Präsentationen von Chevalley-Gruppen über $k[t]$

von Ulf Rehmann (Bielefeld , 1175)

In dieser Untersuchung werden für Chevalley-Gruppen über dem Polynomring in einer Unbestimmten über einem Körper explizite Präsentationen angegeben. Hauptresultat ist dabei der Nachweis, daß eine fasteinfache Chevalley-Gruppe vom Rang größer als zwei endlich präsentierbar ist, wenn der Konstantenkörper endlich ist (Korollar zu Satz 2). Dies ist im Fall einer Gruppe vom Rang eins falsch; von Nagao ist gezeigt worden, daß die Gruppe nicht einmal endlich erzeugt ist [6]. Von fasteinfachen Gruppen vom Rang zwei ist leicht zu sehen, daß sie endlich erzeugt sind, dagegen lassen wir die Frage offen, ob diese Gruppen auch endlich präsentierbar sind.

Etwas allgemeiner läßt sich fragen, unter welchen Voraussetzungen arithmetische Gruppen in Chevalley-Gruppen über globalen Funktionenkörpern endlich präsentiert sind (im Zahlkörperfall ist dies stets richtig, wie von Behr gezeigt worden ist [1]). Hierzu war bis vor kurzem das Resultat von Nagao das einzige Ergebnis, neuerdings ist jedoch von Hurrelbrink gezeigt worden, daß fasteinfache Chevalley-Gruppen vom Rang größer als eins über $k[t,t^{-1}]$ endlich präsentiert sind (ausgenommen eventuell der Typ G_2), wenn k endlich ist [4], ferner bewies Stuhler die endliche Präsentierbarkeit für die SL_2 im Fall eines globalen Funktionenringes mit mehr als zwei unendlichen Primstellen, für den Fall zweier unendlicher Primstellen wurde gezeigt, daß die SL_2 zwar endlich erzeugt, aber nicht endlich präsentierbar ist [14].

Unser Beweis verläuft folgendermaßen: Zunächst werden aus einem Resultat von Soulé [9] unendliche Präsentationen für Chevalley-Gruppen bei beliebigem Konstantenkörper hergeleitet (Satz 1), wobei sich als Nebenresultat die Verallgemeinerung des aus der algebraischen K-Theorie bekannten Resultates $K_2(k[t]) = K_2(k)$ auf die beliebigen Chevalley-Gruppen zugeordneten Funktoren ergibt (Korollar zu Satz 1). Anschließend wird durch explizite Rechnung gezeigt, daß im Fall fasteinfacher Gruppen vom Rang größer als zwei die Präsentationen sich auf solche reduzieren lassen, deren Parameter Polynome beschränkten Grades sind (Satz 2). Diese Rechnung wird sogar in der zugehörigen Steinberg-Gruppe durchgeführt; dabei ist die Rangbedingung jedoch äußerst wesentlich, von ihr wird ständig Gebrauch gemacht. -

Für den Fall eines endlichen Konstantenkörpers folgt dann die endliche Präsentierbarkeit der betreffenden Chevalley- und der zugehörigen Steinberg-Gruppen.

Es sei k ein Körper, Φ ein irreduzibles, reduziertes Wurzelsystem (im Sinne von [2]) vom Rang $\operatorname{rg}\Phi \geq 1$, $\underline{G}$ ein einfach zusammenhängendes Chevalley-Gruppenschema vom Typ Φ über k. $K = k(t)$ bzw. $R = k[t]$ seien der Körper der rationalen bzw. der Ring der ganzen Funktionen über k. Für $\alpha \in \Phi$, $u \in K$ seien Elemente $x_\alpha(u) \in \underline{G}(K)$ und, falls $u \neq 0$, $w_\alpha(u)$, $h_\alpha(u) \in \underline{G}(K)$ definiert wie in [12]. Nach [13, Th.18, Cor.3] wird die Gruppe $G = \underline{G}(R)$ erzeugt durch $\{x_\alpha(u) \mid \alpha \in \Phi,\ u \in R\}$.

In G gelten die folgenden Relationen für $\alpha, \alpha' \in \Phi$, $u, v \in R$ [12]:

(A) $$x_\alpha(u)x_\alpha(v) = x_\alpha(u+v)$$

(B) $$[x_\alpha(u), x_{\alpha'}(v)] = \prod x_{i\alpha+j\alpha'}(c_{ij,\alpha,\alpha'}u^i v^j) \qquad (\alpha+\alpha' \neq 0)$$

(B') $$w_\alpha(v)x_\alpha(u)w_\alpha(v)^{-1} = x_{-\alpha}(-v^{-2}u) \qquad (v \in k^*)$$

(C) $$h_\alpha(u)h_\alpha(v) = h_\alpha(uv) \qquad (u, v \in k^*),$$

dabei ist - in (B) - $[x,y] = xyx^{-1}y^{-1}$ für $x, y \in G$, sind die $c_{ij,\alpha,\alpha'}$ gewisse von u,v unabhängige ganze Zahlen und ist das Produkt (in der nach einer lexikographischen Anordnung der Wurzeln geordneten Reihenfolge) über alle $i\alpha+j\alpha' \in \Phi$ für $i,j > 0$ zu nehmen. Die Relationenmenge (B) ist im Fall $\operatorname{rg}\Phi = 1$ leer, im Fall $\operatorname{rg}\Phi > 1$ ist (B') Implikation von (A), (B).

Satz 1:

G wird präsentiert durch die Erzeugenden $\{x_\alpha(u) \mid \alpha\in\Phi, u\in R\}$ und die Relationen (A), (B), (B'), (C).

Für den Fall $\operatorname{rg}\Phi = 1$ ist dies ein älteres Resultat von Nagao (cf. [6], [7, II, 1.6]); eine entsprechende Präsentation ist neuerdings (für Typ $\Phi = A_n$) sogar für die allgemeine lineare Gruppe der freien assoziativen Algebra $k\langle X\rangle$ einer Menge X über einem Schiefkörper k bekannt [8, Cor. 11].

Unser Beweis stellt die Interpretation einer von Soulé gegebenen Beschreibung von G als amalgamiertes Produkt dar. Zunächst soll jedoch ein Korollar formuliert werden. Bezeichnen wir für einen kommutativen Ring A mit $L(\Phi, A)$ den Kern des Homomorphismus der durch (A), (B), (B') präsentierten Gruppe (mit Argumenten $u, v\in A$) auf die durch (A), (B), (B'), (C) präsentierte Gruppe, so ist für $A=k, R$
$K_2(n,A) = L(A_{n-1},A)$, $K_2(A) = \varinjlim_{n\to\infty} L(A_{n-1},A)$ (cf. [10]).

Unser Satz liefert unmittelbar:

Korollar: $L(\Phi, k[t]) = L(\Phi, k)$.

Beweis des Satzes:

Wir wählen in Φ ein Halbsystem Φ^+ positiver Wurzeln aus und bezeichnen mit Π die Menge der bezüglich Φ^+ einfachen Wurzeln. Ferner fixieren wir den durch die Bedingungen $h_\alpha(u)\in \underline{H}(k)$ $(\alpha\in\Phi, u\in k^*)$ festgelegten maximalen zerfallenden k-Torus $\underline{H}$ in $\underline{G}$ [13, Th. 6] und identifizieren Φ mit der Wurzelmenge von $\underline{G}$ bezüglich $\underline{H}$. Für $\Sigma\subseteq\Pi$ sei $\underline{P}_\Sigma$ die zugehörige parabolische "Standard" - k - Untergruppe. $\underline{P}_\Sigma$ zerfällt halbdirekt über k in das unipotente Radikal $\underline{U}_\Sigma$ und den Zentralisator $\underline{Z}_\Sigma$ der Zusammenhangskomponente des Durchschnitts der Kerne der Wurzeln in Σ. Sodann ist G das über den Durchschnitten in G amalgamierte Produkt der Untergruppen $G_\Sigma := \underline{Z}_\Sigma(k)\cdot\underline{U}_\Sigma(R)$ für alle $\Sigma\subseteq\Pi$ [9, Th. 4].

Für den Beweis des Satzes genügt es daher, folgendes zu zeigen: Aus dem angegebenen Relationensystem läßt sich ein System von Folgerelationen ableiten, so daß zu jeder Relation des neuen Systems ein $\Sigma \subseteq \Pi$ existiert derart, daß alle in der Relation auftretenden Gruppenelemente zu G_Σ gehören und daß umgekehrt die Gesamtheit aller dieser Relationen mit Elementen in G_Σ diese Gruppe präsentieren [5,]. Der einfache Zusammenhang von $\underline{G}$ ist äquivalent damit, daß jedes Element aus $\underline{H}(k)$ sich eindeutig als Produkt von $h_\alpha(u_\alpha)$ mit $\alpha \in \Pi$, $u_\alpha \in k^*$ darstellen läßt [13, Lemma 28,Cor.], weiter bedeutet dies, daß die Relationen (A), (B), (B'), (C) mit $u,v \in k$ die Gruppe $\underline{G}(k)$ präsentieren [12,Th.3.2]. Daher sind die Relationen

$$\text{(C')} \qquad [h_\alpha(u),h_{\alpha'}(v)] = 1 \quad (\alpha,\alpha' \in \Phi,\ u,v \in k^*)$$

Folgerungen aus jenen [12,7.3(e)].

Ferner folgert man durch Rechnung (mittels der Definitionen $w_\alpha(u) = x_\alpha(u)\, x_{-\alpha}(-u^{-1})x_\alpha(u)$ und $h_\alpha(u) = w_\alpha(u)w_\alpha(-1)$ für $\alpha \in \Phi$, $u \in k^*$) aus (A), (B) für $u \in k^*$, $v \in R$, $\alpha,\alpha' \in \Phi$

$$\text{(D)} \qquad w_\alpha(u)x_{\alpha'}(v)w_\alpha(u)^{-1} = x_{\alpha''}(\eta u^{-n(\alpha',\alpha)}v)$$

$$\text{(D')} \qquad h_\alpha(u)x_{\alpha'}(v)h_\alpha(u)^{-1} = x_{\alpha'}(u^{-n(\alpha',\alpha)}v),$$

dabei ist $\eta = \eta(\alpha,\alpha') \in \{\pm 1\}$ ein nur von α,α' abhängiges Vorzeichen mit $\eta(\alpha,\alpha) = -1$, $n(\alpha',\alpha)$ die Cartan-Zahl von α,α' [2,chap.VI], und $\alpha'' = \sigma_\alpha(\alpha') = \alpha' - n(\alpha',\alpha)\alpha$ die Spiegelung von α' an der zu α orthogonalen Hyperebene [11,3.8]. Bezeichnen wir für eine Teilmenge $\Sigma \subseteq \Pi$ mit $\Phi(\Sigma)$(bzw. $\Phi^+(\Sigma)$) das durch Σ erzeugte Teilsystem von Wurzeln (bzw. positiven Wurzeln) aus Φ und mit $\underline{H}_\Sigma$ die durch $h_\alpha(u)$ $(\alpha \in \Sigma, u \in k^*)$ erzeugte Untergruppe, so ist $\underline{H}_\Sigma$ über k definiert [13, § 5], und nach dem obigen gilt für $\Sigma' := \Pi - \Sigma$

$$\underline{H}(k) = \underline{H}_\Sigma(k)\cdot\underline{H}_{\Sigma'}(k),\ \underline{H}_\Sigma(k) \cap \underline{H}_{\Sigma'}(k) = \{1\}.$$

Ist ferner $\underline{G}_{\Sigma}$ die durch Σ definierte halbeinfache k-Untergruppe von G [l.c.], so ist $\underline{H}_{\Sigma}$ maximaler zerfallender k-Torus von $\underline{G}'$, und ebenfalls nach der obigen Bemerkung ist daher $\underline{G}_{\Sigma}$ einfach-zusammenhängend. Dies bedeutet wieder, daß $\underline{G}_{\Sigma}(k)$ durch (A), (B), (C) (mit $u,v \in k$) für $\alpha,\alpha' \in \Phi(\Sigma)$ präsentiert wird. Weiterhin ist

$$\underline{Z}_{\Sigma}(k) = \underline{G}_{\Sigma}(k) \cdot \underline{H}(k) = \underline{G}_{\Sigma}(k) \cdot \underline{H}_{\Sigma'}(k);$$

das letztere Produkt ist halbdirekt mit $\underline{G}_{\Sigma}(k)$ als Normalteiler nach (D'). Daher haben wir eine Präsentation von $\underline{Z}_{\Sigma}(k)$ in (A), (B), (B') mit $\alpha,\alpha' \in \Phi(\Sigma)$, (C), (C') mit $\alpha,\alpha' \in \Phi$, (D') mit $\alpha \in \Phi$, $\alpha' \in \Phi(\Sigma)$ und überall $u,v \in k$. - Die Gruppe $\underline{U}_{\Sigma}(R)$ wird erzeugt durch $x_{\alpha}(u)$ mit $\alpha \in \Phi^{+} - \Phi^{+}(\Sigma)$, $u \in R$ und präsentiert durch (A), (B) mit $\alpha,\alpha' \in \Phi^{+} - \Phi^{+}(\Sigma)$. Das halbdirekte Produkt $\underline{Z}_{\Sigma}(k) \cdot \underline{U}_{\Sigma}(R)$ wird definiert durch die Relationen (B), (D') mit $\alpha \in \Phi(\Sigma)$, $u \in k$ bzw. $\alpha \in \Phi$, $u \in k^{*}$, $\alpha' \in \Phi^{+} - \Phi^{+}(\Sigma)$, $v \in R$. Schränken wir also in (A), (B), (B') α und α' für den Fall $u,v \in R-k$, in (D') α' für $v \in R-k$ auf Φ^{+} ein, so haben wir - mit (C), (C') - ein System von Relationen gefunden, welches die oben aufgeführten Eigenschaften erfüllt, und damit den Beweis von Satz 1 erbracht.

Sei nun $\tilde{G}$ die durch (A), (B), (B') präsentierte Gruppe.

<u>Satz 2</u>:

Ist $\Phi \geqslant 3$, so wird $\tilde{G}$ durch die Relationen (A), (B) mit Polynomen u,v beschränkten Grades präsentiert.

<u>Korollar</u>:

Ist $\mathbb{F}_q$ der Körper mit q ($< \infty$) Elementen und $\underline{G}$ eine fast-einfache Chevalley-Gruppe über $\mathbb{F}_q$ vom Rang $\geqslant 3$, so ist $\underline{G}(\mathbb{F}_q[t])$ endlich präsentiert.

Für den Beweis von Satz 2 benötigen wir einige Hilfssätze:

<u>H 1:</u> Seien $a,b,\ldots$ Elemente einer Gruppe. Wir setzen ${}^{a}b := aba^{-1}$. Dann gilt:

i) $[a,bc] = [a,b]{}^{b}[a,c] = [a,b]\,[b\cdot[a,c]]\cdot[a,c]$

ii) $[ab,c] = {}^{a}[b,c][a,c] = [a,[b,c]]\,[b,c]\cdot[a,c]$

iii) $[a,c] = [y,c] = 1 \Rightarrow [ya,[b,c]] = [y[a,b],{}^{b}c]$

iv) $[[a,b],\,[b,c]] = [c,[b,c]] = 1 \Rightarrow [[a,b],c] = [[a,b],{}^{b}c]$

Zum Beweis: i), ii) sind klar.

iii) $[ya,\,[b,c]] = [ya,\,{}^{b}c] = [ya\cdot{}^{b}a^{-1},{}^{b}c] = [y[a,b],{}^{b}c]$

iv) $1 = {}^{c}[[a,b],\,[b,c]] = {}^{c}[[a,b],\,{}^{b}c\cdot c^{-1}] = {}^{c}[[a,b],\,c^{-1}\cdot{}^{b}c]$

$= [c,[a,b]]\,[[a,b],{}^{b}c]$, letzteres nach i).

<u>H 2:</u> Sind $\alpha,\alpha' \in \Phi$ linear unabhängig, so existiert eine Basis Π von Φ und $\beta \in \Pi$ sowie $i,j \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ derart, daß $\alpha' = i\alpha + j\beta$ und $\alpha \in \Pi$ ist. Bezeichnet $\langle\alpha,\alpha'\rangle \subseteq \Phi$ die Menge aller Linearkombinationen von α,α' in Φ, so haben wir

i) $\alpha \pm \alpha' \in \Phi \Rightarrow \langle\alpha,\alpha'\rangle = \{\pm\alpha,\ \pm\alpha',\ \pm(\alpha+\alpha')\} \simeq B_2$

ii) $\alpha + \alpha',\ \alpha + 2\alpha' \in \Phi \Rightarrow \langle\alpha,\alpha'\rangle = \{\pm\alpha,\ \pm\alpha',\ \pm(\alpha+\alpha')\ \pm(\alpha+2\alpha')\} \simeq B_2$

iii) $\alpha + \alpha' \in \Phi,\ \alpha - \alpha',\ \alpha + 2\alpha',\ 2\alpha + \alpha' \notin \Phi \Rightarrow \langle\alpha,\alpha'\rangle =$

$= \{\pm\alpha,\ \pm\alpha',\ \pm(\alpha+\alpha')\} \simeq A_2$

<u>Beweis</u>: [3, VII, Lemma 1,2] (Man beachte, daß Typ $\Phi \neq G_2$ wegen rg $\Phi \geqslant 3$).

Im zu Φ gehörenden Wurzelgitter bezeichne $(\ ,\ )$ ein unter der Weylgruppe von Φ invariantes (positives) Skalarprodukt. Für die Cartan-Zahl von $\alpha,\alpha' \in \Phi$ gilt dann $n(\alpha',\alpha) = 2\,\frac{(\alpha',\alpha)}{(\alpha,\alpha)}$.

<u>H 3:</u> Seien $\alpha,\alpha' \in \Phi$ linear unabhängig. Dann gilt

i) $(\alpha,\alpha) \leq (\alpha',\alpha') \Rightarrow n(\alpha,\alpha') \in \{0,\pm 1\}$,

ii) $(\alpha,\alpha) > (\alpha',\alpha') \Rightarrow n(\alpha,\alpha') \in \{0,\pm 2\}$,

iii) $n(\alpha,\alpha') > 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha-\alpha' \in \Phi$.

<u>Beweis</u>: [2,VI,1.3]

Es sei $\mathfrak{g}$ die zu Φ gehörige komplexe Lie-Algebra. $\mathfrak{g}$ besitzt eine Chevalley-Basis $\{X_\alpha, H_{\alpha'} | \alpha \in \Phi, \alpha' \in \Pi\}$ mit folgenden Eigenschaften [3]:

$$[X_\alpha, X_{\alpha'}] = N_{\alpha,\alpha'} X_{\alpha+\alpha'}, \quad \text{falls} \quad \alpha+\alpha' \neq 0,$$

mit $N_{\alpha,\alpha'} = c_{11,\alpha,\alpha'} \in \{0,\pm 1,\pm 2\}$, wenn $\alpha+\alpha' \in \Phi$ (cf.(B), hier ist wieder $\operatorname{rg}\Phi \geq 3$ wesentlich), $N_{\alpha,\alpha'} = 0$, falls $\alpha+\alpha' \notin \Phi \cup \{0\}$;

ferner

$$[X_\alpha, X_{-\alpha}] \in \sum_{\alpha' \in \Pi} \mathbb{Z}\, H_{\alpha'};\ [H_{\alpha'}, X_\alpha] = n(\alpha,\alpha') X_\alpha \quad (\alpha \in \Phi, \alpha' \in \Pi).$$

Hieraus resultieren Identitäten für die Zahlen $N_{\alpha,\alpha'}$, beispielsweise $N_{\alpha,\alpha'} = - N_{\alpha',\alpha}$, und insbesondere aus der Jacobi-Identität

<u>H 4:</u> Sind $\alpha,\beta,\gamma \in \Phi$ paarweise linear unabhängig und $\alpha+\beta+\gamma \neq 0$, so ist

$$N_{\alpha,\beta+\gamma} N_{\beta,\gamma} + N_{\beta,\gamma+\alpha} N_{\gamma,\alpha} + N_{\gamma,\alpha+\beta} N_{\alpha,\beta} = 0.$$

Wir halten ferner fest, daß $|N_{\alpha,\alpha'}| = 2$ genau dann gilt, wenn α,α' kurze Wurzeln sind, $\alpha+\alpha' \in \Phi$ dagegen lang ist. In diesem Fall setzen wir $\hat{N}_{\alpha,\alpha'} := \frac{1}{2} N_{\alpha,\alpha'}$.

<u>Beweis von Satz 2</u>:

Sei also Φ irreduzibel, reduziert und vom Rang $\operatorname{rg}\Phi \geq 3$.

Φ_l bezeichne die Menge der langen Wurzeln in Φ (im Fall konstanter Wurzellänge seien dies per definitionem alle Wurzeln), $\Phi_k := \Phi - \Phi_l$.

Für $m \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \Phi$ sei $\alpha_m := m$, falls $\Phi_k = \emptyset$ oder $\alpha \in \Phi_k$, $\alpha_m := 2m$, falls $\Phi_k \neq \emptyset$ und $\alpha \in \Phi_l$, ferner definieren wir eine Gruppe $\tilde{G}_m$ durch die Erzeugenden $\{x_\alpha(at^\mu) \mid a \in \Phi;\ \alpha \in k;\ \mu \in \mathbb{N} \cup \{0\},\ \mu \leq \alpha_m\}$ und durch folgende Relationen (R_m)

(a_m) $\qquad x_\alpha(at^\mu)x_\alpha(bt^\mu) = x_\alpha((a+b)t^\mu)$

(b_m) $\qquad [x_\alpha(at^\mu), x_{\alpha'}(bt^\nu)] = 1 \qquad$ falls $\alpha+\alpha' \notin \Phi \cup \{0\}$

(b'_m) $\qquad [x_\alpha(at^\mu), x_{\alpha'}(bt^\nu)] = x_{\alpha+\alpha'}(N_{\alpha,\alpha'}abt^{\mu+\nu})$

falls $\alpha, \alpha', \alpha+\alpha' \in \Phi$, $2\alpha+\beta, \alpha+2\beta \notin \Phi$

(b''_m) $\qquad [x_\alpha(at^\mu), x_{\alpha'}(bt^\nu)] = x_{\alpha+\alpha'}(N_{\alpha,\alpha'}abt^{\mu+\nu}) \cdot x_{2\alpha+\alpha'}(N_{\alpha,\alpha'}\hat{N}_{\alpha,\alpha+\alpha'}a^2bt^{2\mu+\nu})$ falls $\alpha, \alpha', \alpha+\alpha', 2\alpha+\alpha' \in \Phi$.

Dabei sei stets $a, b \in k$, $\alpha, \alpha' \in \Phi$, und für die auftretenden Exponenten mögen die entsprechenden Ungleichungen gelten, also $0 \leq \mu \leq \alpha_m$, $0 \leq \nu \leq \alpha'_m$ und in den Relationen (b'_m), (b''_m) $\mu+\nu \leq (\alpha+\alpha')_m$, was im Fall (b''_m) wegen $\alpha, \alpha+\alpha' \in \Phi_k$, $\alpha', 2\alpha+\alpha' \in \Phi_l$ die Ungleichung $2\mu+\nu \leq (2\alpha+\alpha')_m$ bereits nach sich zieht.

Es ist klar, daß kanonische Homomorphismen $\varphi_m : \tilde{G}_m \to \tilde{G}_{m+1}$ existieren, und wir zeigen: Für $m \geq 3$ ist φ_m ein Isomorphismus, oder anders ausgedrückt: In $\tilde{G}_m$ existieren Elemente $x_\alpha(at^\mu)$, $\alpha_m < \mu \leq \alpha_{m+1}$, so daß (R_{m+1}) gilt.

Damit ist dann Satz 2 bewiesen, denn es ist andererseits leicht zu sehen, daß $\tilde{G}$ der induktive Limes der $\tilde{G}_m$ ist. (Hierzu hat man sich nur zu überlegen, daß es genügt, die Relationen (A), (B) für Monome zu fordern, was ohne weiteres mit H1 folgt.)

Für den Rest des Beweises unterscheiden wir, ob Φ symplektisch ist oder nicht, und betrachten zunächst:

1. Φ hat konstante Wurzellänge.

In diesem Fall ist $\alpha_m = m$ für alle $\alpha \in \Phi$, und die Relationen (b''_m) treten nicht auf.

1.1 Proposition:

Sei $\alpha,\beta,\alpha+\beta \in \Phi$; $\mu,\nu \leq m$, $\mu+\nu = m+1$; $a,b \in k$.

i) Gilt für $\alpha',\beta' \in \Phi$: $\alpha'+\beta' = \alpha+\beta$, für $\mu',\nu' \leq m$: $\mu'+\nu' = \mu+\nu$, und für $a',b' \in k$:

$$N_{\alpha,\beta}ab = N_{\alpha',\beta'}a'b',$$

so ist

$$[x_\alpha(at^\mu),\ x_\beta(bt^\nu)] = [x_{\alpha'}(a't^{\mu'}), x_{\beta'}(b't^{\nu'})].$$

ii) Für $\gamma \in \{\alpha,\beta,\alpha+\beta\}$, $\mu' \leq m$, $c \in k$ gilt

$$[[x_\alpha(at^\mu),\ x_\beta(bt^\nu)],\ x_\gamma(ct^{\mu'})] = 1.$$

Beweis:

i) Nehmen wir zunächst an, $\alpha,\beta,\alpha',\beta'$ erzeugten einen $\mathbb{Z}$-Modul vom Rang 3. Dann ist

$$1 = n(\alpha+\beta,\alpha') = n(\alpha,\alpha')+n(\beta,\alpha'),$$

also nach H3i) $n(\alpha,\alpha') = 1$, $n(\beta,\alpha') = 0$ oder umgekehrt.

Ist $n(\alpha,\alpha') = 1$, so ist nach H2, H3 $\alpha-\alpha' = \beta'-\beta \in \Phi$, $\alpha+\alpha',\beta+\beta'$, $\alpha\pm\beta'$, $\alpha'\pm\beta \notin \Phi \cup \{0\}$, und aus (R_m) folgt (mit geeigneten $c,c',\ldots \in k$)

$$\begin{aligned}
[x_\alpha(at^\mu),\ x_\beta(bt^\nu)] &= [x_\alpha(at^\mu),\ [x_{\beta-\beta'}(ct^{\nu-1}), x_{\beta'}(t)]] \\
&= [x_{\alpha'}(c't^m),\ x_{\beta'}(t)x_\beta(bt^\nu)] && \text{nach H1 iii) wegen } \alpha+\beta' \notin \Phi\cup\{0\} \\
&= [x_{\alpha'}(c't^m),\ x_{\beta'}(t)] && \text{wegen } \alpha'+\beta \notin \Phi\cup\{0\},
\end{aligned}$$

dabei ist $c' = N_{\alpha,\beta-\beta'} N_{\beta-\beta',\beta'} ab = N_{\alpha,\beta} N_{\alpha',\beta'} ab = a'b'$ nach H4.

Symmetrisch ist

$$[x_{\alpha'}(a't^{\mu'})x_{\beta'}(b't^{\nu'})] = [x_{\alpha}(abt^{m}),\ x_{\beta}(t)]$$
$$= [x_{\alpha'}(c't^{m}),x_{\beta'}(t)].$$

Ist $n(\alpha,\alpha') = 0$, $n(\beta,\alpha') = 1$, so hat man nach dem eben bewiesenen wegen $N_{\alpha,\beta} = - N_{\beta,\alpha}$

$$[x_{\alpha}(at^{\mu}),x_{\beta}(bt^{\nu})] = {}^{x_{\alpha}(at^{\mu})}[x_{\beta}(bt^{\nu}),x_{\alpha}(-at^{\mu})]$$
$$= {}^{x_{\alpha}(at^{\mu})}[x_{\alpha'}(a't^{\mu'}),x_{\beta'}(b't^{\nu'})]$$
$$= [x_{\alpha'}(a't^{\mu'}),\ x_{\beta'}(b't^{\nu'})].\quad \text{nach } (b_m) \text{ wegen } \alpha+\alpha',\alpha+\beta' \notin \Phi.$$

Erzeugen nun $\alpha,\beta,\alpha',\beta'$ einen $\mathbb{Z}$-Modul vom Rang 2, so läßt sich wegen $\operatorname{rg}\Phi \geqslant 3$ stets ein Paar $\alpha'',\beta'' \in \Phi$ derart finden, daß $\alpha+\beta = \alpha''+\beta''$ und daß $\alpha,\beta,\alpha'',\beta''$ einen $\mathbb{Z}$-Modul vom Rang 3 erzeugen. Sodann ist

$$[x_{\alpha}(at^{\mu}),x_{\beta}(bt^{\nu})] = [x_{\alpha''}(N_{\alpha,\beta}N_{\alpha'',\beta''}\, abt^{m}),x_{\beta''}(t)]$$
$$= [x_{\alpha''}(N_{\alpha',\beta'}N_{\alpha'',\beta''}a'b't^{m}),x_{\beta''}(t)] = [x_{\alpha'}(a't^{\mu'}),x_{\beta'}(b't^{\nu'})].$$

Damit ist i) gezeigt; aber auch ii) folgt ohne weiteres: Nach den obigen ist nämlich für passendes $c' \in k$ wegen $\alpha''+\gamma,\beta''+\gamma \notin \Phi \cup \{0\}$

$$[[x_{\alpha}(at^{\mu}),x_{\beta}(bt^{\nu})],\ x_{\gamma}(ct^{\mu'})]$$
$$= [[x_{\alpha''}(c't^{m}),x_{\beta''}(t)],x_{\gamma}(ct^{\mu'})] = 1.$$

<u>1.2</u> Da Φ irreduzibel ist, existiert zu $\alpha \in \Phi$ ein $\alpha' \in \Phi$ mit $\alpha-\alpha' \in \Phi$, und nach 1.1 i) ist folgende Definition sinnvoll:

$$x_{\alpha}(at^{m+1}) := [x_{\alpha-\alpha'}(N_{\alpha-\alpha',\alpha'}at^{m}),x_{\alpha'}(t)]$$

H1 ii) und 1.1 ii) liefern sofort die Relation (a_{m+1}).
Für das weitere fixieren wir für das Wurzelsystem vom Rang 3 die Bezeichnungen anhand des Dynkin-Diagramms in folgender Weise:

$$\overset{\alpha}{\circ}\!-\!\!-\!\!-\!\overset{\beta}{\circ}\!-\!\!-\!\!-\!\overset{\gamma}{\circ}$$

Beim Beweis von (b'_{m+1}) dürfen wir nach H2 $\alpha' = \beta$ annehmen und berechnen:

$$
\begin{aligned}
& [x_\alpha(a),\ x_\beta(bt^{m+1})] \\
= {} & [x_\alpha(a),\ [x_{\beta+\gamma}(t),\ x_{-\gamma}(b't^m)]] && \text{nach Definition, } b' \in k \text{ geeignet} \\
= {} & [x_{\alpha+\beta+\gamma}(a't),\ {}^{x_{\beta+\gamma}(t)}x_{-\gamma}(b't^m)] && \text{nach H1 iii), } a' \in k \text{ geeignet} \\
= {} & {}^{x_{\beta+\gamma}(t)}[x_{\alpha+\beta+\gamma}(a't),\ x_{-\gamma}(b't^m)] && \text{nach } (R_m) \\
= {} & {}^{x_{\beta+\gamma}(t)}[x_{\alpha+\beta+\gamma}(a't^2),\ x_{-\gamma}(b't^{m-1})] && \text{nach 1.1 i)} \\
= {} & [[x_\alpha(at),\ x_{\beta+\gamma}(t)],\ {}^{x_{\beta+\gamma}(t)}x_{-\gamma}(b't^{m-1})] && \text{nach 1.1 ii)} \\
= {} & [x_\alpha(at),\ x_\beta(bt^m)] && \text{nach H1 iii)}
\end{aligned}
$$

Mit 1.1 i) ist daher (b'_{m+1}) bewiesen.

Beweisen wir nun (b_{m+1}). Der Fall $\alpha = \alpha'$ ist für $\mu = \nu = m+1$ in (a_{m+1}), für $m+1 = \mu > \nu$ in 1.1 ii) enthalten.

Für $\alpha \neq \alpha'$ induzieren wir nach $\mu+\nu$.

Sei $n(\alpha,\alpha') > 0$, so darf nach H2 $\alpha' = \alpha+\beta$ angenommen werden, und es ist

$$[x_\alpha(at^\mu),\ x_{\alpha+\beta}(bt^{\nu+1})] = [x_\alpha(at^\mu),\ [x_{\alpha+\beta+\gamma}(b't^\nu),\ x_{-\gamma}(t)]] = 1$$

mit passendem $b' \in k$ (nach (b'_{m+1})).

Ist $n(\alpha,\alpha') = 0$, darf - ebenfalls nach H2 - $\alpha' = \gamma$ gesetzt werden. Dann ist im Fall $b \neq 0$ mit $\epsilon = 0$, falls $\nu > 0$, $\epsilon = 1$, falls $\nu = 0$, $\mu = m+1-\epsilon$

$$
\begin{aligned}
{}^{x_\gamma(bt^\nu)}x_\alpha(at^{m+1}) &= {}^{x_\gamma(bt^\nu)}[x_{-\beta}(a't^\mu), x_{\alpha+\beta}(t^\epsilon)] && \text{nach } (b'_{m+1}) \\
&= [x_{-\beta}(a't^\mu), {}^{x_\gamma(bt^\nu)}x_{\alpha+\beta}(t^\epsilon)] && \text{wegen } n(-\beta,\gamma) > 0 \\
&= [[x_{-\beta-\gamma}(a''t^{\mu-\nu}), x_\gamma(bt^\nu)], {}^{x_\gamma(bt^\nu)}x_{\alpha+\beta}(t^\epsilon)] && \text{nach } (b'_{m+1}) \\
&= [x_{-\beta-\gamma}(a''t^{\mu-\nu}), [x_\gamma(bt^\nu), x_{\alpha+\beta}(t^\epsilon)]] && \text{nach H1 iii) und } (b_m) \\
&= x_\alpha(a''' t^{m+1}) && \text{nach } (b'_{m+1})
\end{aligned}
$$

mit passenden Konstanten, und zwar ist nach H4

$$a''' = N_{-\beta-\gamma,\alpha+\beta+\gamma}\, N_{\gamma,\alpha+\beta}\, N_{-\beta-\gamma,\gamma}\, N_{-\beta,\alpha+\beta}\; a = a.$$

Damit ist der Fall konstanter Wurzellänge erledigt.

2. Φ ist nichtsymplektisch.

In diesem Fall ist $\Phi_1 \subseteq \Phi$ ein Wurzelsystem vom gleichen Rang wie Φ, und wegen $\operatorname{rg} \Phi \geq 3$ ist Φ_1 sogar irreduzibel. Da für $\alpha \in \Phi_1$ $\alpha_m = 2m$ ist, folgt also nach 1. die Menge der Relationen in (R_{m+1}), an denen lediglich lange Wurzeln beteiligt sind, aus (R_m) für $m \geq 1$. Wir dürfen daher annehmen, daß alle diese Relationen $(R_{m'})$ für beliebiges $m' \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ bereits in $\tilde{G}_m$ für $m \geq 3$ gelten, und haben dann unter Voraussetzung von (R_m) für $\alpha \in \Phi_k$, $a \in k$ ein Element $x_\alpha(at^{m+1}) \in \tilde{G}_m$ zu definieren und (R_{m+1}) zu verifizieren.

Für den Fall $\operatorname{rg} \Phi = 3$ fixieren wir wieder die Bezeichnungen:

$$\overset{\alpha}{\circ} \Leftarrow \overset{\beta}{\circ} - \overset{\gamma}{\circ}$$

<u>2.1</u> Für $\alpha \in \Phi_k$, $\alpha' \in \Phi_1$, $\mu \leq m$, $\nu \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ mit $n(\alpha,\alpha') > 0$ gilt

$$[x_\alpha(at^\mu),\ x_{\alpha'}(bt^\nu)] = 1.$$

<u>Beweis</u>: Durch Induktion nach ν. Nach H2 darf $\alpha' = 2\alpha+\beta$ angenommen werden, und es ist nach Induktionsannahme und nach (b_m):

$$[x_\alpha(at^\mu),x_{\alpha'}(bt^{\nu+1})] = [x_\alpha(at^\mu),[x_{\alpha'+\gamma}(bt^\nu),x_{-\gamma}(N_{\alpha'+\gamma,-\gamma}t)]]=1$$

<u>2.2 Proposition</u>:

Sei $\alpha \in \Phi_k$, $\beta \in \Phi_1$, $\alpha+\beta \in \Phi$; $\mu \leq m$, $\nu \leq 2m$, $\mu+\nu=m+1$; $a,b \in k$. Wir setzen dann $A_{\alpha,\beta}(at^\mu,bt^\nu) :=$

$$= x_{2\alpha+\beta}(-\hat{N}_{\alpha,\alpha+\beta}N_{\alpha,\beta}a^2bt^{2\mu+\nu})[x_\alpha(at^\mu),\ x_\beta(bt^\nu)].$$

i) Gilt für $\alpha' \in \Phi_k$, $\beta' \in \Phi_1$: $\alpha'+\beta' = \alpha+\beta$, für $\mu' \leq m$, $\nu' \leq 2m$: $\mu'+\nu' = \mu+\nu$, und für $a',b' \in k$: $N_{\alpha',\beta'}a'b' = N_{\alpha,\beta}ab$, so ist

$$A_{\alpha,\beta}(at^\mu,bt^\nu) = A_{\alpha',\beta'}(a't^{\mu'},b't^{\nu'}).$$

ii) Für $\gamma \in \{\beta,\alpha+\beta,2\alpha+\beta\}$, $\mu' \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $c \in k$ gilt

$$[A_{\alpha,\beta}(at^\mu,bt^\nu),\ x_\gamma(ct^{\mu'})] = 1,$$

falls $\mu' \leq \begin{cases} m \\ 2m \end{cases}$ für $\gamma = \begin{cases} \alpha+\beta \\ \beta \end{cases}$.

<u>Beweis</u>:

i) Sei wieder zunächst angenommen, $\alpha,\beta,\alpha',\beta'$ erzeugten einen $\mathbb{Z}$-Modul vom Rang 3. Dann ist

$$0 = n(\alpha+\beta,\alpha') = n(\alpha,\alpha')+n(\beta,\alpha')$$
$$1 = n(\alpha'+\beta',\beta) = n(\alpha',\beta) + n(\beta',\beta),$$

hieraus folgt nach H3: $n(\alpha,\alpha') = n(\beta,\alpha') = n(\alpha',\beta) = 0$, also $n(\beta',\beta) = 1$, $\beta'-\beta = \alpha-\alpha' \in \Phi_1$, also nach H2: $\alpha\pm\alpha' \in \Phi_1$. Symmetrisch ist $n(\alpha,\beta') = 0$, und es ist $\alpha\pm\beta'$, $\alpha'\pm\beta$, $\beta+\beta' \notin \Phi \cup \{0\}$.

Es ist mit geeigneten Konstanten

$$[x_{\alpha'}(a'),\ x_{\beta'}(b't^{m+1})]$$

$$= [x_{\alpha'}(a'),[x_{\beta'-\beta}(ct^{\mu}),\ x_{\beta}(bt^{\nu})]]$$

$$= [[x_{\alpha'}(a'),\ x_{\beta'-\beta}(ct^{\mu})],x_{\beta}(bt^{\nu})x_{\beta'}(b't^{m+1})] \quad \text{nach H1 iii) wegen } \alpha'+\beta \notin \Phi \cup \{0\}$$

$$= [x_{\alpha}(c't^{\mu})\ x_{\alpha+\alpha'}(dt^{\mu}),\ x_{\beta}(bt^{\nu})x_{\beta'}(b't^{m+1})] \quad \text{nach } (R_m)$$

$$= x_{2\alpha'+\beta'}(d't^{m+1})x_{2\alpha+\beta}(d''t^{2\mu+\nu})[x_{\alpha}(c't^{\mu}),\ x_{\beta}(bt^{\nu})] \quad \text{nach H1 i),ii),}$$

wobei nach H4

$$c' = N_{\alpha',\beta'-\beta}N_{\beta'-\beta,\beta}a'b'b^{-1} = N_{\alpha,\beta}N_{\alpha',\beta'}a'b'b^{-1} = a$$

$$d' = N_{\alpha+\alpha',\beta}\ N_{\alpha',\beta'-\beta}\ \hat{N}_{\alpha',\alpha}\ N_{\beta'-\beta,\beta}\ a'^2b' = N_{\alpha',\beta'}\hat{N}_{\alpha',\alpha'+\beta'}a'^2b',$$

$$d'' = N_{\alpha+\alpha',\beta'}N_{\alpha',\beta'-\beta}\ \hat{N}_{\alpha',\alpha}\ N_{\beta'-\beta,\beta}(a'b')^2b^{-1} = -N_{\alpha,\beta}\hat{N}_{\alpha,\alpha+\beta}a^2b\,.$$

Daher ist

$$A_{\alpha',\beta'}(a',b't^{m+1}) = A_{\alpha,\beta}(at^{\mu},bt^{\nu})$$

und symmetrisch

$$A_{\alpha',\beta'}(a't^{\mu'},b't^{\nu'}) = A_{\alpha,\beta}(a,bt^{m+1}) = A_{\alpha',\beta'}(a',b't^{m+1}).$$

Ist der durch $\alpha,\beta,\alpha',\beta'$ erzeugte $\mathbb{Z}$-Modul vom Rang 2, so läßt sich (wegen $\operatorname{rg}\Phi \geqslant 3$) $\alpha'' \in \Phi_k$, $\beta'' \in \Phi_1$ mit $\alpha+\beta = \alpha''+\beta''$ derart wählen, daß $\alpha,\beta,\alpha'',\beta''$ einen $\mathbb{Z}$-Modul vom Rang 3 erzeugen, und es ist

$$A_{\alpha,\beta}(at^{\mu},bt^{\nu}) = A_{\alpha'',\beta''}(N_{\alpha'',\beta''}N_{\alpha,\beta}abt^{\mu},t^{\nu})$$

$$= A_{\alpha'',\beta''}(N_{\alpha'',\beta''}N_{\alpha',\beta'}a'b't^{\mu},t^{\nu}) = A_{\alpha'\beta'}(a't^{\mu'},b't^{\nu'}).$$

ii) Im Fall $\gamma = \beta$ sei α'', β'' wie oben gewählt. Dann folgt aus

$$[A_{\alpha'',\beta''}(at^{\mu}, bt^{\nu}), x_{\beta}(ct^{\mu'})] = 1$$

für alle $a,b,c \in k$, $\mu \leqslant m$, $\mu', \nu \leqslant 2m$ mit i) sofort die Behauptung. Für $\gamma = \alpha+\beta$ folgt die Behauptung aus einer einfachen Rechnung (für $\mu' \leqslant m$), für $\gamma = 2\alpha+\beta$ (für beliebiges μ') aus 2.1 wegen $n(\alpha, 2\alpha+\beta) > 0$.

<u>2.3</u> Da Φ irreduzibel ist, existiert zu $\alpha \in \Phi_k$ stets $\alpha' \in \Phi_1$ mit $\alpha - \alpha' \in \Phi_k$, daher ist nach 2.2 i) die folgende Definition sinnvoll

$$x_{\alpha}(at^{m+1}) := A_{\alpha-\alpha',\alpha'}(N_{\alpha-\alpha',\alpha}t, at^{m}).$$

Unter Verwendung von 2.2 ii) beweist man sofort mit H1 i) die Relationen $((a_{m+1})$ und (b_{m+1}) für $\alpha = \alpha' \in \Phi_k$.

<u>2.4</u> Wir zeigen nun (b''_{m+1}). Dazu müssen wir erstmalig $m \geqslant 3$ voraussetzen. Es darf (nach H2) $\alpha' = \beta$ angenommen werden. Wir setzen zur Abkürzung

$$\delta := \alpha+\beta+\gamma \in \Phi_k,\ \eta := N_{\delta,-\beta-\gamma} N_{-\beta-\gamma,\beta},\ u := x_{\alpha+\delta}(-\hat{N}_{\delta,\alpha}\eta a t^{m+2}),$$

$$v := x_{-\beta-\gamma}(-N_{-\beta-\gamma,\beta}at^{m})$$ und bekommen

$$[x_{\alpha}(at^{m+1}), x_{\beta}(b)]\, x_{2\alpha+\beta}(-N_{\alpha,\beta}\, \hat{N}_{\alpha,\alpha+\beta}\, a^2bt^{2m+2})$$

$$= [u\,[x_{\delta}(\eta t), v^{-1}], x_{\beta}(b)]\, x_{2\alpha+\beta}(-N_{\alpha,\beta}\, \hat{N}_{\alpha,\alpha+\beta}a^2bt^{2m+2}) \quad \text{nach } 2.3$$

$$= {}^{u}[[x_{\delta}(\eta t), v^{-1}], x_{\beta}(b)]\, x_{2\alpha+\beta}(-N_{\alpha,\beta}\, \hat{N}_{\alpha,\alpha+\beta}\, a^2bt^{2m+2})$$

$$\cdot x_{2(\alpha+\beta)+\gamma}(cabt^{m+2}) \quad \text{nach H1 ii)}$$

Mittels mehrfacher Anwendung von H4 berechnet man

$$c = N_{\alpha+\delta,\beta}\, \hat{N}_{\alpha,\delta}\, N_{\delta,-\beta-\gamma}\, N_{-\beta-\gamma,\beta} =$$

$$= N_{-\beta-\gamma,2(\alpha+\beta)+\gamma}\, N_{-\beta-\gamma,\beta}\, N_{\alpha,\beta}\, \hat{N}_{\alpha,\alpha+\beta} = N_{\delta,-\gamma}\, \hat{N}_{\delta,\alpha+\beta},$$

daher bekommt man für den obigen Ausdruck mit H1 iii)

$$ {}^{uv}[x_\delta(\eta t),\ [v^{-1},x_\beta(b)]]\cdot {}^{v}x_{2(\alpha+\beta)+\gamma}(cabt^{m+2}) $$

$$ = {}^{uv}([x_\delta(\eta t),\ x_{-\gamma}(abt^{m})]\ x_{2(\alpha+\beta)+\gamma}(cabt^{m+2})) $$

$$ = {}^{uv}([x_\delta(\eta),\ x_{-\gamma}(abt^{m+1})]x_{2(\alpha+\beta)+\gamma}(cabt^{m+1})) \qquad \text{nach 2.2 i)} $$

$$ = {}^{uv}([x_\delta(\eta),\ [v^{-1},x_\beta(bt)]]x_{2(\alpha+\beta)+\gamma}(cabt^{m+1})) $$

$$ = {}^{u}[[x_\delta(\eta),v^{-1}],\ x_\beta(bt)]\ {}^{v}x_{2(\alpha+\beta)+\gamma}(cabt^{m+1}) \qquad \text{nach H1 iii)} $$

$$ = {}^{u}[\ x_\alpha(at^{m})x_{\alpha+\delta}(\hat{N}_{\delta,\alpha}\eta at^{m}),x_\beta(bt)]\ {}^{v}x_{2(\alpha+\beta)+\gamma}(cabt^{m+1}) \qquad \text{nach}(b''_m) $$

$$ = x_{2(\alpha+\beta)+\gamma}(-cabt^{m+1})\cdot {}^{u}[x_\alpha(at^{m}),x_\beta(bt)]\cdot {}^{v}x_{2(\alpha+\beta)+\gamma}(cabt^{m+1}) $$

nach H1 i)

$$ = [x_\alpha(at^{m}),\ x_\beta(bt)x_{2(\alpha+\beta)+\gamma}(cabt^{m+3})]\cdot x_{2\alpha+\beta}(-N_{\alpha,\beta}\hat{N}_{\alpha,\alpha+\beta}a^2b^{2m+1}) $$

$$ = A_{\alpha,\beta}(at^{m},bt) $$

falls $m \geqslant 3$. Zusammen mit 2.2 i) bedeutet dies (b''_{m+1}).

<u>2.5</u> Der in diesem Abschnitt zu erbringende Nachweis von (b_{m+1}) für $\alpha' \in \Phi_1$ wird sich verhältnismäßig kompliziert gestalten. Wir dürfen nach H3 wieder $\alpha' = \gamma$ im Fall $n(\alpha,\alpha') = 0$ und $\alpha' = 2\alpha+\beta$ im Fall $n(\alpha,\alpha') > 0$ annehmen. Der Beweis wird in mehreren Schritten geführt:

<u>2.5.1</u> Für $\mu \leqslant m+1$, $\mu+\nu \leqslant 3m$ gilt $[x_\alpha(at^{\mu}),x_\gamma(bt^{\nu})] = 1$.

<u>Beweis</u>:

i) Sei zunächst $\mu \leqslant m$, dann ist $\nu' = \nu-2m \geqslant 0$ keine Einschränkung, und es gilt $\mu+\nu' \leqslant m$. Sei

$$ x_{\alpha+\beta+\gamma}(at^{\mu+\nu'}) = x_{2\alpha+\beta+\gamma}(c't^{2\mu+\nu'})[x_\alpha(at^{\mu}),x_{\beta+\gamma}(ct^{\nu'})], $$

mit passenden Konstanten $c, c' \in k$. Dann ist nach H1 i)

$$x_{-\beta}(b't^{2m})\, x_{\alpha+\beta+\gamma}(at^{\mu+\nu'}) =$$

$$= x_{\alpha+\beta+\gamma}(at^{\mu+\nu'}) \,.\, {}^{x_{\beta+\gamma}(ct^{\nu'})}[x_\alpha(at^\mu),\ x_\gamma(bt^\nu)].$$

Mit (b_m) folgt die Behauptung.

ii) Sei

$$x_\alpha(at^{m+1}) = x_{2\alpha+\beta+\gamma}(c't^{m+1})[x_{\alpha+\beta+\gamma}(a),\ x_{-\beta-\gamma}(ct^{m+1})],$$

so ist für $\nu \leq 2\,m-1$ wiederum nach H1 i) und nach i)

$${}^{x_\gamma(bt^\nu)}x_\alpha(at^{m+1}) = x_\alpha(at^{m+1})[x_{\alpha+\beta+\gamma}(a), x_{-\beta}(c''t^{\nu+m+1})] = x_\alpha(at^{m+1}).$$

<u>2.5.2</u> Für $\nu \leq 3\,m$ gilt nach 2.5.1

$$[x_\alpha(at^{m+1}),\ x_{2\alpha+\beta}(bt^\nu)]$$

$$= [[x_{\alpha+\beta+\gamma}(a), x_{-\beta-\gamma}(ct^{m+1})]x_{2\alpha+\beta+\gamma}(c't^{m+1}), x_{2\alpha+\beta}(bt^\nu)] = 1.$$

Damit und mit 2.1 ist (b_{m+1}) für den Fall $\alpha \in \Phi_k$, $\alpha' \in \Phi_1$, $n(\alpha,\alpha') > 0$ vollständig bewiesen.

<u>2.5.3</u> Sei $\mu \in \{m, m+1\}$; $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_1 + \epsilon_2 \in \{0,1\}$, $\mu + \epsilon_1 + \epsilon_2 \leq m+1$.

Sei ferner

$$x_\gamma(bt^{2\mu+\epsilon_1+\epsilon_2}) =$$

$$= [x_{-\alpha-\beta}(t^\mu),\ x_{2(\alpha+\beta)+\gamma}(b't^{\epsilon_1+\epsilon_2})]\ x_{\alpha+\beta+\gamma}(-b''t^{\mu+\epsilon_1+\epsilon_2}),$$

$$x_{\alpha+\beta+\gamma}(b''t^{\mu+\epsilon_1+\epsilon_2}) =$$

$$= x_{2\alpha+\beta+\gamma}(-c't^{2(\mu+\epsilon_1)+\epsilon_2})\ [x_\alpha(at^{\mu+\epsilon_1}),\ x_{\beta+\gamma}(ct^{\epsilon_2})]$$

mit
$$b' = N_{-\alpha-\beta,2(\alpha+\beta)+\gamma}\, \hat N_{-\alpha-\beta,\alpha+\beta+\gamma} b, \quad b'' = N_{-\alpha-\beta,2(\alpha+\beta)+\gamma} b';$$

$$c = N_{\alpha,\beta+\gamma} a^{-1} b'', \quad c' = N_{\alpha,\beta+\gamma}\, \hat N_{\alpha,\alpha+\beta+\gamma} a^2 c = \hat N_{\alpha,\alpha+\beta+\gamma} ab''.$$

Ferner sei $a' = N_{-\alpha-\beta,2\alpha+\beta} a$, $a'' = \hat N_{-\alpha-\beta,\alpha} a$.

Mit $H4$ erhält man dann

$$N_{2\alpha+\beta,\beta+\gamma} a'c = b', \quad N_{-\beta,\beta+\gamma} a''c = b, \quad N_{-\beta,2(\alpha+\beta)+\gamma} a''b' = -c',$$

und es folgt

$$[x_{-\alpha-\beta}(t^{\mu}),\ x_{2(\alpha+\beta)+\gamma}(b't^{\epsilon_1+\epsilon_2})]$$

$$= [x_{-\alpha-\beta}(t^{\mu}), [x_{2\alpha+\beta}(a't^{\epsilon_1}),\ x_{\beta+\gamma}(ct^{\epsilon_2})]]$$

$$= [x_{\alpha}(at^{\mu+\epsilon_1})\ x_{-\beta}(a''t^{2\mu+\epsilon_1}), x_{\beta+\gamma}(ct^{\epsilon_2})\ x_{2(\alpha+\beta)+\gamma}(b't^{\epsilon_1+\epsilon_2})]$$

nach 2.5.1 und H1 iii)

$$= {}^{x_{\alpha}(at^{\mu+\epsilon_1})} x_{\gamma}(bt^{2\mu+\epsilon_1+\epsilon_2}) x_{2\alpha+\beta+\gamma}(-c't^{2(\mu+\epsilon_1)+\epsilon_2}) \cdot$$

$$\cdot [x_{\alpha}(at^{\mu+\epsilon_1}), x_{\beta+\gamma}(ct^{\epsilon_2})],$$ letzteres nach 2.5.2 und H1 i), ii).

Nach 2.4 bedeutet dies
$$[x_{\alpha}(at^{\mu+\epsilon_1}),\ x_{\gamma}(bt^{2\mu+\epsilon_1+\epsilon_2})] = 1,$$

also für $\mu = m$, $\epsilon_2 = 1$:

$$(1)\quad [x_{\alpha}(at^{m}),\ x_{\gamma}(bt^{2m+1})] = 1,$$

für $\mu = m$, $\epsilon_1 = 1$ oder $\mu = m+1$:

$$(2)\quad [x_{\alpha}(at^{m+1}),\ x_{\gamma}(bt^{2m+i})] = 1 \qquad (i=1,2).$$

Ähnlich wie in 2.5.1 sei für $\mu \leqslant m$

$$x_{\alpha+\beta+\gamma}(at^{\mu+1}) = x_{2\alpha+\beta+\gamma}(c't^{2\mu+1})[x_{\alpha}(at^{\mu}),\ x_{\beta+\gamma}(ct^{\nu})].$$

Unter Verwendung von 2.5.2 erhält man

$$x_{-\beta}(b't^{2m+1})\ {}^{x_{\alpha+\beta+\gamma}(at^{\mu+1})}$$

$$= x_{\alpha+\beta+\gamma}(at^{\mu+1}) \cdot {}^{x_{\beta+\gamma}(ct)}[x_{\alpha}(at^{\mu}),\ x_{\gamma}(bt^{2m+2})],$$

und für $\mu = m-1, m$ folgt aus (1) bzw. (2) (angewandt auf das Paar $(\alpha+\beta+\gamma, -\beta)$ anstelle (α,γ)):

$$[x_\alpha(at^\mu),\ x_\gamma(bt^{2m+2})] = 1.$$

Schließlich sei

$$x_\alpha(at^{m+1}) = x_{2\alpha+\beta+\gamma}(c't^{2m+1})[x_{\alpha+\beta+\gamma}(at^m),\ x_{-\beta-\gamma}(ct)],$$

so folgt ähnlich mit (1)

$$\begin{aligned} {}^{x_\gamma(bt^{2m})}x_\alpha(at^{m+1}) &= x_\alpha(at^{m+1})[x_{\alpha+\beta+\gamma}(at^m), x_{-\beta}(c''t^{2m+1})] \\ &= x_\alpha(at^{m+1}), \end{aligned}$$

und damit ist mit

$$[x_\alpha(at^{m+1}),\ x_\gamma(bt^{2m})] = 1$$

die letzte der möglichen Relationen (b_{m+1}) für $\alpha' \in \Phi_1$ als gültig nachgewiesen.

<u>2.6</u> Zum Beweis von (b'_{m+1}) dürfen wir annehmen, daß $\alpha, \alpha' \in \Phi_k$ ist.

i) $\alpha+\alpha' \in \Phi_1$. Nach H2 darf $\alpha' = \alpha+\beta$ angenommen werden.

Wir führen eine Induktion nach $\mu+\nu$ durch: Für $\mu \leq m+1, \nu \leq m$ ist

$$\begin{aligned} &[x_\alpha(at^\mu),\ x_{\alpha+\beta}(bt^{\nu+1})] \\ &= [x_\alpha(at^\mu), [x_{\alpha+\beta+\gamma}(b't^\nu),\ x_{-\gamma}(t)]] \\ &= [x_{2\alpha+\beta+\gamma}(ct^{\mu+\nu}),\ x_{-\gamma}(t)] \quad \text{nach H1 iii), Induktionsannahme und } (b_{m+1}) \\ &= x_{2\alpha+\beta}(c't^{\mu+\nu+1}), \end{aligned}$$

hierbei ist nach H4

$$c' = N_{2\alpha+\beta+\gamma,-\gamma} N_{\alpha,\alpha+\beta+\gamma}\, N_{\alpha+\beta+\gamma,-\gamma}\, ab = N_{\alpha,\alpha+\beta}\, ab.$$

ii) $\alpha+\alpha' \in \Phi_k$. Dieser Fall kann nur auftreten, wenn Typ $\Phi = F_4$ ist. Wir normieren die Bezeichnungen:

$$\overset{\alpha}{\circ}\!-\!\!-\!\!-\!\overset{\beta}{\circ} \Leftarrow \overset{\gamma}{\circ}\!-\!\!-\!\!-\!\overset{\delta}{\circ}$$

Es genügt, den Fall $\alpha' = \beta$ zu betrachten (H2). Dann ist mit geeigneten Konstanten für $a \neq 0$

$$x_\beta(bt^m) = [x_{-\alpha-\beta-\gamma}(b't^{m-1}),\ x_{\alpha+2\beta+\gamma}(at)]$$

$$= [x_{-\alpha-\beta-\gamma}(b't^{m-1}),\ x_{2(\alpha+\beta)+\gamma}(-a't^2)[x_\alpha(at),\ x_{2\beta+\gamma}(\eta)]]$$

$$= \ x_{\alpha+\beta}(-N_{\alpha,\beta}abt^{m+1})x_{-\gamma}(ct^{2m}).u$$

mit $u = {}^{x_{2(\alpha+\beta)+\gamma}(-a't^2)}[x_{-\alpha-\beta-\gamma}(b't^{m-1}),\ [x_\alpha(at), x_{2\beta+\gamma}(\eta)]]$

nach H1 i), denn nach H4 ist

$N_{-\alpha-\beta-\gamma,2(\alpha+\beta)+\gamma}b'a' = N_{-\alpha-\beta-\gamma,2(\alpha+\beta)+\gamma}N_{-\alpha-\beta-\gamma,\alpha+2\beta+\gamma}\hat{N}_{\alpha,\alpha+2\beta+\gamma}ab =$
$N_{\alpha,\beta}ab.$

Wir haben daher

$$x_{\alpha+\beta}(N_{\alpha,\beta}abt^{m+1})x_\beta(bt^m)$$

$$= \ x_{-\gamma}(ct^{2m})[x_{-\beta-\gamma}(c't^m),\ {}^{x_\alpha(at)}x_{2\beta+\gamma}(\eta)] \qquad \text{nach H1 iii)}$$

$$= {}^{x_\alpha(at)}(x_{-\gamma}(ct^{2m})[x_{-\beta-\gamma}(c't^m),\ x_{2\beta+\gamma}(\eta)]),$$

und nach H4 ist

$$c'\eta = N_{-\alpha-\beta-\gamma,\ \alpha+2\beta+\gamma}\ N_{-\alpha-\beta-\gamma,\alpha}\ N_{\alpha,2\beta+\gamma}b = N_{-\beta-\gamma,2\beta+\gamma}b$$

und

$$c = -N_{-\alpha-\beta-\gamma,2(\alpha+\beta)+\gamma}\ \hat{N}_{-\alpha-\beta-\gamma,\alpha+\beta}\ \hat{N}_{\alpha,\alpha+2\beta+\gamma}b^2$$

$$= -N_{-\beta-\gamma,2\beta+\gamma}\ \hat{N}_{-\beta-\gamma,\beta}\ \eta\cdot b^2.$$

Also ist

(*) $\qquad [x_\alpha(at),\ x_\beta(bt^m)] = x_{\alpha+\beta}(N_{\alpha,\beta}abt^{m+1}).$

Ist nun $\mu+\nu = m+1$ und $\nu > 0$, so ist daher ebenfalls mit H4

$$[x_\alpha(at^\mu),\ x_\beta(bt^\nu)]$$

$$= \quad [x_\alpha(at^\mu), [x_{2\beta+\gamma}(\eta t^{\nu-1}),\ x_{-\beta-\gamma}(bt)]]$$

$$= \quad [x_{\alpha+2\beta+\gamma}(\eta' at^m),\ {}^{x_{2\beta+\gamma}(\eta t^{\nu-1})} x_{\beta-\gamma}(bt)] \qquad \text{nach H1 iii)}$$

$$= \quad {}^{x_{2\beta+\gamma}(\eta t^{\nu-1})} x_{\alpha+\beta}(N_{\alpha,\beta} abt^{m+1}) \qquad \text{nach } (*)$$

$$= \quad x_{\alpha+\beta}(N_{\alpha,\beta} abt^{m+1}),$$

was für (b'_{m+1}) gezeigt werden mußte.

<u>2.7</u> Im Fall (b_{m+1}) ist noch die Situation $\alpha, \alpha' \in \Phi_k, \alpha+\alpha' \notin \Phi \cup \{0\}$ zu behandeln. Wiederum tritt dies nur ein, wenn Typ $\Phi = F_4$ ist, und wir dürfen nach H2 mit den im letzten Abschnitt eingeführten Bezeichnungen $\alpha' = \alpha+\beta$ annehmen. Dann ist für $\mu \leq m+1$

$$[x_\alpha(at^\mu),\ x_{\alpha+\beta}(bt^{m+1})]$$

$$= \quad [x_\alpha(at^\mu), [x_{\alpha+2\beta+\gamma}(b't^m),\ x_{-\beta-\gamma}(t)]] \qquad \text{nach 2.6 ii)}$$

$$= \quad [x_{2(\alpha+\beta)+\gamma}(ct^{\mu+m}), x_{\alpha+\beta}(bt^{m+1}) x_{-\beta-\gamma}(t)] \qquad \text{nach H1 iii) und 2.6 i)}$$

$$= \quad 1.$$

<u>3. Φ ist symplektisch.</u>

In diesem Fall ist das durch je zwei linear unabhängige kurze Wurzeln, deren Summe nicht in Φ_1 liegt, erzeugte Untersystem enthalten in einem Teilsystem vom Typ A_{n-1}, wenn $n = \mathrm{rg}\ \Phi$. Daher dürfen wir nach Abschnitt 1 annehmen, daß im Fall $\mathrm{rg}\ \Phi \geq 4$ die Elemente $x_\alpha(at^{m+1})$ für $\alpha \in \Phi_k$, $a \in k$ in $\tilde{G}_m$ definiert und alle Relationen (R_{m+1}) nachgewiesen sind, an denen nur kurze Wurzeln beteiligt sind.

Im Fall $\operatorname{rg} \Phi = 3$ gilt in Analogie zu 1.1:

<u>3.1 Proposition</u>: Sei $\alpha, \beta, \alpha+\beta \in \Phi_k$; $\mu, \nu \leq m$, $\mu+\nu \leq m+1$; $a, b \in k$.

i) Gilt für $\alpha', \beta' \in \Phi_k$: $\alpha' + \beta' = \alpha+\beta$, für $\mu', \nu' \leq m$: $\mu' + \nu' = \mu+\nu$, und für $a', b' \in k$:

$$N_{\alpha,\beta} ab = N_{\alpha',\beta'} a'b',$$

so ist

$$[x_\alpha(at^\mu), x_\beta(bt^\nu)] = [x_{\alpha'}(a't^{\mu'}), x_{\beta'}(b't^{\nu'})].$$

ii) Für $\gamma \in \{\alpha, \beta, \alpha+\beta\}$, $\mu' \leq m$, $c \in k$ gilt

$$[[x_\alpha(at^\mu), x_\beta(bt^\nu)], x_\gamma(ct^{\mu'})] = 1.$$

<u>Beweis</u>: i) Wieder nehmen wir zunächst an, $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ erzeugten einen $\mathbb{Z}$-Modul vom Rang 3. Aus

$$1 = n(\alpha+\beta, \alpha') = n(\alpha, \alpha') + n(\beta, \alpha')$$

folgt mit H3 i) entweder $n(\alpha, \alpha') = 0$, $n(\beta, \alpha') = 1$ oder umgekehrt. Nehmen wir das erstere an, so ist $\alpha' + \beta \notin \Phi \cup \{0\}$. Aus der Annahme $\alpha+\alpha' \notin \Phi \cup \{0\}$ würde dann folgen, daß $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ in Φ ein Wurzelsystem vom Typ A_3 erzeugten, was nicht möglich ist. Daher ist notwendig $\alpha \pm \alpha' \in \Phi_1$, also auch $\beta \pm \beta' \in \Phi_1$, $\alpha+\beta' \notin \Phi \cup \{0\}$, wie man durch Betrachten der auftretenden Cartan-Zahlen in Verbindung mit H3 leicht sieht. Es ergibt sich dann für passende Konstanten

$$\begin{aligned} & [x_\alpha(at^\mu), x_\beta(bt^\nu)] \\ = \; & [x_\alpha(at^\mu), [x_{\beta-\beta'}(ct^{\nu-1}), x_{\beta'}(t)]] && \text{da } \alpha+(\beta+\beta') \notin \Phi \cup \{0\} \\ = \; & [x_{\alpha'}(c't^m) x_{\alpha'+\alpha}(c''t^{\mu+m}), x_{\beta'}(t) x_\beta(bt^\nu) x_{\beta'+\beta}(b't^{\nu+1})] && \text{nach H1 iii)} \\ = \; & [x_{\alpha'}(c't^m), x_{\beta'}(t)] && \text{nach } (b_m) \end{aligned}$$

mit $c' = a'b'$ wie im Beweis von 1.1. Der Rest des Beweises von i) sowie der von ii) erfolgt ebenfalls durch ähnliche Betrachtungen wie bei 1.1.

Die Irreduzibilität von Φ gewährleistet zu $\alpha \in \Phi_k$ die Existenz von $\alpha' \in \Phi_k$ mit $\alpha-\alpha' \in \Phi_k$, so daß nach 3.1 i) folgende Definition sinnvoll ist:

$$x_\alpha(at^{m+1}) = [x_{\alpha-\alpha'}(N_{\alpha-\alpha',\alpha'}at^m),\ x_{\alpha'}(t)].$$

H1 ii) und 3.1 ii) ergibt dann die Relation (a_{m+1}) für $\alpha \in \Phi_k$.
Für den Rest von Abschnitt 3 fixieren wir für $\operatorname{rg}\Phi = 3$ die Bezeichnungen:

$$\begin{array}{ccccc} \alpha & & \beta & & \gamma \\ \circ & \text{---} & \circ & \Leftarrow & \circ \end{array}$$

<u>3.2</u> Es gilt folgender Spezialfall von (b'_{m+1}):

$$[x_{\alpha'}(at^\mu),\ x_{\alpha''}(bt^\nu)] = x_{\alpha'+\alpha''}(N_{\alpha',\alpha''}abt^{\mu+\nu})$$

für $\alpha',\alpha'' \in \Phi_k$, $\alpha'+\alpha'' \in \Phi_1$, $\mu,\nu \leqslant m+1$, $\mu+\nu \leqslant 2m$.

<u>Beweis</u>: Nach H2 darf man $\alpha' = \beta$, $\alpha'' = \beta+\gamma$ annehmen.
Dann ist für passende Konstanten und mit H4

$$\begin{aligned}
&[x_\beta(at^\mu),\ x_{\beta+\gamma}(bt^{m+1})] \\
= \ &[x_\beta(at^\mu),[x_{-\alpha-\beta}(t),\ x_{\alpha+2\beta+\gamma}(b't^m)]] \\
= \ &[x_{-\alpha}(a't^{\mu+1}),\ {}^{x_{-\alpha-\beta}(t)}x_{\alpha+2\beta+\gamma}(b't^m)] \qquad \text{nach H1 iii)} \\
= \ &{}^{x_{-\alpha-\beta}(t)}x_{2\beta+\gamma}(N_{\beta,\beta+\gamma}abt^{m+\mu+1})
\end{aligned}$$

und hieraus folgt die Behauptung.

<u>3.3</u> Es gilt (b_{m+1}) für $\alpha,\alpha' \in \Phi_k$.

<u>Beweis</u>: Nach der zu Beginn des Abschnitts über $\operatorname{rg}\Phi \geqslant 4$ gemachten Bemerkung kann man sich auf $\operatorname{rg}\Phi = 3$ beschränken und darf hier (H2) $\alpha' = \alpha+\beta$ annehmen (der Fall $\alpha=\alpha'$ folgt aus 3.1 ii) und aus (a_{m+1})); wir induzieren auch $\mu+\nu$:

$$[x_\alpha(at^\mu),\ x_{\alpha+\beta}(bt^{m+1})]$$

$$= [x_\alpha(at^\mu), [x_{\alpha+2\beta+\gamma}(t),\ x_{-\beta-\gamma}(b't^m)]] \qquad \text{nach } 3.1$$

$$= [x_{2(\alpha+\beta)+\gamma}(a't^{\mu+1}),\ {}^{x_{\alpha+2\beta+\gamma}(t)}x_{-\beta-\gamma}(b't^m)] \text{ nach H1 iii), Induktionsannahme und } 3.2$$

$$= {}^{x_{\alpha+2\beta+\gamma}(t)}[x_{2(\alpha+\beta)+\gamma}(a't^{\mu+1}),\ x_{-\beta-\gamma}(b't^m)] = 1 \quad \text{nach} \quad (b_m)$$

<u>3.4</u> In diesem Abschnitt sei $\beta'\in\Phi_k$, $\gamma'\in\Phi_1$, $2\beta'+\gamma' = 2\beta+\gamma$, ferner mögen $\beta,\gamma,\beta',\gamma'$ einen $\mathbb{Z}$-Modul vom Rang 3 erzeugen. Dann ist

$$0 = n(2\beta+\gamma,\gamma') = 2n(\beta,\gamma')+n(\gamma,\gamma')$$

$$2 = n(2\beta+\gamma,\beta') = 2n(\beta,\beta')+n(\gamma,\beta'),$$

also nach H3: $n(\beta,\gamma') = n(\gamma,\gamma') = 0$, $n(\beta,\beta') = 1$

und symmetrisch $n(\beta',\gamma) = 0$.

Also ist $\beta-\beta'\in\Phi_k$, $\beta+\beta'$, $\beta\pm\gamma'$, $\beta'\pm\gamma$, $\gamma\pm\gamma'\notin\Phi\cup\{0\}$, $\delta := \beta+\gamma-\beta' = \beta'+\gamma'-\beta\in\Phi_k$.

Mit H4 beweist man

$$N_{\beta,\gamma}\,N_{\beta'-\beta,\delta} = N_{\beta'+\gamma',\beta'-\beta}\,N_{\delta,\beta} + N_{\beta',\delta}\,N_{\beta,\beta'-\beta},$$

da in dieser Formel $|N_{\beta'-\beta,\delta}| = 2$ und alle anderen Größen betragsmäßig $=1$ sind, gilt also

$$N_{\beta,\gamma}\,\hat{N}_{\beta'-\beta,\delta} = N_{\beta'+\gamma',\beta'-\beta}\,N_{\delta,\beta} = N_{\beta',\delta}\,N_{\beta,\beta'-\beta}.$$

Weiter ist nach H4

$$N_{\beta'+\gamma',\beta'-\beta}\,N_{\beta',\gamma'} = N_{\beta',\delta}\,N_{\gamma',\beta'-\beta},$$

$$N_{\beta'+\gamma',\beta'}\,N_{\delta,\beta} = N_{\beta+\gamma,\beta}\,N_{\delta,\beta'}.$$

Daraus folgt

$$(1)\quad \begin{cases} N_{\beta'-\beta,\gamma'}\,\hat{N}_{\beta'-\beta,\delta} = N_{\beta,\gamma}\,\hat{N}_{\beta,\beta+\gamma}\,N_{\beta',\gamma'}\,\hat{N}_{\beta',\beta'+\gamma'} \\ N_{\beta,\gamma} = N_{\beta',\delta}\,\hat{N}_{\beta'-\beta,\delta}\,N_{\beta,\beta'-\beta},\quad N_{\beta',\gamma'} = N_{\beta,\delta}\,N_{\beta,\beta'-\beta}\,N_{\beta'-\beta,\gamma'}. \end{cases}$$

Wir setzen für $\mu \leqslant m+1$, $\nu' \leqslant m$, $\epsilon \in \{0,1\}$ die Beziehung $\mu + 2\nu' + \epsilon = m+1$ voraus, so daß $\nu' + \epsilon \leqslant m$ ist. Für $b,c \in k^*$, $u = x_\delta(-\hat{N}_{\beta'-\beta,\delta}bc^{-1}t^{\nu'+\epsilon})$, $v = x_{\gamma'}(N_{\beta'-\beta,\gamma'}\,\hat{N}_{\beta'-\beta,\delta}\,bc^{-2}t^{\epsilon})$ gilt dann

$$x_\gamma(bt^{2\nu'+\epsilon}) = u[x_{\beta'-\beta}(ct^{\nu'}),v].$$

Nehmen wir an, daß für $a \in k$ die beiden folgenden Gleichungen gelten:

$$(2)\qquad [x_\beta(at^\mu),v] = [x_{\beta'}(N_{\beta,\beta'-\beta}act^{\mu+\nu'}),\ x_\gamma(bt^{2\nu'+\epsilon})] = 1.$$

Dann ist

$$(3)\qquad [u,x_\beta(at^\mu)][x_\beta(at^\mu),\ x_\gamma(bt^{2\nu'+\epsilon})]$$

$$\overset{u}{=}\ [x_\beta(at^\mu),\ [x_{\beta'-\beta}(ct^{\nu'}),\ v]] \qquad \text{nach H1 i)}$$

$$\overset{u}{=}\ [x_{\beta'}(N_{\beta,\beta'-\beta}act^{\mu+\nu'}),u^{-1}v] \qquad \text{nach H1 iii) und (2)}$$

$$=\ [u,x_{\beta'}(N_{\beta,\beta'-\beta}act^{\mu+\nu'})][x_{\beta'}(N_{\beta,\beta'-\beta}act^{\mu+\nu'}),v].$$

Für $\mu = m$, $\nu' = 0$, $\epsilon = 1$ ist (2) erfüllt und (3) wird für ein Zahlenpaar $a',b' \in k$ mit $N_{\beta',\gamma'}\,\hat{N}_{\beta',\beta'+\gamma'}a'^2b' = N_{\beta,\gamma}\,\hat{N}_{\beta,\beta+\gamma}a^2b$ unter Verwendung von (1) zu

$$(4)\qquad x_{\beta'+\gamma'}(N_{\beta',\gamma'}a'b't^{m+1})\,[x_\beta(at^m),\ x_\gamma(bt)]$$

$$=\ x_{\beta+\gamma}(N_{\beta,\gamma}abt^{m+1})\,[x_{\beta'}(a't^m),\ x_{\gamma'}(b't)]$$

(bei $c := N_{\beta,\beta'-\beta}a'\cdot a^{-1}$).

Die Terme $x_{\beta+\gamma}(\,.\,)$, $x_{\beta'+\gamma'}(\,.\,)$ kommutieren nach **3.3, und daher** ist der Ausdruck

(5) $x_{2\beta+\gamma}(at^{2m+1}) := x_{\beta+\gamma}(-\hat{N}_{\beta,\beta+\gamma}at^{m+1})[x_\beta(t^m), x_\gamma(N_{\beta,\gamma}\hat{N}_{\beta,\beta+\gamma}at)]$

von der speziellen Zerlegung der langen Wurzel $2\beta+\gamma$ unabhängig. (Hat man zwei Zerlegungen durch Wurzeln, die einen $\mathbb{Z}$-Modul vom Rang 2 erzeugen, ergänzt man ähnlich wie im Beweis von 2.2 durch Hinzunahme einer dritten Zerlegung und schließt über diese. Hier wird wieder $\mathrm{rg}\ \Phi \geqslant 3$ benötigt).
Für $\mu \leqslant m$, $\nu = 2\nu' + \epsilon \leqslant m+1$ ist (2) ebenfalls erfüllt und aus (3) wird - unter Verwendung von (5) im Fall $\mu = m$ -:

(6) $[x_\beta(at^\mu), x_\gamma(bt^\nu)] = x_{\beta+\gamma}(N_{\beta,\gamma}abt^{m+1})x_{2\beta+\gamma}(N_{\beta,\gamma}\hat{N}_{\beta,\beta+\gamma}a^2bt^{2\mu+\nu})$,

damit ist (b''_{m+1}) für diesen Fall gezeigt.

<u>3.5</u> Es gilt (b'_{m+1}) für $\alpha, \alpha', \alpha+\alpha' \in \Phi_k$.

<u>Beweis</u>: Nach H2 darf $\alpha' = \beta$ angenommen werden:

$$[x_\alpha(a), x_\beta(bt^{m+1})]$$

$$= [x_\alpha(a), [x_{2\beta+\gamma}(b't^m), x_{-\beta-\gamma}(t)]] \qquad \text{nach 3.4 (6) und } (b_m)$$

$$= [x_{\alpha+2\beta+\gamma}(a't^m)x_{2(\alpha+\beta)+\gamma}(a''t^m),\ x_{2\beta+\gamma}(b't^m)x_{-\beta-\gamma}(t)]$$

$$\text{nach H1 iii)}$$

$$= [x_{\alpha+2\beta+\gamma}(a't^m), x_\beta(bt^{m+1})x_{-\gamma}(b''t^{m+2})x_{-\beta-\gamma}(t)]$$

$$\text{nach 3.4 (6) und } (b_m)$$

$$= [x_{\alpha+2\beta+\gamma}(a't^m), x_{-\beta-\gamma}(t)] \qquad \text{nach } (b_m) \text{ und 3.3}$$

$$= x_{\alpha+\beta}(N_{\alpha,\beta}abt^{m+1}) \qquad \text{nach 3.1 und H4.}$$

Zusammen mit 3.1 folgt die Behauptung.

<u>3.6</u> Es gilt (b_{m+1}) für $\alpha \in \Phi_k$, $\alpha' \in \Phi_1$, $n(\alpha,\alpha') = 0$, $\nu \leqslant 2m$.

<u>Beweis</u>: Nach H2 darf $\alpha' = \gamma$ angenommen werden:

$$^{x_\gamma(bt^\nu)}x_\alpha(at^{m+1}) = {}^{x_\gamma(bt^\nu)}([x_{-\alpha-2\beta-\gamma}(a), x_{2(\alpha+\beta)+\gamma}(a't^{m+1})]\, x_{-2\beta-\gamma}(a''t^{m+1}))$$

nach (6), nach (b_m) kommutiert $x_\gamma(bt^\nu)$ mit allen rechts auftretenden Termen.

<u>3.7</u> Nach 3.6 sind die Formeln (2) in 3.4 erfüllt für $\mu+\nu' \leq m+1$. Unter den gleichen Voraussetzungen wie für (4) folgt daher aus (3) in Verbindung mit 3.5

$$(4') \qquad x_{\beta'+\gamma'}(-N_{\beta',\gamma'}a'b't^{\mu+\nu'+\epsilon})[x_{\beta'}(a't^{\mu+\nu'}), x_{\gamma'}(b't^\epsilon)]$$
$$= x_{\beta+\gamma}(-N_{\beta,\gamma}abt^{m+1})[x_\beta(at^\mu), x_\gamma(bt^{2\nu'+\epsilon})]$$

also ist auch der Ausdruck

$$(5') \qquad x_{2\beta+\gamma}(at^{2m+2}) := x_{\beta+\gamma}(-\hat{N}_{\beta,\beta+\gamma}at^{m+1})[x_\beta(t^{m+1}), x_\gamma(N_{\beta,\gamma}\hat{N}_{\beta,\beta+\gamma}a)]$$

unabhängig von der Zerlegung der langen Wurzel $2\beta+\gamma$. Ebenso folgt nun sofort aus (4'), daß Formel (6) auch für $\mu = m+1$, $\nu = 0$ gilt, womit (b''_{m+1}) ohne Einschränkung bewiesen ist.

Formel (4') ermöglicht jetzt den Nachweis von

$$[x_{2\beta+\gamma}(at^\mu), x_{\alpha'}(bt^\nu)] = 1 \qquad (\mu \leq 2m+2)$$

zunächst für $\alpha' = \beta$, $\nu \leq m+1$ mittels 3.3, sodann unter Benutzung des eben gezeigten für $\alpha' \in \{\gamma, 2\beta+\gamma\}$ in zwei Schritten: für $\nu \leq 2m$, danach für $\nu = 2m+1, 2m+2$.

Damit ist dann (b_{m+1}) für $n(\alpha,\alpha') > 0$ oder $\alpha,\alpha' \in \Phi_1$ vollständig bewiesen (cf.3.3). Mit H1 i) und ebenfalls mit (4') weist man nun leicht (a_{m+1}) für lange Wurzeln nach.

Wir beweisen nun (b_{m+1}) für den letzten noch offenen Fall $\alpha \in \Phi_k$, $\alpha' \in \Phi_1$, $n(\alpha,\alpha') = 0$. Nach H2 darf $\alpha' = \gamma$ angenommen werden, und wegen 3.6 brauchen wir nur noch die Fälle $\nu = 2m+1,\ 2m+2$ zu betrachten. Je nachdem sei $\nu = 2\nu' + \epsilon$ mit $\nu' = m,\ \epsilon = 1$ bzw. $\nu' = m+1,\ \epsilon = 0$.

Dann ist für passende Konstanten

$$\begin{aligned}
&[x_\alpha(a), x_\gamma(bt^\nu)] \\
&= [x_\alpha(a), [x_{\beta+\gamma}(t^{\nu'}),\ x_{-2\beta-\gamma}(b't^\epsilon)]] && \text{nach (5), (5') und 3.3} \\
&= [x_{\alpha+\beta+\gamma}(a't^{\nu'}),\ {}^{x_{\beta+\gamma}(t^{\nu'})}x_{-2\beta-\gamma}(b't^\epsilon)] && \text{nach H1 iii)} \\
&= {}^{x_{\beta+\gamma}(t^{\nu'})}[x_{\alpha+\beta+\gamma}(a't^{\nu'}), x_{-2\beta-\gamma}(b't^\epsilon)] && \text{nach 3.3} \\
&= 1 && \text{nach 3.6}
\end{aligned}$$

Folglich ist für $\mu \leqslant m+1$

$$\begin{aligned}
&[x_\alpha(at^\mu),\ x_\gamma(bt^\nu)] \\
&= [[x_{-\alpha-2\beta-\gamma}(a),\ x_{2(\alpha+\beta)+\gamma}(a't^\mu)]\ x_{-2\beta-\gamma}(a''t^\mu),\ x_\gamma(bt^\nu)] = 1,
\end{aligned}$$

denn $n(-\alpha-2\beta-\gamma, \gamma) = 0$.

<u>3.8</u> Wir zeigen jetzt $[x_\beta(at^\mu),\ x_{\beta+\gamma}(bt^\nu)] = x_{2\beta+\gamma}(N_{\beta,\beta+\gamma}abt^{\mu+\nu})$ für $\mu, \nu \leqslant m+1$, womit dann nach H2 (b'_{m+1}) vollständig bewiesen ist. Sei hierzu $\mu = m,\ \epsilon = 1$ oder $\mu = m+1,\ \epsilon = 0$. Mit 3.5, (b_{m+1}) und H1 i),ii) zeigt man

$$\begin{aligned}
&{}^{x_{-\alpha}(t^\mu)}[x_{\alpha+\beta}(a't^\mu),\ x_{\alpha+\beta+\gamma}(b')] \\
&= [x_{\alpha+\beta}(a't^\mu)\ x_\beta(at^{\mu+\epsilon}),\ x_{\beta+\gamma}(bt^\mu)\ x_{\alpha+\beta+\gamma}(b')] \\
&= [x_\beta(at^{\mu+\epsilon}),\ x_{\beta+\gamma}(bt^\mu)]\ x_{\alpha+2\beta+\gamma}(c't^{m+1})\ x_{2(\alpha+\beta)+\gamma}(ct^\epsilon)
\end{aligned}$$

mit $a = N_{-\alpha,\alpha+\beta}a'$, $b = N_{-\alpha,\alpha+\beta+\gamma}b'$, $c = N_{\alpha+\beta,\alpha+\beta+\gamma}a'b'$ und

$$c' = (N_{-\alpha,\alpha+\beta+\gamma}\ N_{\beta,\alpha+\beta+\gamma} + N_{-\alpha,\alpha+\beta}\ N_{\alpha+\beta,\beta+\gamma})ab$$

$$= (N_{-\alpha,\alpha+\beta}\, N_{\beta,\alpha+\beta+\gamma} + N_{-\alpha,\alpha+\beta+\gamma}\, N_{\alpha+\beta,\beta+\gamma})\, a'b'.$$

Aus H4 folgt mit mehrfacher Anwendung

$$c' = N_{-\alpha,2(\alpha+\beta)+\gamma} \cdot c = \hat{N}_{-\alpha,\alpha+2\beta+\gamma}\, N_{\beta,\beta+\gamma}\, ab.$$

Nach (b''_{m+1}) hat man aber andererseits

$$[x_{-\alpha}(t^{\mu}), x_{2(\alpha+\beta)+\gamma}(ct^{\epsilon})] =$$

$$= x_{\alpha+2\beta+\gamma}(N_{-\alpha,2(\alpha+\beta)+\gamma}\, ct^{m+1})\, x_{2\beta+\gamma}(N_{-\alpha,2(\alpha+\beta)+\gamma}\, \hat{N}_{-\alpha,\alpha+2\beta+\gamma}\, ct^{2\mu+\epsilon}).$$

Eine Zusammenfassung der Rechnungen liefert die Behauptung. Damit ist auch der symplektische Fall behandelt, der Beweis von Satz 2 also somit beendet.

Literatur

1. Behr, H.: Über die endliche Definierbarkeit verallgemeinerter Einheitengruppen II, Inv.math. 4, 265-274 (1967)

2. Bourbaki, N.: Groupes et algèbres de Lie, Chap. IV,V,VI. Paris (1968)

3. Chevalley, C.: Sur certains groupes simples. Tôhoku Math. J.7, 14-66 (1955)

4. Hurrelbrink, J.: Endlich präsentierte arithmetische Gruppen im Funktionenkörperfall. Erscheint demnächst.

5. Magnus, W., Karrass, A., Solitar, D.: Combinatorial Group Theory. Pure and Applied Math., Interscience Publ., Wiley (1966)

6. Nagao, H.: On $GL_2(2,K[x])$. Journal Inst. Polytechn. Osaka City Univ., Series A, 10, 117-121 (1959)

7. Serre, J.P.: Groupes discrets. Collège de France 1968-1969

8. Silvester, J.R.: On the K_2 of a free associative Algebra. Proc. London Math. Soc., III 26, 35-56 (1973)

9. Soulé. C.: Amalgames de groupes et nerfs de recouvrements, notes polycopiées. Paris (1974)

10. Stein, M.R.: Chevalley groups over commutative rings. Bull. Am. Math. Soc. 77, 247-252 (1971)

11. Stein, M.R.: Generators, relations and coverings of Chevalley groups over commutative rings. Am. J. Math. 93, 965-1004 (1971)

12. Steinberg, R.: Générateurs, relations et revêtements de groupes algébriques. In: Colloque sur la théorie de groupes algébriques, (Bruxelles, 1962); pp. 113-127. Louvain: Librairie Universitaire (1962)

13. Steinberg, R.: Lectures on Chevalley groups. New Haven: Yale University, (1967)

14. Stuhler, U.: Zur Frage der endlichen Präsentierbarkeit gewisser arithmetischer Gruppen im Funktionenkörperfall. (Unveröffentlicht)