall cf. [15], Appendix) und ob sich gegebenenfalls damit (nach dem Vorbild der Matsumotoschen Thesis) das Kongruenzuntergruppenproblem für die SL_n einer endlich-dimensionalen zentralen Divisionsalgebra über einen globalen Zahl- und Funktionenkörper angreifen läßt. Resultate in dieser Hinsicht scheint es nicht zu geben (cf. [3], probl. 7).

6) Das Ergebnis von Matsumoto [13] (ebenso wie die von Steinberg [18]) ist nicht nur für die SL_n, sondern für beliebige Chevalley-Gruppen über einem Körper K formuliert und bewiesen. Für den Fall einer endlich-dimensionalen zentralen Divisionsalgebra D über K ist $SL_n(D)$ im wesentlichen die Gruppe der K-rationalen Punkte einer fasteinfachen algebraischen Gruppe über K. Unser Satz (in der stärkeren Fassung im Abschnitt 4) beschreibt die zentralen Erweiterungen der Gruppe durch gewisse zentrale Erweiterungen ihres (halbeinfachen) anisotropen Kernes. Möglicherweise existiert in diesem Zusammenhang eine Verallgemeinerung.

7) Präsentationen für K_2 sind neuerdings im kommutativen Fall auch für eine Reihe ringtheoretischer Situationen gegeben worden (von v. d. Kallen, Maazen, Stienstra, cf. [11], [12]). Es sollte nicht allzu schwierig sein, etwa die Methoden aus [12] mit den hier benutzten zu vereinigen und die Resultate dort auf nichtkommutative Ringe zu übertragen (cf. [3], probl. 9, 10, 11).

8) In [7] ist eine Präsentation für K_2 von Schiefkörpern angegeben. Inzwischen hat sich gezeigt, daß der angekündigte Beweis nicht realisierbar war, da die Relationen nicht ausreichten ([3], probl. 1).

Unser Satz scheint darauf hinzudeuten, daß eine allgemeine Lösung dieses Problems ziemlich schwierig ist. Jedoch ist vielleicht der Fall von über ihrem Zentrum endlichdimensionalen Divisionsalgebren einfacher zu behandeln. Deren K_2 scheint sich vom K_2 des Zentrums nicht allzu sehr zu unterscheiden (cf. [8]).

Der Autor dankt an dieser Stelle den Herren R. K. Dennis, Ithaca, und W. v. d. Kallen, Utrecht, für nützliche Hinweise zu dieser Arbeit.

1. Gruppenerweiterungen vom Typ $\mathfrak{U}(G)$

Es sei G eine Gruppe. Mit $U(G)$ bezeichnen wir die Gruppe mit Erzeugenden $c(u, v)$ $(u, v \in G)$ und den definierenden Relationen

U1 $$c(uv, w) = c({}^u v, {}^u w)\, c(u, w),$$

U2 $$c(u, vw)\, c(v, wu)\, c(w, uv) = 1.$$

Auf $U(G)$ operiert G vermöge

U3 $${}^x c(u, v) := c({}^x u, {}^x v),$$

und es gibt einen G-äquivarianten Gruppenepimorphismus $\pi_G : U(G) \to G^1 := [G, G]$ mittels $c(u, v) \mapsto [u, v]$. Wir setzen $\tilde{H}(G) := \operatorname{Kern} \pi_G$.

Definition[1]**.** Eine Gruppenerweiterung $\pi : U \to G^1$ heiße *vom Typ* $\mathfrak{U}(G)$, wenn sie Quotient von π_G ist, wenn also die Gruppe U Erzeugende $c(u, v)$ $(u, v \in G)$ mit $\pi c(u, v) = [u, v]$ besitzt, für die die Relationen U1, U2 erfüllt sind.

Lemma 1. 1. *Sei $\pi : U \to G^1$ eine Gruppenerweiterung vom Typ $\mathfrak{U}(G)$. Vermöge* U3 *wird U eine G-Gruppe und π G-äquivariant. In U gelten die Relationen $(u, v, \ldots \in G)$:*

U4 $$c(1, u) = 1,$$

U5 $$c(u, v)\, c(v, u) = 1,$$

U6 $$c(u, vw) = c(u, v)\, {}^v c(u, w),$$

U7 $$c(u, v)\, c(u', v') = {}^{[u, v]} c(u', v')\, c(u, v),$$

U8 $${}^u c(u^{-1}, v) = c(v, u),$$

U9 $$c([u, v], w) = c(u, v)\, {}^w c(v, u),$$

U10 $$c(\pi \xi, w) = \xi^w \xi^{-1} \qquad (\xi \in U).$$

[1]) In [17] haben wir zusätzlich U7 gefordert. K. Dennis [2] bemerkte, daß U7 Implikation von U1 und U2 ist.

Kern π *ist also zentral in* U *und elementweise fest unter* G.

Beweis. Die Gültigkeit der ersten Aussage ist klar in $U(G)$. Es genügt, U4—U10 in $U(G)$ zu beweisen. Denn nach U10 ist dann jede Untergruppe von Kern π_G G-invariant und folglich U nach U3 eine G-Gruppe, in der ebenfalls U4—U10 gilt. U4 folgt aus U1 mit $u=v=1$; U5 ergibt sich aus U2 mit $w=1$ und U4; U6 aus U1, U5. Wendet man U1, U6 in verschiedener Reihenfolge an, erhält man einerseits

$$c(uu', vv') = {}^{u}c(u', v)\, {}^{uv}c(u', v')\, c(u, v)\, {}^{v}c(u, v'),$$

andererseits

$$c(uu', vv') = {}^{u}c(u', v)\, c(u, v)\, {}^{vu}c(u', v')\, {}^{v}c(u, v').$$

Ein Vergleich ergibt U7, wenn ${}^{vu}u'$ durch u' und ${}^{vu}v'$ durch v' ersetzt wird.

Weiter ist nach U1

$${}^{u}c(u^{-1}, v)\, c(u, v) = c(1, v),$$

mit U4, U5 ist dies U8. Für U9 berechnet man

$$\begin{aligned} c([u, v], w) &= {}^{uv}c(u^{-1}v^{-1}, w)\, c(uv, w) && \text{(U1)}\\ &= c(u, v)\, {}^{vu}c(u^{-1}v^{-1}, w)\, c(u, v)^{-1}\, c(u, vw)\, c(v, wu) && \text{(U7, U2, U5)}\\ &= c(u, v)\, c(w, vu)\, {}^{v}c(u, w)\, c(v, w)\, {}^{w}c(v, u) && \text{(U8, U6)}\\ &= c(u, v)\, {}^{w}c(v, u) && \text{(U5, U6).} \end{aligned}$$

U10 erhält man für $\xi = \prod_{i=1}^{r} c(u_i, v_i)$ durch Induktion nach r aus U9; für $\eta := \prod_{i=2}^{r} c(u_i, v_i)$ ist

$$\begin{aligned} c(\pi\xi, w) &= {}^{[u_1, v_1]}c(\pi\eta, w)\, c(u_1, v_1)\, {}^{w}c(v_1, u_1) && \text{(U1, U9)}\\ &= c(u_1, v_1)\, c(\pi\eta, w)\, {}^{w}c(v_1, u_1) && \text{(U7)}\\ &= \xi^{w}\xi^{-1} \end{aligned}$$

nach Induktionsannahme.

Damit ist Lemma 1 bewiesen.

Beispiele und Bemerkungen. i) Sei G abelsch. U7 besagt, daß $U(G)$ abelsch ist. Aus U1, U6 folgt: $c: G \times G \to U(G)$ $\big((u, v) \mapsto c(u, v)\big)$ ist bimultiplikativ, U5 bedeutet Schiefsymmetrie. Umgekehrt implizieren U5, U6 die Relation U2, man hat also

$$\tilde{H}(G) = U(G) \cong G \otimes_Z G/(u \otimes v + v \otimes u).$$

ii) Sei $p: E \to G$ zentrale Erweiterung von G, $s: G \to E$ ein Schnitt: $ps = \mathrm{id}_G$. Dann hängt das Element $c(u, v) := [su, sv]$ für $u, v \in G$ nicht ab von der Wahl von s, und das Erzeugnis aller Elemente $c(u, v)$ ist genau $E^1 = [E, E]$: für $\xi = \prod_i [\eta_i, \eta_i'] \in E^1$ ist nämlich $\prod c(p\eta_i, p\eta_i') = \prod [sp\eta_i, sp\eta_i'] = \prod [\eta_i, \eta_i'] = \xi$. Die Einschränkung $\pi_p = p|_{E_1}: E^1 \to G^1$ ist Erweiterung vom Typ $\mathfrak{U}(G)$ mit Kern $\pi_p =$ Kern $p \cap E^1$, wie man leicht nachrechnet. i) zeigt, daß man nicht jede solche Erweiterung auf diese Weise erhält; hier gilt nämlich zusätzlich $c(u, u) = 1$ für jedes $u \in G$.

iii) Ist G perfekt, also $G=G^1$, so gilt dies auch für $U(G)$: Sind für $u, v \in G$ Urbilder $\xi, \eta \in U(G)$ fixiert, so hat man hierfür

$$c(u, v)=c(\pi_G \xi, \pi_G \eta)=[\xi, \eta] \in [U(G), U(G)]$$

nach U 10, U 7. Hieraus folgt, daß in diesem Fall der nach ii) für jede zentrale Erweiterung $E \to G$ über G existierende Homomorphismus $U(G) \to E$ eindeutig ist. Mit anderen Worten: $\pi_G : U(G) \to G$ ist die universelle Überlagerung von G, und $\tilde{H}(G)=\pi_1(G)=H_2(G, \mathbb{Z})$ ist die Fundamentalgruppe bzw. der Schur-Multiplikator von G.

iv) Im allgemeinen hat man einen Epimorphismus von $\tilde{H}(G)$ auf den Schur-Multiplikator $H_2(G, \mathbb{Z})$ (der nicht injektiv sein muß, wie aus i) — etwa für $G=\mathbb{Z}$ — hervorgeht).

Ist nämlich eine exakte Sequenz

$$1 \to R \to F \to G \to 1$$

mit der freien Gruppe F und dem Relatorennormalteiler R gegeben, so ist

$$1 \to R/[F, R] \to F/[F, R] \xrightarrow{p} G \to 1$$

zentrale Erweiterung von G, also

$$1 \to R \cap F^1/[F, R] \to F^1/[F, R] \xrightarrow{\pi_p} G^1 \to 1$$

Erweiterung vom Typ $\mathfrak{U}(G)$, dessen Kern nach [10] von F und R unabhängig und isomorph zu $H_2(G, \mathbb{Z})$ ist.

v) Man rechnet leicht nach, daß durch die Abbildung $u \mapsto c(u, u)$ ein Homomorphismus $G \to \tilde{H}(G)$ definiert wird. Wegen $c(u, u)^2=1$ induziert dies einen Homomorphismus

$$(G/G^1 \otimes \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\iota} \tilde{H}(G).$$

Der Beschreibung des Schur-Multiplikator in [14] läßt sich entnehmen, daß das Bild von ι gleich dem Kern des in iv) beschriebenen Homomorphismus ist.[2])

vi) Die Rechnungen in [14] (cf. Lemma p. 590) lassen sich auch verwenden, um folgendes nachzuweisen: Ist $G_1 * G_2$ freies Produkt der Gruppen G_1, G_2, so ist

$$\tilde{H}(G_1 * G_2)=\tilde{H}(G_1) \times \tilde{H}(G_2).$$

Es sei nun G eine separierte topologische Gruppe.

Definition. Eine Gruppenerweiterung $\pi: U \to G^1$ vom Typ $\mathfrak{U}(G)$ heiße *topologisch*, wenn gilt:

i) U ist separierte topologische Gruppe,

ii) π ist stetig und offen,

iii) die Abbildung $c: G \times G \to U$ $((u, v) \mapsto c(u, v))$ ist stetig.

---

[2]) Neuerdings ist der Funktor $G \to \tilde{H}(G)$ von Dennis [2] systematisch untersucht worden; es ist nicht schwer zu sehen, daß ι injektiv ist und daß die exakte Sequenz

$$1 \to G/G^1 \otimes \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{\iota} \tilde{H}(G) \to H_2(G, \mathbb{Z}) \to 1$$

(nicht-kanonisch) zerfällt.

Bemerkung. Ist $\pi: U \to G^1$ topologische Erweiterung vom Typ $\mathfrak{U}(G)$, so ist die Abbildung

$$G \times U \to U \qquad ((x, \xi) \to {}^x\xi)$$

stetig.

Dies folgt ohne weiteres aus der Beziehung ${}^x\xi = c(x, \pi\xi)\,\xi$.

2. Gruppenerweiterungen vom Typ $\mathfrak{H}_n(G)$

Es sei G eine Gruppe, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqq 3$. Mit $D_n(G)$ bezeichnen wir die Untergruppe des n-fachen direkten Produkts $G \times \cdots \times G = \{(u_1, \ldots, u_n) | u_i \in G\}$ mit der Eigenschaft $\prod_{i=1}^{n} u_i \in G^1$. Diese Gruppe $D_n(G)$ wird erzeugt durch Elemente

$$d_{ij}(u) := (u_1, \ldots, u_n) \qquad (u \in G,\ 1 \leqq i, j \leqq n,\ i \neq j)$$

mit $u_i = u$, $u_j = u^{-1}$, und $u_k = 1$, falls $k \neq i, j$.

$H_n(G)$ sei die Gruppe mit Erzeugenden

$$h_{ij}(u) \qquad (u \in G,\ 1 \leqq i, j \leqq n,\ i \neq j)$$

und folgenden definierenden Relationen:

H1 $\quad h_{ij}(u)\, h_{ji}(u) = 1,$

H2 $\quad h_{ij}(u)\, h_{ki}(u)\, h_{jk}(u) = 1,$

H3 $\quad h_{ij}(u)\, h_{ik}(v)\, h_{ij}(u)^{-1} = h_{ik}(uv)\, h_{ik}(u)^{-1}$ falls $j \neq k$,

H4 $\quad h_{ij}(u)\, h_{kj}(v)\, h_{ij}(u)^{-1} = h_{kj}(vu)\, h_{kj}(u)^{-1}$ falls $i \neq k$,

H5 $\quad [h_{ij}(u), h_{kl}(v)] = 1$ falls $i \neq k, l; j \neq k, l$.

(Im Fall $n = 3$ ist H5 leer.) Es ist leicht zu sehen: Durch $h_{ij}(u) \mapsto d_{ij}(u)$ erhält man einen Gruppenepimorphismus $\pi_n: H_n(G) \to D_n(G)$.

Definition. Eine Gruppenerweiterung $\pi: H \to D_n(G)$ heiße *vom Typ* $\mathfrak{H}_n(G)$, wenn sie Quotient von π_n ist, wenn also die Gruppe H Erzeugende $h_{ij}(u)$ $(u \in G,\ 1 \leqq i, j \leqq n,\ i \neq j)$ mit $\pi(h_{ij}(u)) = d_{ij}(u)$ besitzt, für die die Relationen H1—H5 gelten.

Beispiel. Sei D ein Schiefkörper, $G = D^*$. Für $n \geqq 3$ sei H_n das Urbild der Diagonalmatrizen $D_n \subseteqq SL_n(D)$ in der Steinberg-Gruppe $St_n(D)$. Die Einschränkung der Überlagerungsabbildung $St_n(D) \to SL_n(D)$ auf H_n ist dann vom Typ $\mathfrak{H}_n(D^*)$, ([15], 9.4, 9.10), wobei zusätzlich gilt (l. c., 9.8):

H0 $\quad h_{ij}(u)\, h_{ij}(1-u) = h_{ij}(u - u^2) \qquad (u \neq 1).$

Es wird sich herausstellen, daß in diesem Fall die Gruppe H_n durch die Relationen H0, H1, ..., H5 präsentiert wird.

In diesem Abschnitt stellen wir die für das Rechnen in Erweiterungen vom Typ $\mathfrak{H}_n(G)$ — und damit in der Steinberg-Gruppe $St_n(D)$ zu einem Schiefkörper D — wichtigen Sachverhalte zusammen und geben im Anschluß die Beweise.

Sei also im folgenden stets $\pi: H \to D_n(G)$ eine Erweiterung vom Typ $\mathfrak{H}_n(G)$. Wir schreiben $c_{ij}(u, v) := h_{ij}(u)\, h_{ij}(v)\, h_{ij}(vu)^{-1}$ für $u, v \in G$, $1 \leqq i, j \leqq n$, $i \neq j$.

Proposition 2. 1. *Für $j \neq k$ gilt $c_{ij}(u, v) = c_{ik}(u, v)$.*

Wir schreiben daher $c_i(u, v) := c_{ij}(u, v)$ und nennen die in H durch alle $c_i(u, v)$ erzeugte Untergruppe U_i $(1 \leqq i \leqq n)$. Folgendes ist klar: Bezeichnet $d_i: G \to G^n$ die Einbettung von G auf die i-te Komponente, so gilt

$$\pi\big(c_i(u, v)\big) = d_i([u, v]), \quad \pi(U_i) = d_i(G^1).$$

Proposition 2. 2. i) *Für die Elemente $c_i(u, v)$ gelten in H die Relationen* U1, U2 (*und damit alle Folgerelationen, cf. Abschnitt* 1), *die Einschränkung π_i von π auf U_i definiert also eine Erweiterung vom Typ $\mathfrak{U}(G)$.*

ii) *In H gelten folgende Relationen*:

H6 $$h_{ik}(u)\, h_{ik}(v) = h_{ik}(uv)\, c_k(u, v),$$

H7 $$c_k(u, v)\, h_{ik}(w) = h_{ik}(w)\, c_k({}^w u, {}^w v),$$

H8 $$h_{ik}(u)\, h_{jk}(v) = h_{jk}(v)\, h_{ik}(u)\, c_k(u, v) \qquad (i \neq j),$$

H9 $$h_{ij}(u)\, c_k(u, v) = c_k(u, v)\, h_{ij}(u) \qquad (k \neq i, j).$$

Bemerkung. Es ist zweckmäßig, auch die folgenden Relationen zur Verfügung zu haben, die aus H6, H7, H8 unter Benutzung von $h_{ij}(u)^{-1} = h_{ji}(u)$ (H1) und $c_i(u, v)^{-1} = c_i(v, u)$ (U5) hervorgehen:

H6′ $$h_{ik}(u)\, h_{ik}(v) = c_i(u, v)\, h_{ik}(vu),$$

H7′ $$h_{ik}(u)\, c_i(v, w) = c_i({}^u v, {}^u w)\, h_{ik}(u),$$

H8′ $$h_{ij}(u)\, h_{ik}(v) = c_i(u, v)\, h_{ik}(v)\, h_{ij}(u).$$

Es ist klar, daß H9 aus H7, H7′ folgt unter Benutzung von H1, H2.

Für $i \in \{1, \ldots, m\}$ bezeichne $\iota_i: U(G) \to U_i$ den nach Prop. 2. 2 i) existierenden Epimorphismus.

Proposition 2. 3. i) *In H gelten folgende Relationen*:

H10 $$h_{ij}([u, v]) = c_i(u, v)\, c_j(u, v)^{-1},$$

H11 $$h_{ij}(\pi_G \xi)\, \iota_j(\xi)\, h_{ij}(\pi_G \eta)\, \iota_j(\eta) = h_{ij}(\pi_G \xi\eta)\, \iota_j(\xi\eta) \qquad (\xi, \eta \in U(G)),$$

H12 $$\iota_i(\xi) = h_{ij}(\pi_G \xi)\, \iota_j(\xi) \qquad (\xi \in U(G)).$$

ii) *Zu jedem $k \in \{1, \ldots, n\}$ existiert für $h \in H$ eine Normalform*

$$h = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} h_{ik}(u_i)\, \xi$$

mit eindeutig bestimmten $u_i \in G$, $\xi \in U_k$, insbesondere ist $\operatorname{Kern} \pi \subseteqq U_k$, *also* $\operatorname{Kern} \pi = \operatorname{Kern} \pi_k$, *und* $\operatorname{Kern} \pi$ *ist zentral in H.*

iii) *Auf H operiert die symmetrische Gruppe $\mathfrak{S}_n$ vermöge*

$${}^\sigma h_{ij}(u) := h_{\sigma(ij)}(u)$$

für $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ $\big(\sigma(ij) := \sigma i\, \sigma j\big)$. Für $\xi \in \operatorname{Kern} \pi$ ist ${}^\sigma \xi = \xi$.

Es sei an dieser Stelle bemerkt, daß ein Teil der hier behaupteten Aussagen in der Steinberg-Gruppe eines Schiefkörpers D — um die es in dieser Arbeit im wesentlichen geht — a fortiori klar ist (beispielsweise die Operation der $\mathfrak{S}_n$ etc., cf. [15]). Unser Ziel ist jedoch, „um" eine geeignete Erweiterung $\pi: U \to [D^*, D^*]$ vom Typ $\mathfrak{U}(D^*)$ „herum" eine Erweiterung der $SL_n(D)$ zu konstruieren, die homomorphes Bild der Steinberg-Gruppe ist. Dazu wird im Abschnitt 3 die Gruppe U zunächst eingebettet in eine Erweiterung $H \to D_n(D^*)$ vom Typ $\mathfrak{H}_n(D^*)$, auf die dann im weiteren Verlauf des Beweises die hier aufgeführten Aussagen angewandt werden.

Für den Beweis unserer obigen Behauptungen nehmen wir zunächst an, Prop. 2. 1 und 2. 2 seien bereits gezeigt, und folgern hieraus Prop. 2. 3:

i) Mehrfaches Anwenden von H6, H6' ergibt

$$\begin{aligned} h_{ij}([u, v]) &= c_i(uv, u^{-1} v^{-1})\, c_i(u^{-1}, v^{-1})\, h_{ij}(v^{-1})\, h_{ij}(u^{-1})\, h_{ij}(u)\, h_{ij}(v)\, c_j(v, u) \\ &= c_i(uv, u^{-1} v^{-1})\, c_i(u^{-1}, v^{-1})\, c_i(u^{-1}, u)\, c_i(v^{-1}, v)\, c_j(v, u), \end{aligned}$$

letzteres nach H6', H7' und U10, U4.

Nach Abschnitt 1 ist

$$\begin{aligned} c_i(uv, u^{-1} v^{-1}) &= {}^{u}c_i(v, u^{-1})\, c_i(v, v^{-1})\, c_i(u, u^{-1})\, {}^{u^{-1}}c_i(u, v^{-1}) \\ &= c_i(u, v)\, c_i(v, v^{-1})\, c_i(u, u^{-1})\, c_i(v^{-1}, u^{-1}), \end{aligned}$$

damit folgt H10.

Für $\xi, \eta \in U(G)$ ist

$$\begin{aligned} h_{ij}(\pi_G \xi)\, \iota_j(\xi)\, h_{ij}(\pi_G \eta)\, \iota_j(\eta) &= h_{ij}(\pi_G \xi)\, h_{ij}(\pi_G \eta)\, {}^{\pi_G \eta}\iota_j(\xi)\, \iota_j(\eta) && \text{nach H7} \\ &= h_{ij}(\pi_G \xi \eta)\, c_j(\pi_G \xi, \pi_G \eta)\, \iota_j(\eta)\, \iota_j(\xi) && \text{nach H6, U7} \\ &= h_{ij}(\pi_G \xi \eta)\, \iota_j(\xi \eta) && \text{nach U10,} \end{aligned}$$

dies ist H11.

H12 folgt unmittelbar: Ist $\xi = \prod_{\rho=1}^{r} c(u_\rho, v_\rho) \in U(G)$, so ist

$$\prod_{\rho=1}^{r} c_i(u_\rho, v_\rho) = \prod_{\rho=1}^{r} \left(h_{ij}([u_\rho, v_\rho])\, c_j(u_\rho, v_\rho)\right) = h_{ij}\left(\prod_{\rho=1}^{r} [u_\rho, v_\rho]\right) \prod_{\rho=1}^{r} c_j(u_\rho, v_\rho).$$

ii) Aus H1, H2 folgt: H wird durch $h_{ik}(u)$ $(1 \leqq i \leqq n,\ i \neq k)$ erzeugt. Mit H6, H7, H8 erreicht man die Normalform, die Eindeutigkeit ergibt sich über das Bild unter π. Die Zentralität von Kern π folgt nun aus H7 und der Zentralität von Kern π_k in U_k.

iii) ist nun auch klar: Für $\xi \in \operatorname{Kern} \pi_G = \iota_i^{-1} \operatorname{Kern} \pi$ ist $\iota_i(\xi) = \iota_j(\xi)$ (H12).

Mit einigen Lemmata beweisen wir jetzt Prop. 2. 1, 2. 2.

Lemma 2. 1. *Es sei* $c_{ij}(u,v):=h_{ij}(u)\,h_{ij}(v)\,h_{ij}(vu)^{-1}$ *für* $u,v\in G$, $1\leqq i,\ j\leqq n,\ i\neq j$. *Dann gilt*:

(1) $c_{ij}(u,v)=c_{ij}(uvu,u^{-1})$,

(2) $c_{ij}(u,u^{-1})$ *ist zentral in* H,

(3) $h_{ij}(x)\,c_{ik}(u,v)\,h_{ij}(x)^{-1}=c_{ik}(u,x)^{-1}\,c_{ik}(u,xv)$ *für* $k\neq j$,

(4) $c_{ij}(u,v)^{-1}=c_{ij}(v,u)$,

(5) $c_{ij}(u,v)=[h_{ij}(u),h_{ik}(v)]$.

Beweis. Nach H1, H2, H3, H4 ist

$$^{h_{ij}(u)}h_{ij}(v)={}^{h_{kj}(u)\,h_{ik}(u)}h_{ij}(v)=h_{ij}(uvu)\,h_{ij}(u^2)^{-1},$$

also für $v=u^{-1}$:

$$h_{ij}(u^{-1})\,h_{ij}(u)^{-1}=h_{ij}(u^2)^{-1}, \tag{6}$$

die letzte Gleichung in die erste eingesetzt ergibt

$$h_{ij}(u)\,h_{ij}(v)=h_{ij}(uvu)\,h_{ij}(u^{-1}),$$

also (1).

Nach H3 (mit $u=v=1$) ist $h_{ij}(1)=1$, also ist

$$c_{ij}(u,u^{-1})=h_{ij}(u)\,h_{ij}(u^{-1}).$$

Ebenfalls nach H3 ist

$$^{c_{ij}(u,u^{-1})}h_{ik}(v)=h_{ik}(v),$$

und nach H4

$$^{c_{ij}(u,u^{-1})}h_{kj}(v)=h_{kj}(v);$$

mit H1, H2, H5 folgt (2).

(3) beweist man mit H3:

$$^{h_{ij}(x)}c_{ik}(u,v)=h_{ik}(xu)\,h_{ik}(x)^{-1}\,h_{ik}(xv)\,h_{ik}(xvu)^{-1}=c_{ik}(u,x)^{-1}\,c_{ik}(u,xv).$$

Setzt man hierin $v=u^{-1}$, so erhält man mit (2):

$$c_{ik}(u,u^{-1})=c_{ik}(u,x)^{-1}\,c_{ik}(u,xu^{-1}).$$

$x=u$ ergibt

$$c_{ik}(u,u^{-1})=c_{ik}(u,u)^{-1}, \tag{7}$$

und $x=u^{-1}$ liefert

$$\begin{aligned} c_{ik}(u,u^{-1})^2 &= c_{ik}(u,u^{-2})=h_{ik}(u)\,h_{ik}(u^{-2})\,h_{ik}(u^{-1})^{-1} \\ &= h_{ik}(u)\,h_{ik}(u^{-1})\,h_{ik}(u)^{-1}\,h_{ik}(u^{-1})^{-1} && \text{nach (6)} \\ &= 1 && \text{nach (2).} \end{aligned} \tag{8}$$

Demnach ist

$$c_{ik}(u, u) = c_{ik}(u, u)^{-1} = c_{ik}(u, u^{-1}),$$

und für $k \neq j$ wird

$$\begin{aligned} c_{ik}(u, v)^{-1} &= {}^{h_{ij}(v)}c_{ik}(u, v^{-1}) && \text{nach (3)} \\ &= {}^{h_{ij}(v)}c_{ik}(v, v^{-1}uv^{-1}) && \text{nach (1)} \\ &= c_{ik}(v, v)^{-1}\, c_{ik}(v, uv^{-1}) && \text{nach (3)} \\ &= c_{ik}(v, v^{-1})^{-1}\, c_{ik}(v, uv^{-1}) && \text{nach (7), (8)} \\ &= c_{ik}(v, u) && \text{nach (3), (2).} \end{aligned}$$

Damit gilt (4).

Nach H 3 ist für $j \neq k$

$$[h_{ij}(u), h_{ik}(v)] = h_{ij}(u)\, h_{ij}(v)\, h_{ij}(vu)^{-1},$$

dies ist (5) und das Lemma ist bewiesen.

Aus (4) und (5) ergibt sich Prop. 2. 1:

$$c_{ij}(u, v) = c_{ij}(v, u)^{-1} = [h_{ij}(v), h_{ik}(u)]^{-1} = [h_{ik}(u), h_{ij}(v)] = c_{ik}(u, v).$$

H 6′, H 8′ und — vermöge (4) — H 6 und H 8 resultieren hieraus ebenfalls. Die restlichen Behauptungen aus Prop. 2. 2 folgen aus

Lemma 2. 2. *In H gelten die Relationen*

(9) $$h_{ij}(x)\, c_i(u, v)\, h_{ij}(x)^{-1} = c_i(xu, v)\, c_i(x, v)^{-1}$$

(10) $$h_{ij}(x)\, c_i(u, v)\, h_{ij}(x)^{-1} = c_i({}^xu, {}^xv),$$

und die Elemente $c_i(u, v)$ erfüllen U 1, U 2.

Beweis. Da H 6 bereits bewiesen ist, haben wir für $j \neq i, k$ (mit H 1):

$$\begin{aligned} {}^{h_{ij}(x)}c_i(u, v) &= {}^{h_{ij}(x)}h_{ik}(uv)\, h_{ik}(u)^{-1}\, h_{ik}(v)^{-1} \\ &= h_{ik}(xuv)\, h_{ik}(xu)^{-1}\, h_{ik}(x)\, h_{ik}(xv)^{-1} && \text{nach H 3} \\ &= c_i(xu, v)\, c_i(x, v)^{-1} && \text{nach H 6,} \end{aligned}$$

also (9).

Wir zeigen nun zunächst U 2: Für $k \neq i, j$ ist nach (5)

$$\begin{aligned} c_i(u, vw) &= [h_{ij}(u), h_{ik}(vw)] \\ &= [h_{ij}(u), c_i(v, w)\, h_{ik}(w)\, h_{ik}(v)] && \text{nach H 6}' \\ &= [h_{ij}(u), c_i(v, w)]^{c_i(v, w)} \big(c_i(u, w)^{h_{ik}(w)}\, c_i(u, v)\big) \end{aligned}$$

(dies folgt aus Kommutator-Identitäten)

$$\begin{aligned} &= c_i(uv, w)\, c_i(u, w)^{-1}\, c_i(u, w)\, c_i(wu, v)\, c_i(w, v)^{-1}\, c_i(v, w)^{-1} && \text{nach (9)} \\ &= c_i(uv, w)\, c_i(wu, v), \end{aligned}$$

mit (4) folgt U 2.

Setzen wir in der zuletzt bewiesenen Formel $u = {}^x y$, $v = x$, $w = zx^{-1}$, so erhalten wir

$$\begin{aligned} c_i({}^x y, {}^x z) &= c_i(xy, zx^{-1})\, c_i(zyx^{-1}, x) \\ &= c_i(xy, z)^{h_{ij}(z)} \left(c_i(xy, x^{-1})\, c_i(yx^{-1}, x)\right) c_i(z, x) && \text{nach (3), (9)} \\ &= c_i(xy, z)\, c_i(z, x) && \text{nach U2} \\ &= h_{ij}(x)\, c_i(y, z)\, h_{ij}(x)^{-1} && \text{nach (9), (4).} \end{aligned}$$

Damit ist (10) bewiesen. Ein Vergleich von (9) mit (10) liefert U1.

3. Einbettung von Erweiterungen vom Typ $\mathfrak{U}(G)$ in solche vom Typ $\mathfrak{H}_n(G)$

In diesem Abschnitt zeigen wir, daß zu einer gegebenen Erweiterung $\pi: U \to G^1$ vom Typ $\mathfrak{U}(G)$ für $n \geqq 3$ eine Erweiterung $\pi_n: H_n \to D_n(G)$ vom Typ $\mathfrak{H}_n(G)$ existiert, die „π fortsetzt", was hier folgendes heißt:

Es sei für $k \in \{1, \ldots, n\}$ die Abbildung $\iota_k: G^1 \to D_n(G)$ die Injektion auf die k-te Komponente, also

$$\iota_k(u) := (u_1, \ldots, u_n) \quad \text{mit} \quad u_k = u,\ u_i = 1, \quad \text{falls} \quad i \neq k.$$

π_n setzt dann π fort, wenn für jedes $k \in \{1, \ldots, n\}$ durch die Zuordnung

$$U \ni c(u, v) \mapsto c_k(u, v) \in H_n$$

ein Monomorphismus $\bar{\iota}_k: U \to H_n$ definiert wird, so daß die folgenden Diagramme ($k \in \{1, \ldots, n\}$) kommutieren:

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\pi} & G^1 \\ \downarrow{\scriptstyle \bar{\iota}_k} & & \downarrow{\scriptstyle \iota_k} \\ H_n & \xrightarrow{\pi_n} & D_n(G) \end{array}$$

Prop. 2. 3 iii) impliziert, daß es genügt, den Monomorphismus $\bar{\iota}_k$ für ein k zu haben; wegen der Symmetrie hat man ihn dann für alle. Wir haben also eine Gruppe H_n zu konstruieren, die ein isomorphes Bild von U in passender Weise enthält. Dazu bedienen wir uns einer Methode, die in [12], § 3 in einer ähnlichen Situation angewandt wurde.[3]

Es sei S die Menge aller Symbole $h_i(u)$ $(1 \leqq i \leqq n-1,\ u \in G)$ und $\underline{\xi}$ $(\xi \in U$, wir schreiben $\underline{c}(u, v)$ für $\underline{c(u, v)})$. M sei das (assoziative) Monoid aller Wörter aus Elementen aus S. Das leere Wort ist das Einselement, wir bezeichnen es mit $\mathbf{1}$.

Definition. Sind $A = A_0 A_1 A_2$, $A' = A_0 A_1' A_2$ zwei aus je drei Teilwörtern zusammengesetzte Wörter aus M, so nennen wir A' *aus A entstanden durch die Substitution* $A_1 \to A_1'$. Für $A, B \in M$ gelte $A > B$ genau dann, wenn B aus A hervorgeht durch eine

[3]) In einer früheren Fassung des Beweises ([17]) sind wir hier anders vorgegangen. (Cf. Lemma 3. 5.) Nach einem Vorschlag von Herrn W. v. d. Kallen, Utrecht, benutzen wir das hier beschriebene Verfahren, wodurch der Beweis nicht kürzer, aber möglicherweise durchsichtiger wird.

„zulässige“ Substitution, d.i. die Komposition einer endlichen Folge (positiver Länge) folgender Substitutionen (die „elementar“ heißen mögen):

(1)	$h_i(1) \to \mathbf{1}$	$(1 \in G, 1 \leqq i \leqq n-1)$,
(2)	$\underline{1} \quad \to \mathbf{1}$	$(1 \in U)$,
(3)	$\underline{\xi}\,\underline{\eta} \quad \to \underline{\xi\eta}$	$(\xi, \eta \in U)$,
(4)	$h_i(u)\, h_i(v) \to h_i(uv)\, \underline{c}(u, v)$	$(u, v \in G, 1 \leqq i \leqq n-1)$,
(5)	$h_i(u)\, h_j(v) \to h_j(v)\, h_i(u)\, \underline{c}(u, v)$	$(u, v \in G, 1 \leqq j < i \leqq n-1)$,
(6)	$\underline{\xi}\, h_i(u) \quad \to h_i(u)\, \underline{{}^u\xi}$	$(\xi \in U, u \in G, 1 \leqq i \leqq n-1)$.

Die Ziffer $(*)$ $(* \in \{1, \ldots, 6\})$ heiße der *Typ der Substitution.*

Lemma 3. 1. i) $>$ *ist Halbordnung auf* M.

ii) *Zu* $A \in M$ *ist die Menge* $\{B \in M \mid A > B\}$ *endlich.*

iii) *Die Menge* M_0 *der in* M *bezüglich* $>$ *minimalen Elemente besteht genau aus den Wörtern der Form*

$$\mathbf{1}, \underline{\xi} \quad (\xi \in U - \{1\}), \quad \textit{und} \quad h_{i_1}(u_1) \cdots h_{i_k}(u_k)\, a$$

mit $1 \leqq i_1 < \cdots < i_k \leqq n-1$, $u_\varkappa \in G - \{1\}$ *für* $1 \leqq \varkappa \leqq k$ *und* $a = \mathbf{1}$ *oder* $a = \underline{\xi}$ $(\xi \in U - \{1\})$.

iv) *Zu jedem* $A \in M - M_0$ *existiert genau ein* $B \in M_0$ *mit* $A > B$.

Beweis. Für ein Wort $A = a_1 \cdots a_l$ $(a_\lambda \in S$ für $1 \leqq \lambda \leqq l)$ definieren wir

$S(A) := \{a \in S \mid a = a_\lambda$ für ein $\lambda \in \{1, \ldots, l\}\}$,

$r_1(A) := l + 2 \# \{(a_\varkappa, a_\lambda) \in S(A)^2 \mid \varkappa < \lambda,\ a_\varkappa = h_i(u),\ a_\lambda = h_j(v),\ i \geqq j\}$,

$r_2(A) := \# \{(a_\varkappa, a_\lambda) \in S(A)^2 \mid \varkappa < \lambda,\ a_\varkappa = \underline{\xi},\ a_\lambda = h_i(u)\}$.

Man sieht leicht: geht B aus A hervor durch eine zulässige Substitution, so ist $r_1(A) > r_1(B)$ oder $r_1(A) = r_1(B)$ und $r_2(A) > r_2(B)$ (der letzte Fall tritt genau dann auf, wenn nur elementare Substitutionen vom Typ (6) benötigt werden). Folglich kann nicht gleichzeitig $A > B$ und $B > A$ gelten. Damit ist i) gezeigt, ii), iii) sind nicht schwer zu verifizieren.

iv) Wie üblich schreiben wir $A \geqq B$, falls $A > B$ oder $A = B$. Wir zeigen: *Die Halbordnung* $\geqq$ *besitzt die Church-Rosser-Eigenschaft* (cf. [12], 3. 6): *Zu* $A, B, C \in M$ *mit* $A \geqq B$, $A \geqq C$ *existiert* $D \in M$ *mit* $B \geqq D$, $C \geqq D$. Hieraus folgt iv) ohne weiteres.

Kann man die Existenz von D für den Fall zeigen, daß B und C aus A je durch eine elementare Transformation hervorgehen, so folgt die Behauptung allgemein durch Induktion nach $\# \{B \in M \mid A > B\}$ (für $A \in M_0$ ist sie natürlich klar).

Nehmen wir also an, B und C gingen aus A je durch eine elementare Substitution hervor. Werden zwei disjunkte Wörter substituiert, oder ist eine der Substitutionen vom Typ (1) oder (2), so liegt die Existenz von D auf der Hand. Wir dürfen also davon ausgehen, daß beide Substitutionen sich in einem Unterwort aus drei Buchstaben abspielen und vom Typ (3), (4), (5) oder (6) sind. Daher darf A selbst als Wort aus drei Buchstaben angesehen werden.

Nach dem Vorbild von [12] deuten wir etwa im Fall $A \geqq B$ durch

$$A - 4 - 6 - 4 - 3 - B$$

an, daß das Wort A durch die Folge elementarer Substitutionen der Typen (4), (6), (4), (3) in das Wort B übergeführt werden kann, dabei kann die Ziffer 3 oder 6 auch für eine Folge aus mehreren Transformationen des Typs (3) oder (6) stehen. Es können — abgesehen vom trivialen Fall $A = \xi\eta\zeta$ — 7 Ausgangssituationen auftreten:

I. $A = \xi\eta h_i(u)$.

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & B - 6 - B_0 \\ A \arrow[ur, dash, "3"] \arrow[dr, dash, "6"'] & \\ & C - 6 - 3 - C_0 \end{tikzcd}$$

Es ist $B_0 = h_i(u)\,\underline{{}^u(\xi\eta)}$, $C_0 = h_i(u)\,\underline{{}^u\xi\,{}^u\eta}$, die Gleichheit beider Wörter liegt auf der Hand, also $D := B_0 = C_0$.

II. $A = h_i(u)\,h_i(v)\,h_i(w)$.

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & B - 6 - 4 - 3 - B_0 \\ A \arrow[ur, dash, "4"] \arrow[dr, dash, "4"'] & \\ & C - 4 - 3 - C_0 \end{tikzcd}$$

Für $B_0 = C_0$ hat man in U die Identität

$$c(uv, w)\,{}^w c(u, v) = c(u, vw)\,c(v, w)$$

zu beweisen, was nicht schwer ist.

III. $A = h_i(u)\,h_i(v)\,h_j(w)$, $i > j$.

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & B - 6 - 5 - 3 - B_0 \\ A \arrow[ur, dash, "4"] \arrow[dr, dash, "5"'] & \\ & C - 5 - 6 - 4 - 3 - C_0 \end{tikzcd}$$

In U ist zu zeigen:

$$c(uv, w)\,{}^w c(u, v) = c(u, v)\,{}^v c(u, w)\,c(v, w).$$

IV. $A = h_i(u)\,h_j(v)\,h_j(w)$, $i > j$.

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & B - 6 - 5 - 4 - 6 - 3 - B_0 \\ A \arrow[ur, dash, "5"] \arrow[dr, dash, "4"'] & \\ & C - 5 - 3 - C_0 \end{tikzcd}$$

In U ist zu zeigen:

$${}^u c(v, w)\,c(u, w)\,{}^w c(u, v) = c(u, vw)\,c(v, w).$$

V. $A = h_i(u)\, h_j(v)\, h_k(w),\ i > j > k.$

$$\begin{array}{lll} & & B - 6 - 5 - 5 - 6 - 3 - B_0 \\ & \diagup\, 5 & \\ A & & \\ & \diagdown\, 5 & \\ & & C - 5 - 6 - 5 - 3 - C_0 \end{array}$$

In U ist zu zeigen:

$$^{u}c(v, w)\, c(u, w)\, ^{w}c(u, v) = c(u, v)\, ^{v}c(u, w)\, c(v, w).$$

VI. $A = \underline{\xi}\, h_i(u)\, h_i(v).$

$$\begin{array}{lll} & & B - 6 - 4 - 3 - B_0 \\ & \diagup\, 6 & \\ A & & \\ & \diagdown\, 4 & \\ & & C - 6 - 3 - C_0 \end{array}$$

In U ist zu zeigen:

$$c(u, v)\, ^{vu}\xi = {}^{uv}\xi\, c(u, v).$$

VII. $A = \underline{\xi}\, h_i(u)\, h_j(v),\ i > j.$

$$\begin{array}{lll} & & B - 6 - 5 - 3 - B_0 \\ & \diagup\, 6 & \\ A & & \\ & \diagdown\, 5 & \\ & & C - 6 - 3 - C_0 \end{array}$$

In U ist das gleiche zu zeigen wie in VI.

Damit ist Lemma 3. 1 vollständig bewiesen.

Korollar. *Ordnet man jedem Paar (A, B) von Wörtern aus M_0 das nach* 3. 1 iv) *eindeutig bestimmte Element $C \in M_0$ mit $AB \geqq C$ zu, so wird M_0 mit dieser Verknüpfung $(A, B) \mapsto C$ zu einer Gruppe, die ein isomorphes Bild von U (bestehend aus* **1** *und $\underline{\xi}$ mit $\xi \in U$) enthält.*

Beweis. Das Assoziativgesetz ist klar; das Inverse des Elementes

$$h_{i_1}(u_1) \cdots h_{i_k}(u_k)\, \underline{\xi} \in M_0 \qquad (1 \leqq i_1 < \cdots < i_k \leqq n-1)$$

erhält man im minimalen unter

$$\underline{\xi}^{-1} h_{i_k}(u_k^{-1}) \cdots h_{i_1}(u_1^{-1})\, \underline{c}(u_1, u_1) \cdots \underline{c}(u_k, u_k) \in M$$

liegenden Element. Die Aussage über U ist ebenfalls offensichtlich. q.e.d.

Die im Korollar definierte Gruppe nennen wir H_n, wir definieren hilfsweise $h_n(u) := 1 \in H_n$ für alle $u \in G$ und hiermit

$$h_{ij}(u) := h_j(u)^{-1}\, h_i(u) \qquad (1 \leqq i,\ j \leqq n,\ i \neq j;\ u \in G).$$

Lemma 3. 2. *In H_n gelten für die Elemente $h_{ij}(u)$ die Relationen* H1—H5, *H_n ist also eine Erweiterung von $D_n(G)$ vom Typ $\mathfrak{H}_n(G)$. Es ist ferner*

$$\underline{c}(u, v) = h_{nj}(u)\, h_{nj}(v)\, h_{nj}(vu)^{-1},$$

die in 2. 3 ii) *definierte Abbildung $\iota_n: U(G) \to U_n \subseteqq H_n$ induziert also einen Isomorphismus $U \xrightarrow{\sim} U_n$.*

Beweis. In H_n gelten, abgesehen von den Relationen in U, noch die folgenden, die den oben definierten elementaren Substitutionen entsprechen:

$$h_i(u)\, h_i(v) = h_i(uv)\, c(u, v), \tag{4}$$

$$h_i(u)\, h_j(v) = h_j(v)\, h_i(u)\, c(u, v), \tag{5}$$

$$\xi h_i(u) = h_i(u)^u \xi. \tag{6}$$

(Auf die Unterstreichung der Elemente aus U verzichten wir von jetzt an der Einfachheit halber.) In (5) kann die Einschränkung $j < i$ aus Symmetriegründen verschwinden.

Weisen wir nun die Relationen H1—H5 nach. H1, H2 sind unmittelbar klar. Weiter ist nach (4), (5), (6)

$$h_i(u)\, h_j(v)\, h_i(u)^{-1} = h_j(v)\, h_i(u)\, c(u, v)\, h_i(u)^{-1} = h_j(v)\, c(v, u^{-1})$$

$$h_j(vu)\, h_j(u)^{-1} = h_j(vu)\, h_j(u^{-1})\, c(u, u) = h_j(v)\, c(vu, u^{-1})\, c(u, u),$$

also:

$$h_i(u)\, h_j(v)\, h_i(u)^{-1} = h_j(vu)\, h_j(u)^{-1}. \tag{7}$$

Eine ähnliche Rechnung ergibt

$$h_i(u)^{-1}\, h_j(v)^{-1}\, h_i(u) = h_j(uv)^{-1}\, h_j(u). \tag{8}$$

Aus (7) folgt für $i \neq j, k$ und $n \neq j, k$:

$$h_i(u)\, h_{jk}(v)\, h_i(u)^{-1} = c(u^{-1}, v)\, h_k(v)^{-1}\, h_j(v)\, c(v, u^{-1}),$$

also gilt mit (6)

$$h_i(u)\, h_{jk}(v)\, h_i(u)^{-1} = h_{jk}(v). \tag{9}$$

Aus (9) folgt ohne weiteres H5.

H3 ist für $i = n$ bereits in (8) gezeigt; für $i, k \neq n$ ist

$$\begin{aligned} h_i(u)\, h_{ik}(v)\, h_i(u)^{-1} &= h_i(u)\, h_k(v^{-1})\, h_i(v)\, h_i(u^{-1})\, c(u, u)\, c(v, v) \\ &= h_k(v^{-1})\, h_i(u)\, c(u, v^{-1})\, h_i(vu^{-1})\, c(v, u^{-1})\, c(u, u)\, c(v, v) \\ &= h_k(v^{-1})\, h_i(uvu^{-1})\, c(u, vu^{-1})\, c(u, u)\, c(v, v) \\ &= h_k(v)^{-1}\, h_i(uvu^{-1})\, c(u, v) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} h_{ik}(uv)\, h_{ik}(u)^{-1} &= h_k(v^{-1}u^{-1})\, h_i(uv)\, h_i(u^{-1})\, h_k(u)\, c(uv, uv)\, c(u, u) \\ &= h_k(v^{-1}u^{-1})\, h_i(uvu^{-1})\, c(uv, u^{-1})\, h_k(u)\, c(v, v) \\ &= h_k(v^{-1}u^{-1})\, h_k(u)\, h_i(uvu^{-1})\, c(uvu^{-1}, u)\, c(u, uv)\, c(v, v) \\ &= h_k(v)^{-1}\, c(v^{-1}u^{-1}, u)\, h_i(uvu^{-1})\, c(u, u) \\ &= h_k(v)^{-1}\, h_i(uvu^{-1})\, c(uv, u^{-1})\, c(u, u). \end{aligned}$$

Vergleich der beiden Rechnungen zeigt

$$h_i(u)\, h_{ik}(v)\, h_i(u)^{-1} = h_{ik}(uv)\, h_{ik}(u)^{-1}.$$

Mit (9) folgt hieraus H3 ganz allgemein.

H4 zeigt man durch eine analoge Rechnung mit Hilfe von (7), und die restlichen Behauptungen in Lemma 3. 2 liegen auf der Hand.

Lemma 3. 3. *Es sei $n \geqq 3$ und $\tau: \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n+1\}$ eine injektive Abbildung, H_n und H_{n+1} seien die nach dem obigen Verfahren zu U konstruierten Erweiterungen vom Typ $\mathfrak{H}_n(G)$ bzw. $\mathfrak{H}_{n+1}(G)$. Dann wird durch*

$$H_n \ni h_{ij}(u) \xrightarrow{\tau_*} h_{\tau i, \tau j}(u) \in H_{n+1}$$

ein Gruppenmonomorphismus definiert. Für Elemente aus dem Kern der Erweiterung H_n hängt das Bild unter τ_* nicht von τ ab.

Beweis. Für $\tau: i \mapsto i+1$ liefert die Konstruktion genau die Monomorphie-Eigenschaft, der Rest der Behauptung ergibt sich aus den Eigenschaften der Operation von $\mathfrak{S}_{n+1}$ auf H_{n+1} (vgl. 2. 3 iii)).

Aus der Konstruktion ergibt sich ferner: H_n läßt sich identifizieren mit der Menge $G^{n-1} \times U$, wobei $h_i(u) = h_{in}(u)$ mit $(u_1, \ldots, u_{n-1}, 1)$ $(u_i = u,\ u_j = 1$ für $j \neq i)$ und $\xi \in U$ mit $(1, \ldots, 1, \xi)$ gleichzusetzen ist. Die Normalform (bezüglich n) des Produktes zweier Elemente hängt von deren Normalform (bezüglich n) in folgender Weise ab:

$$(*) \qquad \prod_{i=1}^{n-1} h_i(u_i)\, \xi \prod_{i=1}^{n-1} h_i(v_i)\, \eta = \prod_{i=1}^{n-1} h_i(u_i v_i) \prod_{i=1}^{n-1} {}^{x_i}c\left(u_i, \prod_{j=i}^{1} v_j\right)^{y} \xi \cdot \eta$$

mit $x_i := \prod_{j=n-1}^{i+1} u_j v_j$ falls $1 \leqq i \leqq n-2$, $x_{n-1} := 1 \in G$ und $y := \prod_{j=n-1}^{1} v_j$.

Ist nun G eine separierte topologische Gruppe und $\pi: U \to G^1$ topologische Erweiterung vom Typ $\mathfrak{U}(G)$, so erhält H_n über die Identifikation mit $G^{n-1} \times U$ eine Topologie, und die obige Formel zeigt die Stetigkeit der Multiplikation. Die Stetigkeit der Inversen-Bildung ist leicht nachzuweisen. Es gilt

Lemma 3. 4. *H_n ist separierte topologische Gruppe, $\pi_n: H_n \to D_n(G)$ ist stetig und offen.*

Zum Abschluß dieses Abschnitts wollen wir — ohne Beweis — noch ein Lemma formulieren, welches zeigt, wie aus der Gruppe H_n die Gruppe H_{n+1} induktiv konstruiert werden kann. Dies ermöglicht einen von der oben verwendeten Methode unabhängigen, rein gruppentheoretischen Beweis für die Existenz der Erweiterungen $\pi_n: H_n \to D_n(G)$ als Fortsetzung von $\pi: U \to G^1$, indem man H_3 explizit angibt als Menge $G^2 \times U$ mit der Multiplikation $(*)$, für die das Assoziativgesetz nachzuweisen ist (cf. [17], Lemma 3. 4).

Für $n \geqq 3$ betrachten wir die nach Lemma 3. 3 existierenden monomorphen Abbildungen $\tau_*^1, \tau_*^n: H_n \to H_{n+1}$ zu den durch $\tau^1(i) = i$, $\tau^n(i) = i+1$ definierten Injektionen $\{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n+1\}$. H_{n+1} wird von $\tau_*^1(H_n)$, $\tau_*^n(H_n)$ erzeugt. Sei

$$V := \tau_*^1(H_n) \cap \tau_*^n(H_n) < H_{n+1}.$$

Dann ist H_{n+1} homomorphes Bild des amalgamierten Produktes

$$\hat{H} := \tau_*^1(H_n) *_V \tau_*^n(H_n)$$

von $\tau_*^1(H_n)$, $\tau_*^n(H_n)$ bezüglich der gemeinsamen Untergruppe V. Genauer gilt

Lemma 3. 5. *Der Kern des kanonischen Homomorphismus*

$$\hat{H} = \tau_*^1(H_n) *_V \tau_*^n(H_n) \to H_{n+1}$$

wird — als Untergruppe — erzeugt durch die Menge

$$\{[h_{12}(u), h_{n,n+1}(v)] \mid u, v \in G\}.$$

4. Zentrale Erweiterungen von $SL_n(D)$

Es sei D ein Schiefkörper mit der multiplikativen Gruppe D^*, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqq 3$.

Definition. i) Eine Gruppenerweiterung $\pi: U \to [D^*, D^*]$ vom Typ $\mathfrak{U}(D^*)$ heiße *algebraisch*, wenn in U die Relationen

U0 $\quad c(u, 1-u) = 1 \qquad (u, 1-u \in D^*)$

erfüllt sind. U_D sei die „universelle“ algebraische Erweiterung vom Typ $\mathfrak{U}(D^*)$, also die Gruppe mit Erzeugenden $c(u, v)$ $(u, v \in D^*)$ und definierenden Relationen U0, U1, U2.

ii) Eine Gruppenerweiterung $\pi: H \to D_n(D^*)$ vom Typ $\mathfrak{H}_n(D^*)$ heiße *algebraisch*, wenn in H die Relationen

H0 $\quad h_{ij}(u)\, h_{ij}(1-u) = h_{ij}(u-u^2) \qquad (1 \leqq i, j \leqq n,\ u, 1-u \in D^*)$

erfüllt sind.

Lemma 4. 1. i) *Ist $\pi: H \to D_n(D^*)$ algebraische Erweiterung vom Typ $\mathfrak{H}_n(D^*)$, so sind die nach Prop.* 2. 2 *zugehörigen Erweiterungen $U_k \to [D^*, D^*]$ algebraisch vom Typ $\mathfrak{U}(D^*)$.*

ii) *Ist $\pi: U \to [D^*, D^*]$ algebraische Erweiterung vom Typ $\mathfrak{U}(D^*)$, so sind die nach Lemma* 3. 1, *Korollar und Lemma* 3. 2 *zugehörigen Erweiterungen $H_n \to D_n(D^*)$ algebraisch vom Typ $\mathfrak{H}_n(D^*)$.*

Der Beweis besteht aus naheliegenden Rechnungen.

Das Ziel dieses Abschnittes ist der Nachweis, daß jede algebraische Erweiterung $\pi: U \to [D^*, D^*]$ vom Typ $\mathfrak{U}(D^*)$ sich einbetten läßt in eine zentrale Erweiterung der Gruppe $SL_n(D)$. Hierfür sind noch einige technische Vorbereitungen zu treffen:

Für eine Permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ bezeichne q_σ die entsprechende Permutationsmatrix in $GL_n(D)$. Jede monomiale Matrix $m \in GL_n(D)$ kann in eindeutiger Weise als Produkt $m = q_\sigma \cdot \operatorname{diag}(u_1, \ldots, u_n)$ einer Permutationsmatrix und einer Diagonalmatrix geschrieben werden.

Lemma 4. 2. *Sei $\pi: H \to D_n(D^*)$ Erweiterung vom Typ $\mathfrak{H}_n(D^*)$. Auf H operiert die Gruppe der monomialen Matrizen vermöge*

$${}^m h_{ij}(v) := h_{\sigma(ij)}(u_i v u_j^{-1})\, h_{\sigma(ij)}(u_i u_j^{-1})^{-1},$$

(wobei $m = q_\sigma \operatorname{diag}(u_1, \ldots, u_n)$) (und $\sigma(ij) := \sigma i\, \sigma j$) ist), hierbei bleibt Kern π *elementweise fest.*

Beweis. Gemäß Lemma 3.3 betten wir H mittels $h_{ij}(u) \to h_{ij}(u)$ ein in eine Erweiterung vom Typ $\mathfrak{H}_{n+1}(D^*)$. Die Relationen H1—H5 zeigen dann, daß der innere Automorphismus mit $\prod_{i=1}^{n} h_{i,n+1}(u_i)$ auf H den durch

$$h_{ij}(v) \to h_{ij}(u_i v u_j^{-1})\, h_{ij}(u_i u_j^{-1})^{-1}$$

beschriebenen Automorphismus induziert. Mit Prop. 2.3 ii), iii) ist dann klar, daß $h_{ij}(v) \mapsto {}^m h_{ij}(v)$ einen Automorphismus von H definiert, der Kern π elementweise fest läßt. Ist $m' = q_\tau \operatorname{diag}(w_1, \ldots, w_n)$ die Zerlegung der monomialen Matrix m', so ist

$$mm' = q_\sigma \operatorname{diag}(u_1, \ldots, u_n) q_\tau \operatorname{diag}(w_1, \ldots, w_n) = q_{\sigma\tau} \operatorname{diag}(u_{\tau(1)} w_1, \ldots, u_{\tau(n)} w_n)$$

und man verifiziert

$${}^m\big({}^{m'}h_{ij}(v)\big) = {}^{mm'}h_{ij}(v).$$

Damit ist Lemma 4.2 gezeigt.

Die Steinberg-Gruppe $St_n(R)$ eines assoziativen Ringes R mit 1 wird erzeugt durch Elemente

$$x_{ij}(u) \qquad (1 \leqq i, j \leqq n,\ i \neq j,\ u \in R)$$

und definierenden Relationen

$$\begin{aligned} &x_{ij}(u)\, x_{ij}(v) = x_{ij}(u+v), \\ &[x_{ij}(u), x_{jk}(v)] = x_{ik}(uv) \qquad (i \neq k), \\ &[x_{ij}(u), x_{kl}(v)] = 1 \qquad (i \neq l, j \neq k), \end{aligned}$$

und allgemein verwendet man die Abkürzungen

$$\begin{aligned} w_{ij}(u) &= x_{ij}(u)\, x_{ji}(-u^{-1})\, x_{ij}(u), \\ h_{ij}(u) &= w_{ij}(u)\, w_{ij}(-1) \end{aligned}$$

für Einheiten u aus R.

Der Gruppen-Epimorphismus $\phi_n : St_n(R) \to E_n(R)$ der Steinberg-Gruppe auf die elementar erzeugte Untergruppe $E_n(R)$ von $GL_n(R)$ ist definiert durch $\phi_n\big(x_{ij}(u)\big) = e_{ij}(u)$ (siehe Einleitung).

Das Bild von $h_{ij}(u)$ unter ϕ_n ist

$$d_{ij}(u) = \operatorname{diag}(u_1, \ldots, u_n) \qquad (u_i = u,\ u_j = u^{-1},\ u_k = 1 \quad \text{für} \quad k \neq i, j),$$

ferner ist $m_{ij}(u) := \phi_n\big(w_{ij}(u)\big)$ eine monomiale Matrix. Wir betrachten die beiden folgenden Untergruppen von $St_n(\mathbb{Z})$:

$$\begin{aligned} W_0 &:= \text{Erzeugnis aller } w_{ij}(1) \text{ in } St_n(\mathbb{Z}), \\ H_0 &:= \text{Erzeugnis aller } h_{ij}(-1) \text{ in } St_n(\mathbb{Z}). \end{aligned}$$

H_0 ist normal in W_0, und es gilt:

Lemma 4.3. *H_0 wird durch $h_i := h_{i,i+1}(-1)$ $(1 \leqq i \leqq n-1)$ erzeugt und durch folgende Relationen definiert:*

$$\begin{aligned} h_i^{-1} h_j h_i &= h_j h_i^2 \qquad \textit{falls} \quad |i-j| = 1, \\ h_i^{-1} h_j h_i &= h_j \qquad \textit{falls} \quad |i-j| \geqq 2. \end{aligned}$$

Beweis. In [15], § 10 wird bewiesen: Der Kern des Epimorphismus $St_n(\mathbb{Z}) \to E_n(\mathbb{Z})$ ist enthalten in H_0 und besteht aus zwei Elementen. Andererseits ist die durch die angegebenen Relationen präsentierte Gruppe zentrale Erweiterung des Bildes von H_0 in $E_n(\mathbb{Z})$ mit einer zweielementigen Gruppe. Dies ist in [13], Th. 6. 3 (c) bewiesen, läßt sich aber auch aus den Überlegungen der Abschnitte 1, 2, 3 folgern, wenn man dort $G = \{\pm 1\}$ nimmt.

Da in H_0 die angegebenen Relationen gelten, folgt die Behauptung.

Über den kanonischen Homomorphismus $St_n(\mathbb{Z}) \to St_n(D) \to SL_n(D)$ wird W_0 in die Gruppe der monomialen Matrizen in $SL_n(D)$ abgebildet. Ist also $\pi: H \to D_n(D^*)$ Erweiterung vom Typ $\mathfrak{H}_n(D^*)$, so operiert W_0 auf H vermöge Lemma 4. 2. Das Bild von $h \in H$ unter $w \in W_0$ sei ${}^w h$. Mit W^* bezeichnen wir das halbdirekte Produkt von H mit W_0, d.h. die Menge $H \times W_0$ mit der Multiplikation

$$(h, w)(h', w') = (h\,{}^w h', ww').$$

Lemma 4. 4 (vergleiche [13], Lemma 6. 6; [15], Lemma 12. 4, 12. 5). *Es sei $\pi: H \to D_n(D^*)$ Erweiterung vom Typ $\mathfrak{H}_n(D^*)$.*

i) *Es existiert ein Homomorphismus $j: H_0 \to H$ mit $j(h_i) = h_{i,i+1}(-1)$ für $1 \leqq i \leqq n-1$, und $J := \{(j(h), h^{-1}) \mid h \in H_0\}$ ist Normalteiler in W^*. Je nachdem, ob in H $c_1(-1, -1) \neq 1$ oder $= 1$ ist, ist Kern j trivial oder von der Ordnung 2 und enthält dann $h_1^2 \neq 1$.*

ii) *Die kanonische Projektion $W^* \to W := W^*/J$ ist injektiv auf H, W ist zentrale Erweiterung der Gruppe M der speziellen monomialen Matrizen in $SL_n(D)$ mit Kern π:*

$$1 \to \operatorname{Kern} \pi \to W \xrightarrow{\varphi} M \to 1.$$

Es gilt $\varphi(h_{ij}(u)) = d_{ij}(u)$, $\varphi(\bar{w}_{ij}) = m_{ij}(1)$ (wo $h_{ij}(u)$ (bzw. $\bar{w}_{ij}$) das kanonische Bild von $h_{ij}(u)$ (bzw. $w_{ij}(1)$) in W bezeichne).

Beweis. i) Für die Existenz von j hat man nur die in Lemma 4. 3 angegebenen Relationen für $h_{i,i+1}(-1)$ $(1 \leqq i \leqq n-1)$ in H nachzurechnen, was nicht schwierig ist.

Die Normalität von J folgt, wenn die Gleichungen

$${}^{h_0}h = j(h_0)\, h j(h_0)^{-1} \qquad (h_0 \in H_0, h \in H)$$

und

$${}^w j(h_0) = j(w h_0 w^{-1}) \qquad (w \in W_0, h_0 \in H_0)$$

bewiesen sind. Dies läßt sich aber fast unmittelbar aus der Definition der Operation von W_0 auf H (cf. Lemma 4. 2) herleiten. Die Aussage über den Kern von j folgt aus der Tatsache, daß Kern $(St_n(\mathbb{Z}) \to E_n(\mathbb{Z}))$ erzeugt wird durch $h_{12}(-1)^2$ und von der Ordnung 2 ist ([15], § 10).

ii) ist leicht zu sehen.

Wir benötigen noch

Lemma 4. 5. *Sei $\pi: H \to D_n(D^*)$ algebraische Erweiterung vom Typ $\mathfrak{H}_n(D^*)$, $w \in W$ mit $\varphi(w) = q_\sigma \operatorname{diag}(u_1, \ldots, u_n)$. Dann gilt:*

i) $$w h_{ij}(v)\, w^{-1} = h_{\sigma(ij)}(u_i v u_j^{-1})\, h_{\sigma(ij)}(u_i u_j^{-1})^{-1}$$

ii) $$w w_{ij}(1)\, w^{-1} = h_{\sigma(ij)}(u_i u_j^{-1})\, w_{\sigma(ij)}(1).$$

Beweis. i) folgt aus Lemma 4. 2.

ii) Wir konjugieren nach dem Vorbild von [15], Lemma 12. 5, Beweis $w_{ij}(1)$ mit einem Element $h \in W$ mit $\varphi(h) = \mathrm{diag}(u_1, \ldots, u_n)$. Zu $k \neq i, j$ benutzen wir die Normalform bzgl. k aus Prop. 2. 3 ii) und H6, H7, H8, um eine Darstellung

$$h = h_{ik}(u_i)\, h_{jk}(u_j)\, h'$$

mit $[h', w_{ij}(1)] = 1$ zu erhalten. Dann ist (mit H6, H7, H8, Prop. 2. 2)

$$\begin{aligned}
[h, w_{ij}(1)] &= h_{ik}(u_i)\, h_{jk}(u_j)\, h_{ik}(u_j)^{-1}\, h_{jk}(-1)\, h_{jk}(-u_i)^{-1} \\
&= h_{ik}(u_i)\, h_{ik}(u_j^{-1})\, h_{jk}(u_j)\, h_{jk}(u_i^{-1})\, c_k(-1, u_i^{-1})\, c_k(-u_i^{-1}, -u_i^{-1}) \\
&= h_{ik}(u_i u_j^{-1})\, c_k(u_i, u_j^{-1})\, h_{jk}(u_j u_i^{-1})\, c_k(u_j, u_i^{-1})\, c_k(u_i, -u_i) \\
&= h_{ik}(u_i u_j^{-1})\, h_{jk}(u_j u_i^{-1})\, c_k(u_i, -u_i) \\
&= h_{ij}(u_i u_j^{-1})\, c_k(u_i, -u_i).
\end{aligned}$$

Nun ist im Fall einer algebraischen Erweiterung $c_k(u, -u) = 1$ für alle $u \in D^*$ ([15], p. 95), und ii) folgt daher mit Lemma 4. 2.

Nach dem Vorbild des Beweises von Matsumoto [13] werden wir jetzt eine Erweiterung von $SL_n(D)$ konstruieren.

Mit T bezeichnen wir die Gruppe der strikten oberen Dreiecksmatrizen, M sei die Gruppe der monomialen Matrizen. Man hat eine disjunkte Zerlegung

$$SL_n(D) = TMT = \bigcup_{m \in M} TmT$$

([15], Lemma 9. 15), also eine Abbildung $\rho : SL_n(D) \to M$ $\left(\rho(tmt') := m \text{ für } t, t' \in T, m \in M\right)$.

Wir wollen die Änderung von ρ berechnen, wenn das Argument von rechts oder von links mit einer monomialen Matrix $m_{ii+1}(\pm 1) = \phi_n\left(w_{ii+1}(\pm 1)\right)$ multipliziert wird. Dazu benutzen wir Bezeichnungen $\alpha, \beta, \ldots$ für Indexpaare (i, j), (i', j'), $\ldots$ und setzen $-\alpha = (j, i)$, wenn $\alpha = (i, j)$. Wir schreiben $\alpha = (i, j) > 0$, falls $j - i > 0$, sonst $\alpha < 0$. Ist $m = q_\sigma \cdot \mathrm{diag}(u_1, \ldots, u_n) \in M$ monomiale Matrix und $\alpha = (i, j)$, so definieren wir

$$l_\alpha(m) := u_i, \quad r_\alpha(m) := u_j.$$

Offenbar gilt $l_{-\alpha}(m) = r_\alpha(m)$, und man hat

$$m e_\alpha(x)\, m^{-1} = e_{\sigma\alpha}\left(l_\alpha(m)\, x r_\alpha(m)^{-1}\right).$$

Ist $\alpha = (i, i+1)$, so sei T_α die Untergruppe von T, die aus Matrizen (a_{kl}) mit $a_{ii+1} = 0$ gebildet wird. Für jedes $t \in T$ existieren zwei Zerlegungen

$$t = e_\alpha(u)\, t_\alpha, \quad t = t'_\alpha e_\alpha(u')$$

mit eindeutig bestimmten $u, u' \in D$, $t_\alpha, t'_\alpha \in T_\alpha$.

Lemma 4. 6. *Sei $s \in SL_n(D)$, $\rho(s) = m = q_\sigma \,\mathrm{diag}(u_1, \ldots, u_n)$, $s = t'mt$ $(t, t' \in T)$. Für $\alpha = (i, i+1)$, $\beta = (j, j+1)$ sei $t' = t'_\alpha e_\alpha(-u)$ und $t = e_\beta(v)\, t_\beta$ mit $u, v \in D$ und $t'_\alpha \in T_\alpha$, $t_\beta \in T_\beta$. Dann gilt folgendes:*

i) *Ist* $u=0$ *oder* $\gamma:=\sigma^{-1}\alpha>0$, *so ist für passendes* $t''_\alpha \in T_\alpha$

$$m_\alpha(1)\,s=t''_\alpha m_\alpha(1)\,me_\gamma\bigl(-l_\gamma(m)^{-1}\,ur_\gamma(m)\bigr)\,t$$

und

$$\rho\bigl(m_\alpha(1)\,s\bigr)=m_\alpha(1)\,m.$$

ii) *Ist* $u\neq 0$ *und* $\gamma=\sigma^{-1}\alpha<0$, *so ist für passendes* $t''_\alpha \in T_\alpha$

$$m_\alpha(1)\,s=t''_\alpha e_\alpha(u^{-1})\,d_\alpha(u)^{-1}\,me_{-\gamma}\bigl(-r_\gamma(m)^{-1}\,u^{-1}\,l_\gamma(m)\bigr)\,t$$

und

$$\rho\bigl(m_\alpha(1)\,s\bigr)=d_\alpha(u)^{-1}\,m.$$

iii) *Ist* $v=0$ *oder* $\sigma\beta>0$, *so ist für passendes* $t''_\beta \in T_\beta$

$$sm_\beta(-1)=t'e_{\sigma\beta}\bigl(l_\beta(m)\,vr_\beta(m)^{-1}\bigr)\,mm_\beta(-1)\,t''_\beta$$

und

$$\rho\bigl(sm_\beta(-1)\bigr)=mm_\beta(-1).$$

iv) *Ist* $v\neq 0$ *und* $\sigma\beta<0$, *so ist für passendes* $t''_\beta \in T_\beta$

$$sm_\beta(-1)=t'e_{-\sigma\beta}\bigl(r_\beta(m)\,v^{-1}\,l_\beta(m)^{-1}\bigr)\,md_\beta(v)\,e_\beta(-v^{-1})\,t''_\beta$$

und

$$\rho\bigl(sm_\beta(-1)\bigr)=md_\beta(v).$$

Beweis durch Rechnung (cf. [15], p. 114ff.).

Es sei nun für den Rest des Abschnittes $\pi: H\to D_n(D^*)$ algebraische Erweiterung vom Typ $\mathfrak{H}_n(D^*)$, $\varphi: W\to M$ sei die nach Lemma 4. 4 zugehörige Erweiterung von M.

Auf der Menge $X=\{(s,w)\in SL_n(D)\times W\,|\,\rho(s)=\varphi(w)\}$ definieren wir Permutationen $\lambda(h)$, $\mu(t)$, η_α (bzw. $\lambda^*(h)$, $\mu^*(t)$, η^*_α) für $h\in H$, $t\in T$, $\alpha=(i,i+1)$ $(1\leqq i\leqq n-1)$ folgendermaßen:

$$\left.\begin{array}{l}\lambda(h)\,(s,w):=\bigl(\varphi(h)\,s,hw\bigr)\\(s,w)\,\lambda^*(h):=\bigl(s\varphi(h),wh\bigr)\end{array}\right\}\text{ für }\quad h\in H,$$

$$\left.\begin{array}{l}\mu(t)\,(s,w):=(ts,w)\\(s,w)\,\mu^*(t):=(st,w)\end{array}\right\}\text{ für }\quad t\in T,$$

$$\eta_\alpha(s,w):=\begin{cases}\bigl(m_\alpha(1)\,s,\,w_\alpha(1)\,w\bigr)\\\bigl(m_\alpha(1)\,s,\,h_\alpha(u)^{-1}\,w\bigr)\end{cases}\quad\text{falls}\quad\rho\bigl(m_\alpha(1)\,s\bigr)=\begin{cases}m_\alpha(1)\,m\\d_\alpha(u)^{-1}\,m,\end{cases}$$

$$(s,w)\,\eta^*_\alpha:=\begin{cases}\bigl(sm_\alpha(-1),\,ww_\alpha(-1)\bigr)\\\bigl(sm_\alpha(-1),\,wh_\alpha(v)\bigr)\end{cases}\quad\text{falls}\quad\rho\bigl(sm_\alpha(-1)\bigr)=\begin{cases}mm_\alpha(-1)\\md_\alpha(v),\end{cases}$$

hierbei ist $\alpha=(i,i+1)$ $(1\leqq i\leqq n-1)$.

Mit G (bzw. G^*) werde die durch $\lambda(h)$, $\mu(t)$, η_α (bzw. $\lambda^*(h)$, $\mu^*(t)$, η^*_α) erzeugte Automorphismengruppe von X bezeichnet.

Lemma 4. 7. *Für alle* $(s,w)\in X$, $g\in G$, $g^*\in G^*$ *gilt*

$$(*)\qquad\bigl(g(s,w)\bigr)\,g^*=g\bigl((s,w)\,g^*\bigr).$$

Beweis. Es genügt, die Behauptung für die Erzeugenden von G und G^* zu zeigen, und dabei ist nur der Fall $g=\eta_\alpha$, $g^*=\eta_\beta^*$ nicht trivial. Für das folgende cf. [15], p. 119f.

Sei $s=t'mt=t_\alpha e_\alpha(-u)\, me_\beta(v)\, t_\beta$ $(t', t\in T,\ t_\alpha\in T_\alpha,\ t_\beta\in T_\beta)$, sei σ die zu m gehörige Permutation.

Ist $\sigma\alpha\neq\beta$ und σ' (bzw. σ'') die zu $\rho\big(sm_\beta(-1)\big)$ $\big($bzw. $\rho(m_\alpha(1)\, s)\big)$ gehörige Permutation, so sieht man leicht:

$$\sigma^{-1}\alpha>0\Leftrightarrow\sigma'^{-1}\alpha>0,\quad \sigma\beta>0\Leftrightarrow\sigma''\beta>0,$$

$(*)$ folgt dann sofort mit Lemma 4. 6.

Sei $\sigma\beta=\alpha$. Wir setzen $u':=u-l_\beta(m)\, vr_\beta(m)^{-1}$. Ist $u'=0$, so ist der Nachweis von $(*)$ trivial. Andernfalls muß gezeigt werden (Lemma 4. 6):

$$h_\alpha(u')^{-1}\, ww_\beta(-1)=w_\alpha(1)\, wh_\beta\big(-l_\beta(m)^{-1}\, u' r_\beta(m)\big).$$

Nach Lemma 4. 5 ist aber mit $v':=l_\beta(m)\, r_\beta(m)^{-1}$

$$\begin{aligned} w_\alpha(1)\, wh_\beta\big(-l_\beta(m)^{-1}\, u' r_\beta(m)\big) &= w_\alpha(1)\, h_\alpha(-u')\, h_\alpha(v')^{-1}\, w = h_\alpha(u')^{-1}\, h_\alpha(-v')\, w_\alpha(1)\, w\\ &= h_\alpha(u')^{-1}\, h_\alpha(-v')\, h_\alpha(v')^{-1}\, ww_\beta(1)\\ &= h_\alpha(u')^{-1}\, h_\alpha(-v')\, h_\alpha(v')^{-1}\, wh_\beta(-1)^{-1}\, w_\beta(-1)\\ &= h_\alpha(u')^{-1}\, ww_\beta(-1).\end{aligned}$$

Sei $\sigma\beta=-\alpha$. Der Fall $u=v=0$ ist trivial.

Ist $u\neq 0=v$, muß man zeigen:

$$w_\alpha(1)\, ww_\beta(-1)=h_\alpha(u)^{-1}\, wh_\beta\big(-l_\beta(m)^{-1}\, u^{-1} r_\beta(m)\big).$$

Im Fall $u=0\neq v$ muß gelten

$$h_\alpha\big(-r_\beta(m)\, v^{-1} l_\beta(m)^{-1}\big)^{-1}\, wh_\beta(v)=w_\alpha(1)\, ww_\beta(-1).$$

Falls $u\neq 0\neq v$ und $u':=u-r_\beta(m)\, v^{-1} l_\beta(m)^{-1}=0$ ist, muß

$$w_\alpha(1)\, wh_\beta(v)=h_\alpha(u)^{-1}\, ww_\beta(-1)$$

nachgewiesen werden. Die beiden ersten Gleichungen sind ersichtlich äquivalent. Alle Beweise erbringt man leicht mit Lemma 4. 5.

Ist schließlich $u\neq 0\neq v$ und $u'\neq 0$, so ist auch $v'=v-l_\beta(m)^{-1}\, u^{-1} r_\beta(m)\neq 0$, und man hat nachzuweisen:

$$h_\alpha(u')^{-1}\, wh_\beta(v)=h_\alpha(u)^{-1}\, wh_\beta(v').$$

Dies ist nach Lemma 4. 5 äquivalent zu

$$h_\alpha(u')^{-1}\, h_\alpha\big(l_\beta(m)\, vr_\beta(m)^{-1}\big)^{-1}=h_\alpha(u)^{-1}\, h_\alpha\big(l_\beta(m)\, v' r_\beta(m)^{-1}\big)^{-1}.$$

Anders ausgedrückt: Für $x, y\in D^*$ mit $1-xy\in D^*$ ist zu zeigen:

$$h_{ij}(x)\, h_{ij}(y-x^{-1})=h_{ij}(x-y^{-1})\, h_{ij}(y).$$

Nun ist aber nach U2, U0:

$$c_i(x, y-x^{-1}) = c_i(x, y(1-y^{-1}x^{-1})) =$$
$$= c_i(xy, 1-y^{-1}x^{-1})\, c_i((1-y^{-1}x^{-1})\, x, y) = c_i(x-y^{-1}, y).$$

Damit ist Lemma 4. 7 bewiesen.

Wie schon Milnor ([15], p. 120) an der entsprechenden Stelle des Beweises im kommutativen Fall bemerkt, ist der letzte Schritt des eben gegebenen Beweises der einzige Punkt, wo voll von der Relation U0: $c(u, 1-u)=1$ Gebrauch gemacht wird. (Im Beweis von Lemma 4. 5 wurde lediglich $c(u, -u)=1$ benötigt!)

Proposition 4. 8. *G (bzw. G^*) operiert einfach transitiv auf X und ist zentrale Erweiterung von $SL_n(D)$ mit* Kern π.

Beweis. Die Transitivität beweist man wie in [15], p. 117, aus Lemma 4. 7 folgt dann ohne weiteres, daß die Gruppen einfach transitiv operieren. Den Erweiterungshomomorphismus $\psi: G \to SL_n(D)$ erhält man aus der Beziehung $g(s, w) = (\psi(g)\, s, *)$, und weil G einfach transitiv operiert, folgert man Kern ψ = Kern π. Die Zentralität von Kern ψ ist leicht zu sehen.

Proposition 4. 9. *Es gibt genau einen über $SL_n(D)$ liegenden Epimorphismus $St_n(D) \to G$.*

Beweis. Die Eindeutigkeit folgt aus der Tatsache, daß die Steinberg-Gruppe perfekt ist, d. h. ihre Kommutatorfaktorgruppe verschwindet, da beide Gruppen zentral über $SL_n(D)$ sind. Die Existenz ist etwas schwieriger zu zeigen. Aus Prop. 4. 8 folgt: $t \to \mu(t)$ $(t \in T)$ liefert einen Isomorphismus von T mit einer Untergruppe von G, und die in G durch die Elemente $\lambda(h)$ $(h \in H)$ und η_α $(\alpha = (i, i+1), 1 \leqq i \leqq n-1)$ erzeugte Untergruppe kann mit der in Lemma 4. 4 ii) definierten Gruppe W identifiziert werden; diese enthält eine zu H isomorphe Untergruppe $\lambda(H)$ (l. c.), erzeugt durch $\lambda(h)$ $(h \in H)$. Die Elemente η_α werden identifiziert mit $\bar{w}_{i,i+1}$ (für $\alpha = (i, i+1)$, $1 \leqq i \leqq n-1$, l. c.). Sie erzeugen in G ein homomorphes Bild von W_0.

Nun läßt sich leicht nachweisen, daß die Steinberg-Gruppe $St_n(D)$ folgende Präsentation besitzt: Als Erzeugende nehmen wir $x_{ij}(u)$, $1 \leqq i < j \leqq n$, $u \in D$ und $w_i := w_{i,i+1}(1)$ $(1 \leqq i \leqq n-1)$, als Relationen nehmen wir alle in $W_0 \subset St_n(\mathbb{Z})$ geltenden Relationen unter den w_i und weiter

$$\text{R1} \quad \begin{cases} x_{ij}(u)\, x_{ij}(v) = x_{ij}(u+v) & (i<j) \\ [x_{ij}(u), x_{kl}(v)] = 1 & (i<j,\, k<l,\, i \neq l,\, j \neq k) \\ [x_{ik}(u), x_{kl}(v)] = x_{il}(uv) & (i<k<l), \end{cases}$$

$$\text{R2} \quad \begin{cases} w_i^{\varepsilon} x_{ij}(u)\, w_i^{-\varepsilon} = x_{i+1,j}(-\varepsilon u) & (i+1<j,\, \varepsilon \in \{\pm 1\}) \\ w_j^{\varepsilon} x_{ij}(u)\, w_j^{-\varepsilon} = x_{i,j+1}(-\varepsilon u) & (i<j,\, \varepsilon \in \{\pm 1\}) \\ w_k x_{ij}(u)\, w_k^{-1} = x_{ij}(u) & (i \neq k,\, k+1,\, j \neq k,\, k+1), \end{cases}$$

$$\text{R3} \quad w_i x_{i,i+1}(-1)\, w_i = x_{i,i+1}(1)\, w_i x_{i,i+1}(1).$$

Der Homomorphismus $St_n(D) \to G$ wird dann gegeben durch die Zuordnung

$$x_{ij}(u) \mapsto \mu(e_{ij}(u)) \qquad (i<j,\, u \in D),$$
$$w_i \mapsto \eta_\alpha \qquad (\alpha = (i, i+1),\, 1 \leqq i \leqq n-1).$$

Man hat also in G die Relationen R1 bis R3 für die Bilder der Erzeugenden nachzuweisen. R1 ist klar, da μ Isomorphismus von T nach G ist. R2 ist leicht zu verifizieren, und R3 ist ein Spezialfall von

$$\text{R4} \qquad \lambda\left(h_\alpha(u)\right)\eta_\alpha \mu\left(e_\alpha(-u)\right)\eta_\alpha = \mu\left(e_\alpha(u)\right)\eta_\alpha \mu\left(e_\alpha(u^{-1})\right)$$

für $u \in D^*$, $\alpha = (i, i+1)$ $(1 \leqq i \leqq n-1)$. Diese Relation liefert auch die Surjektivität des gesuchten Homomorphismus.

R4 muß durch explizite Rechnung unter Ausnutzung von Lemma 4. 6 i), ii) nachgewiesen werden. Dabei sind ähnliche Betrachtungen erforderlich wie im Beweis von Lemma 4. 7. Auf die Durchführung verzichten wir hier.

Bemerkung. Die Relation R4 läßt sich verwenden für den Nachweis, daß das Bild von $h_{ij}(u)\, h_{ij}(v)\, h_{ij}(vu)^{-1} \in St_n(D)$ in G genau das Element $\lambda\left(c_i(u, v)\right)$ ist.

Wir fassen Prop. 4. 8, 4. 9 zusammen zu

Satz 1. *Für $n \geqq 3$ werden die unter der Steinberg-Gruppe $St_n(D)$ liegenden zentralen Erweiterungen von $SL_n(D)$ klassifiziert durch die algebraischen Erweiterungen vom Typ $\mathfrak{U}(D^*)$, genauer: Ist $\pi: U \to [D^*, D^*]$ eine solche Erweiterung, d.h. wird U erzeugt durch Elemente $c(u, v)$ $(u, v \in D^*)$ mit $\pi\left(c(u, v)\right) = [u, v]$, die* U0, U1, U2 *erfüllen, so gibt es eine zentrale Erweiterung $p: G \to SL_n(D)$ und genau einen über $SL_n(D)$ liegenden Homomorphismus $\varphi: St_n(D) \to G$ derart, daß die Zuordnung*

$$c(u, v) \mapsto \varphi\left(h_{12}(u)\, h_{12}(v)\, h_{12}(vu)^{-1}\right)$$

einen Isomorphismus von U auf eine Untergruppe von G definiert und Kern π *isomorph auf* Kern p *abgebildet wird. Umgekehrt gewinnt man so jede zentrale Erweiterung G von $SL_n(D)$, die Quotient von $St_n(D)$ ist.*

(Die Umkehrung folgt aus den Bemerkungen zum Beispiel in Abschnitt 2, aus Prop. 2. 2 i) und Lemma 4. 1 i).)

Korollar 1. *Ist die Steinberg-Gruppe $St_n(D)$ universelle zentrale Erweiterung von $SL_n(D)$, so ist der Schur-Multiplikator $H_2\left(SL_n(D), \mathbb{Z}\right)$ isomorph zum Kern π_D der „universellen" algebraischen Erweiterung $\pi_D: U_D \to [D^*, D^*]$.*

Bemerkung. Die Voraussetzung über die Steinberg-Gruppe ist für $n \geqq 5$ stets erfüllt ([15], p. 48, Remark). Für $n \geqq 2$ und kommutatives D ist dies in [18] bewiesen, wobei gewisse kleine Körper ausgenommen werden müssen. Der Beweis läßt sich derart modifizieren, daß er für $n \geqq 3$ und für Schiefkörper mit wenigstens fünfelementigem Zentrum durchführbar ist.[4])

Korollar 2. *Für $n \geqq 3$ hat man $K_2(n, D) \cong K_2(n+1, D) \cong K_2(D)$ und folglich eine exakte Sequenz*

$$1 \to K_2(D) \to U_D \to [D^*, D^*] \to 1.$$

[4]) Der Beweis ist sogar für $n \geqq 3$, Zentrum $= \mathbb{F}_3$ oder $n \geqq 4$, Zentrum $= \mathbb{F}_4$ durchführbar. (Cf. J. R. Strooker: The fundamental group of the linear group, Th. 1. Erscheint demnächst in: Journal of Algebra.) Für $n = 4$ ist inzwischen sogar bekannt: Ist A assoziativer Ring mit 1, so ist $\pi_1(St_4(A)) = 0$ genau dann, wenn $\mathbb{F}_2$ nicht homomorphes Bild von A ist. (Cf. W. v. d. Kallen, M. Stein: On the Schur multipliers of Chevalley groups over commutative rings. Erscheint demnächst in Math. Zeitschrift.) In diesem Fall ist also $D = \mathbb{F}_2$ die einzige Ausnahme.

Anwendung der Hochschild-Serre-Spektralsequenz ergibt

Korollar 3. *Es existiert eine exakte Sequenz*

$$H_2(U_D, \mathbb{Z}) \to H_2([D^*, D^*], \mathbb{Z}) \to K_2(D) \to H_1(U_D, \mathbb{Z}) \to H_1([D^*, D^*], \mathbb{Z}) \to 1.$$

Bemerkung. Verwendet man die Beschreibung des Schur-Multiplikators von Miller [14], so lassen sich die Homomorphismen dieser Sequenz explizit angeben (cf. [2], siehe auch die Beispiele und Bemerkungen in Abschnitt 1).

5. Der topologische Fall

In diesem Abschnitt formulieren und beweisen wir eine topologische Version von Satz 1 (cf. [13], Th. 8. 2). Es sei D separierter topologischer Schiefkörper, so daß also $SL_n(D)$ separierte topologische Gruppe ist. Die Untergruppen $D_n := D_n(D^*)$, T, T^- (= strikte untere Dreiecksmatrizen) sind abgeschlossene Untergruppen von $SL_n(D)$. Stets sei $n \geqq 3$.

Lemma 5. 1. *Die Zuordnung $(s, d, t) \mapsto sdt$ liefert einen Homöomorphismus des Produktes $T^- \times D_n \times T$ mit einer offenen Teilmenge Ω von $SL_n(D)$.*

Beweis. Die Injektivität der Abbildung ist leicht zu sehen. Bleibt zu zeigen: $\Omega = T^- \cdot D_n T$ ist offen in $SL_n(D)$. Dazu definieren wir auf gewissen Mengen S_k von $n \times n$-Matrizen über D Funktionen $\Delta_k : S_k \to D$ auf folgende Weise: Für $a = (a_{ij})_{1 \leqq i, j \leqq n}$ hängt $\Delta_k(a)$ nur von $(a_{ij})_{1 \leqq i, j \leqq k}$ ab, und zwar sei $\Delta_1(a) := a_{11}$ für beliebiges a.

Sei nun k fest und $\Delta_i : S_i \to D$ definiert für $1 \leqq i \leqq k$ derart, daß

$$S_i = \{a \in S_{i-1} \mid \Delta_{i-1}(a) \neq 0\} \qquad (2 \leqq i \leqq k).$$

Für Zahlen μ, ν mit $k \leqq \mu, \nu \leqq n$ sei $a^{\mu,\nu}$ die $k \times k$-Matrix, die aus a hervorgeht durch Streichen aller Zeilen der Nummer i und Spalten der Nummer j mit $k \leqq i, j \leqq n$, $i \neq \mu$, $j \neq \nu$. Für $a \in S_k$ mit $\Delta_k(a) = \Delta_k(a^{k,k}) \neq 0$ definieren wir nun

$$\Delta_{k+1}(a) := \Delta_k(a^{k+1,k+1}) - \Delta_k(a^{k+1,k})\, \Delta_k(a^{k,k})^{-1}\, \Delta_k(a^{k,k+1}).$$

(Daß die rechte Seite definiert ist, ist leicht zu sehen.) Auf diese Weise werden die Funktionen $\Delta_k : S_k \to D$ induktiv definiert, und es ist nun nicht schwer nachzuweisen, daß

$$\Omega = \{a \in S_n \mid \Delta_n(a) \neq 0\} = \{a \in SL_n(D) \mid \Delta_k(a) \neq 0 \quad \text{für} \quad 1 \leqq k \leqq n\},$$

mithin offen ist, da D als separiert vorausgesetzt wurde. Für die Definition der Δ_k cf. [9]; $\Delta_n(a)$ ist die dort auftretende linksseitige Designante von a.

Wir nennen eine zentrale Erweiterung $p: G \to SL_n(D)$ *topologisch*, wenn G separierte topologische Gruppe und p stetig und offen ist.

Satz 2. *Die nach Satz* 1 *zu einer algebraischen Erweiterung $\pi: U \to [D^*, D^*]$ vom Typ $\mathfrak{U}(D^*)$ gehörende zentrale Erweiterung $p: G \to SL_n(D)$ ist genau dann topologisch, wenn π topologisch ist (cf. Abschnitt* 1) *und wenn die zugehörige stetige Abbildung $c: D^* \times D^* \to U$ der folgenden Bedingung genügt:*

$$\lim_{u, v \to 0} c(1 + uv, v) = 1.$$

Beweis. i) Sei $p: G \to SL_n(D)$ topologisch. Wir zeigen die Notwendigkeit der Bedingungen. Sei $\varphi: St_n(D) \to G$ der über $SL_n(D)$ liegende Epimorphismus nach Satz 1. Wie in [15], p. 96f. beweist man: Der Homomorphismus $u \mapsto \varphi(x_{ij}(u))$ von D nach G ist stetig, also auch die Abbildungen $u \mapsto \varphi(w_{ij}(u))$, $u \mapsto \varphi(h_{ij}(u))$ $(u \in D^*)$, und damit ist die Stetigkeit von

$$(u, v) \mapsto \varphi\left(h_{12}(u)\, h_{12}(v)\, h_{12}(vu)^{-1}\right)$$

auf $D^* \times D^*$ klar.

Ferner gilt in der Steinberg-Gruppe die Identität

$$(*) \qquad x_{ij}(u)\, x_{ji}(v) = x_{ji}\left(v(1+uv)^{-1}\right) c_i(1+uv, v)\, h_{ij}(1+vu)\, x_{ij}\left((1+uv)^{-1} u\right),$$

wenn $v, 1+uv \in D^*$. Für $u, v \to 0$ folgt hieraus nach Übergang zur Gruppe G unter φ die obige Stetigkeitsbedingung.

ii) Ist π topologisch und die angegebene Stetigkeitsbedingung erfüllt, so haben wir G zu einer separierten topologischen Gruppe zu machen derart, daß $p: G \to SL_n(D)$ stetig und offen wird. Dies geschieht folgendermaßen:

Das Urbild $\tilde{\Omega} = p^{-1}\Omega$ hat in G eine Zerlegung $\tilde{\Omega} = \tilde{T}^- H \tilde{T}$; wo $\tilde{T} = p^{-1}T$, $\tilde{T}^- = p^{-1}T^-$ und $H = p^{-1}(D_n)$. H ist separierte topologische Gruppe, $p|_H$ ist stetig und offen nach Lemma 3. 4. $p|_{\tilde{T}}$, $p|_{\tilde{T}^-}$ sind Gruppenmonomorphismen, mit diesen ziehen wir die Topologie von T (bzw. T^-) zurück. $\tilde{\Omega}$ versehen wir dann mit der Produkttopologie. Eine Teilmenge von G nennen wir Umgebung der Eins, wenn sie $\tilde{\Omega}$ in einer Umgebung der Eins trifft. Wir haben zu zeigen, daß G so eine topologische Gruppe wird, daß also die Abbildungen $(x, y) \mapsto x^{-1}y$ $(x, y \in G)$ bzw. $Ad(z^{\pm 1}): x \mapsto {}^{z^{\pm 1}}x (x \in G)$ stetig in $(1, 1)$ bzw. — für ein Erzeugendensystem $\{z\}$ von G — in 1 sind. Dies geschieht — unter Ausnutzung der Zerlegung von $\tilde{\Omega}$ und mit der Formel $(*)$ — analog wie im entsprechenden Beweis für den Fall eines kommutativen D ([13], p. 49f.). Daß p dann offen und stetig ist, ist klar mit Lemma 5. 1.

Literatur

[1] *R. K. Dennis*, Stability for K_2, Lecture Notes in Math. **353** (1973), 85—94.

[2] *R. K. Dennis*, In search of new "homology" functors having a close relationship to K-theory, preprint 1976.

[3] *R. K. Dennis*, A brief survey of K_2 of division rings and related topics, preprint 1977.

[4] *R. K. Dennis*, K_2 of non-commutative discrete valuation rings, (in Vorbereitung).

[5] *R. K. Dennis* and *M. R. Stein*, K_2 of discrete valuation rings, Adv. in Math. **18** (1975), 182—238.

[6] *J. Dieudonné*, Les determinants sur un corps non commutatif, Bull. Soc. Math. France **71** (1943), 27—45.

[7] *S. M. Green*, Generators and relations for K_2 of a division ring, Lecture Notes in Math. **551** (1976), 74—76.

[8] *S. M. Green*, *D. Handelman* and *P. Roberts*, K-Theory of finite dimensional division algebras, preprint.

[9] *A. Heyting*, Die Theorie der linearen Gleichungen in einer Zahlenspezies mit nichtkommutativer Multiplikation, Math. Ann. **98** (1927), 465—490.

[10] *H. Hopf*, Fundamentalgruppe und zweite Bettische Gruppe, Comment. Math. Helv. **14** (1941/42), 257—309.

[11] *W. v. d. Kallen*, *H. Maazen* and *J. Stienstra*, A presentation for some $K_2(n, R)$, Bull. Am. Math. Soc. **81** (1975), 934—936.

[12] *H. Maazen* and *J. Stienstra*, A presentation for K_2 of split radical pairs, Univ. of Utrecht, Dep. of Math., preprint **31** (1976).

[13] *H. Matsumoto*, Sur les groupes arithmétiques des groupes semi-simples déployés, Ann. sci. Ec. norm. sup., IV. Sér, **2** (1969), 1—62.

[14] *C. Miller*, The second homology group of a group; relations among commutators, Proc. Am. Math. Soc. **3** (1952), 588—595.

[15] *J. Milnor*, Introduction to algebraic K-theory, Princeton 1971.

[16] *C. C. Moore*, Group extensions of p-adic and adelic linear groups, I.H.E.S., Publ. Math. **35** (1968), 5—70.

[17] *U. Rehmann*, K_2 von Schiefkörpern, Preprint, Bielefeld 1976.

[18] *R. Steinberg*, Générateurs, relations et revêtements de groupes algébriques (Bruxelles 1962), 113—127. Louvain: Librairie Universitaire. Paris 1962.

[19] *R. Steinberg*, Lectures on Chevalley groups, New Haven 1967.

Universität Bielefeld, Fakultät für Mathematik, Postfach 8640, D-4800 Bielefeld 1

Eingegangen 15. September 1977