Vollständige Anleitung zur Algebra

von

Hrn. Leonhard Euler.

Erster Theil.

Von den verschiedenen Rechnungs-Arten, Verhältnissen und Proportionen.

St. Petersburg, 1802.

Gedruckt bey der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften.

Vorbericht.

Man überliefert hiermit denen Liebhabern der höhern Rechenkunst ein Werk, davon schon vor verschiedenen Jahren eine russische Uebersetzung zum Vorschein gekommen ist.

Die Absicht des weltberühmten Verfassers bey demselben war, ein Lehrbuch zu verfertigen, aus welchem ein jeder ohne einige Beyhülfe die Algebra leicht fassen und gründlich erlernen könne.

Der Verlust seines Gesichts erweckte in ihm diesen Gedanken, und durch seinen stets geschäfftigen Geist angetrieben, säumete er nicht, seinen Vorsatz ins Werck zu setzen. Zu diesem Ende erwählte er sich einen jungen Menschen, den er mit sich aus Berlin zur Aufwartung genommen hatte, und der ziemlich fertig rechnen, sonsten aber nicht den geringsten Begriff von der Mathematik hatte: er war seines Handwerks ein Schneider, und gehörte, was seine Fähigkeit anlangt, unter die mittelmäßigen Köpfe. Demungeachtet hat er nicht nur alles wohl begriffen, was ihm sein großer Lehrer vorsagte und zu schreiben befahl, sondern er wurde dadurch in kurzer Zeit in den Stand ge-

gesetzt, die in der Folge vorkommenden schweren Buchstaben-Rechnungen ganz allein auszuführen und alle ihm vorgelegten algebraischen Aufgaben mit vieler Fertigkeit aufzulösen.

Dieses preiset um so viel mehr den Vortrag und die Lehr-Art des gegenwärtigen Werks an; da der Lehrling der es geschrieben, begriffen und ausgeführet, sonsten nicht die geringste Hülfe von irgend einem andern als seinem zwar berühmten, aber des Gesichts beraubten Lehrers genossen hat.

Ausser diesem für sich schon großen Vorzug werden die Kenner besonders die Lehre von den Logarithmen und ihre Verbinbindung mit den übrigen Rechnungs-Arten, so wie auch die für die Auflösung der cubischen und biquadratischen Gleichungen gegebenen Methoden mit Vergnügen lesen und bewundern. Die Liebhaber der Diophanteischen Aufgaben aber werden sich über den letzten Abschnitt des zweyten Theils freuen, in welchem diese Aufgaben in einem angenehmen Zusammenhange vorgetragen, und alle zu ihrer Auflösung erforderlichen Kunstgriffe erklärt worden sind.

Inhalt des ganzen Werks.

Erster Theil.

Erster Abschnitt.

Von den verschiedenen Rechnungsarten mit einfachen Größen.

Zweyter Abschnitt.

Von den verschiedenen Rechnungs-Arten mit zusammengesetzten Größen.

Dritter Abschnitt.

Von den Verhältnissen und Proportionen.

Cap.

Zweyter Theil.

Erster Abschnitt.

Von den algebraischen Gleichungen und derselben Auflösung.

Cap.

Cap.

Zweyter Abschnitt.

Von der unbestimmten Analytic.

Des

Ersten Theils

Erster Abschnitt.

Von den verschiedenen Rechnungs-Arten mit einfachen Größen.

Capitel I.

Von den mathematischen Wissenschaften überhaupt.

1.

Erstlich wird alles dasjenige eine Größe genennt, welches einer Vermehrung oder einer Verminderung fähig ist, oder wozu sich noch etwas hinzusetzen oder davon wegnehmen läßt.

Diesemnach ist eine Summe Geldes eine Größe, weil sich dazu setzen und hinweg nehmen läßt.

Imgleichen ist auch ein Gewicht eine Größe und dergleichen mehr.

2.

Es giebt also sehr viele verschiedene Arten von Größen, welche sich nicht wohl herzählen lassen; und daher entstehen die verschiedene Theile der Mathematik, deren ein jeglicher mit einer besondern Art von Größen beschäftiget ist, indem die Mathematik überhaupt nichts anders ist als eine Wissenschaft der Größen, und welche Mittel ausfindig macht, wie man dieselben ausmessen soll.

3.

Es läßt sich aber eine Größe nicht anders bestimmen oder ausmessen, als daß man eine Größe von eben derselben Art als bekannt annimmt, und das Verhältniß anzeiget, worinnen eine jegliche Größe, von eben der Art, gegen derselben steht.

Also wann die Größe einer Summe Geldes bestimmt werden soll, so wird ein gewisses Stück Geld, als z. E. ein Gulden, ein Rubel, ein Thaler, oder ein Ducaten und dergleichen für bekannt angenommen, und angezeigt, wie viel dergleichen Stücke in gemeldeter Summe Gelds enthalten sind.

Eben so, wann die Größe eines Gewichts bestimmt werden soll, so wird ein großes Gewicht, als z. E. ein Pfund, ein Centner, oder ein Loth und dergleichen, für bekannt angenommen, und angezeigt, wie viel derselben in dem vorigen Gewichte enthalten sind.

Soll aber eine Länge oder eine Weite ausgemessen werden, so pfleget man sich darzu einer gewissen bekannten Länge, welche ein Fuß genennet wird, zu bedienen.

4.

Bey Bestimmungen, oder Ausmessungen der Größen von allen Arten, kommt es also darauf an daß erstlich eine gewisse bekannte Größe von gleicher Art festgesetzet werde (welche das Maaß, oder die Einheit, genennet wird) und also von unserer Willkühr lediglich abhängt; hernach, daß man bestimme, in was für einem Verhältniß die vorgegebene Größe gegen dieses Maaß stehe, welches jederzeit durch Zahlen angezeigt wird, so daß eine Zahl nichts anders ist, als das Verhältniß, worinnen eine Größe gegen eine andere, welche für die Einheit angenommen wird, steht.

5.

Hieraus ist klar, daß sich alle Größen durch Zahlen ausdrücken lassen, und also der Grund aller Mathematischen Wissenschaften darin gesetzt werden muß,

muß, daß man die Lehre von den Zahlen, und alle Rechnungs-Arten, so dabey vorkommen können, genau in Erwägung ziehe, und vollständig abhandele.

Dieser Grundtheil der Mathematik wird die Analytik oder Algebra genennet.

6.

In der Analytik werden also blos allein Zahlen betrachtet, wodurch die Größen angezeiget werden, ohne sich um die besondere Art der Größen zu bekümmern, als welches in den übrigen Theilen der Mathematik geschiehet.

7.

Von den Zahlen insbesondere handelt die Arithmetik oder Rechenkunst, allein dieselbe erstreckt sich nur auf gewisse Rechnungs-Arten, welche im gemeinen Leben öfters vorkommen; hingegen begreift die Analytik auf eine allgemeine Art alles dasjenige in sich, was bey den Zahlen und derselben Berechnung auch immer vorfallen mag.

Capitel 2.

Erklärung der Zeichen + plus und — minus.

8.

Wann zu einer Zahl eine andere hinzugesezt oder addirt werden soll, so wird solches durch das Zeichen + angedeutet, welches der Zahl vorgesezt und plus ausgesprochen wird.

Also wird durch $5 + 3$ angedeutet, daß zu der Zahl 5 noch 3 addirt werden sollen, da man dann weis, daß 8 heraus komme: eben so z. E. $12 + 7$ ist 19; $25 + 16$ ist 41 und $25 + 41$ ist 66 rc.

9.

Durch dieses Zeichen + plus pflegen auch mehrere Zahlen verbunden zu werden, als z. E. $7 + 5 + 9$, wodurch angezeigt wird, daß zu der Zahl 7 noch 5, und über dieses noch 9 addirt werden sollen, welches 21 ausmacht. Hieraus versteht man, was nachstehende Formel bedeutet, als:

$$8 + 5 + 13 + 11 + 1 + 3 + 10,$$

nämlich die Summa aller dieser Zahlen, welche beträgt 51.

10.

Wie dieses für sich klar ist, so ist noch zu merken, daß auf eine allgemeine Art die Zahlen durch Buchstaben, als a, b, c, d, 2c. angedeutet werden, wann man also schreibt $a + b$, so bedeutet dieses die Summe der beyden Zahlen, welche durch a und b ausgedruckt werden, dieselben mögen nun so groß oder klein seyn als sie wollen. Eben so bedeutet $f + m + b + x$ die Summe der Zahlen, welche durch diese Buchstaben ausgedruckt werden.

In einem jeglichen Fall also, wann man nur weis, was für Zahlen durch solche Buchstaben angedeutet werden, findet man durch die Rechenkunst die Summe oder den Werth dergleichen Formeln.

11.

Wann hingegen von einer Zahl eine andere weggenommen werden soll, oder subtrahirt wird, so wird solches durch das Zeichen — minus angedeutet, welches so viel als **weniger** ist, und derselben Zahl, welche weggenommen wird, vorgesezt wird:

Also bedeutet $8 - 5$,

daß von der Zahl 8 die Zahl 5 soll weggenommen werden, da dann, wie bekannt ist, 3 übrig bleibt.

bleibt. Eben so ist $12 - 7$ so viel als 5, und $20 - 14$ so viel als 6, etc.

12.

Es kann auch geschehen, daß von einer Zahl mehr Zahlen sollen zugleich subtrahiret werden.

als z. E. $50 - 1 - 3 - 5 - 7 - 9$.

Welches also zu verstehn ist: nimmt man zuerst 1 von 50 weg, bleiben 49; davon 3 weggenommen, bleiben 46; davon 5, bleiben 41; davon 7 weg, bleiben 34; davon die letzten 9 weggenommen, bleiben 25; welches der Werth der vorgegebenen Formel ist. Aber da die Zahlen 1, 3, 5, 7, 9, insgesammt weggenommen werden sollen, so ist es eben so viel, als wann man ihre Summe, nämlich 25, auf einmal von 50 abzieht, da dann, wie vorher, 25 übrig bleiben.

13.

Eben so läßt sich auch leicht der Werth solcher Formeln bestimmen, in welchen beyde Zeichen + plus und — minus vorkommen; als z. E.

$12 - 3 - 5 + 2 - 1$ ist so viel als 5.

oder man darf nur die Summe der Zahlen, die + vor sich haben, besonders nehmen, als:

12

12 + 2 machen 14, und davon die Summe aller Zahlen, die — vor sich haben, welche sind, 3, 5, 1, das ist 9 abziehen, da dann, wie vorher, gefunden wird 5.

14.

Hieraus ist klar, daß es hierbey gar nicht auf die Ordnung der hergesetzten Zahlen ankomme, sondern daß man dieselben nach Belieben versetzen könne, wenn nur eine jede das ihr vorstehende Zeichen behält; also, anstatt der obigen Formel kann man setzen,

$12 + 2 - 5 - 3 - 1$; oder $2 - 1 - 3 - 5 + 12$;

oder $2 + 12 - 3 - 1 - 5$;

wobey aber zu merken, daß in obiger Formel vor der Zahl 12 das Zeichen + vorgesetzt verstanden werden muß.

15.

Wann nun, die Sache allgemein zu machen, anstatt der wirklichen Zahlen, Buchstaben gebraucht werden, so begreift man auch leicht die Bedeutung davon, als z. E.

$a - b - c + d - e$ deutet an, daß die durch die Buchstaben a und d ausgedruckte Zahlen hergelegt werden, und davon die übrigen b, c, e, welche das Zeichen — haben, insgesammt weggenommen werden müssen.

16.

Hier kommt also die Hauptsache darauf an, was für ein Zeichen eine jegliche Zahl vor sich stehen hat; daher pflegt man in der Algebra die Zahlen mit ihren vorstehenden Zeichen, als einzelne Größen zu betrachten, und diejenigen, welche das Zeichen + vor sich haben, bejahende oder positive Größen zu nennen; diejenigen aber, welche das Zeichen — vor sich haben, werden verneinende oder negative Größen genennet.

17.

Dieses läßt sich schön durch die Art erläutern, wie das Vermögen einer Person pflegt angezeigt zu werden; da dasjenige, was sie wirklich besitzt, durch positive Zahlen mit dem Zeichen + plus, dasjenige aber, was sie schuldig ist, durch negative Zahlen mit dem Zeichen — minus ausgedruckt wird. Also wann jemand 100 Rubel hat, dabey aber 50 schuldig ist, so wird sein Vermögen seyn

$100 - 50$, oder welches einerley,

$+ 100 - 50$, das ist 50 Rubel.

18.

18.

Da nun die negative Zahlen als Schulden betrachtet werden können, in so fern die positive Zahlen die wirkliche Besitzungen anzeigen, so kann man sagen, daß die negative Zahlen weniger sind als nichts; also wenn einer nichts im Vermögen hat, und noch dazu 50 Rbl. schuldig ist, so hat er wirklich 50 Rbl. weniger als nichts; dann, wann ihm jemand 50 Rbl. schenken sollte, um seine Schulden zu bezahlen, so würde er alsdann erst nichts haben, da er doch jetzt mehr hatte als vorher.

19.

Wie nun die positive Zahlen ohnstreitig grösser als nichts, so sind die negative Zahlen kleiner als nichts. Die positive Zahlen aber entstehen, wann man erstlich zu 0, oder nichts, immerfort eines zusetzt, da dann die Reihe der sogenannten natürlichen Zahlen entspringt, nämlich

$0, +1, +2, +3, +4, +5, +6, +7, +8, +9, +10,$

und so fort ins Unendliche.

Wird aber diese Reihe rückwärts fortgesetzt, und immer eins mehr weggenommen, so entspringt folgende Reihe der negativen Zahlen:

$0, -1, -2, -3, -4, -5, -6, -7, -8, -9, -10,$

und so fort ohne Ende. 20.

20.

Alle diese Zahlen, so wohl positive als negative, führen den bekannten Nahmen der ganzen Zahlen, welche also entweder grösser oder kleiner sind als nichts. Man nennt dieselbe ganze Zahlen, um sie von den gebrochenen, und noch vielerley andern Zahlen, wovon unten gehandelt werden wird, zu unterscheiden. Denn da z. E. 50 um ein Ganzes grösser ist als 49, so begreift man leicht, daß zwischen 49 und 50 noch unendlich viel Mittelzahlen statt finden können, welche alle grösser als 49, und doch alle kleiner als 50 sind. Man darf sich zu diesem Ende nur zwey Linien vorstellen, deren eine 50 Fuß, die andre aber 49 Fuß lang ist, so wird man leicht begreiffen, daß man unendlich viel andre Linien ziehen kann, welche alle länger als 49, und doch kürzer als 50 Fuß sind.

21.

Dieser Begriff von den verneinenden oder negativen Größen ist um so viel sorgfältiger zu bemerken, da derselbe in der ganzen Algebra von der größten Wichtigkeit ist. Hier wird genug seyn, zum voraus zu bemerken, daß diese Formel, z. E.

$$+1-1,\ +2-2,\ +3-3,\ +4-4, \text{ u. s. f.}$$

alle so viel sind als 0, oder nichts: ferner, daß z. Ex. +2

$+2-5$ so viel ist als -3, weil, wann einer 2 Rbl. hat, und 5 Rbl. schuldig ist, so hat er nicht nur nichts, sondern bleibt noch 3 Rbl. schuldig: eben so ist

$7-12$ so viel als -5,
$25-40$ so viel als -15.

22.

Eben dieses ist auch zu beobachten, wann auf eine allgemeine Art anstatt der Zahlen Buchstaben gebraucht werden, da dann immer $+a-a$ so viel ist als 0 oder nichts. Hernach wann man wissen will, was z. E. $+a-b$ bedeute, so sind zwey Fälle zu erwägen:

Der 1ste ist, wann a größer als b, da subtrahiret man b von a, und der Rest positiv genommen ist der gesuchte Werth.

Der 2te ist, wann a kleiner als b, da subtrahiret man a von b, und der Rest negativ genommen, oder das Zeichen — minus vorgesetzt, zeigt den gesuchten Werth an.

Capitel

Capitel 3.

Von der Multiplikation mit einfachen Größen.

23.

Wann zwey oder mehr gleiche Zahlen zusammen addirt werden, so läßt sich die Summe auf eine kürzere Art ausdrücken; also ist

$a+a$ so viel als $2.a$, und
$a+a+a$ = = = $3.a$, ferner
$a+a+a+a$ = = = $4.a$, und so weiter,

woraus der Begriff von der Multiplication entspringt; nämlich da

$2.a$ so viel ist als 2 mal a, und
$3.a$ = = = = 3 mal a, ferner
$4.a$ = = = = 4 mal a, u. s. f.

24.

Wann also eine durch einen Buchstaben ausgedruckte Zahl mit einer beliebigen Zahl multipliciret werden soll, so wird die Zahl blos vor den Buchstaben geschrieben; also

a mit

a mit 20 multiplicirt giebt 20 a, und
b mit 30 multiplicirt giebt 30 b, etc.

Solchergestalt ist ein c, einmal genommen, oder 1 c, so viel als c.

25.

Dergleichen Producte können auch noch weiter leicht mit andern Zahlen multipliciret werden, als z. Ex.

2 mal 3 a macht 6 a
3 mal 4 b macht 12 b
5 mal 7 x macht 35 x,

welche noch ferner mit Zahlen nach Belieben können multipliriret werden.

Wann die Zahl, mit welcher multiplicirt werden soll, auch durch einen Buchstaben vorgestellt wird, so wird derselbe dem andern Buchstaben unmittelbar vorgesetzt; also wann b mit a multipliciret werden soll, so heißt das Product a b, und p q ist das Product, welches entsteht, wann man die Zahl q mit p multiplicirt. Will man p q noch ferner mit a multipliciren, so kömmt heraus a p q.

27.

Hiebey ist wohl zu merken, daß es auch hier nicht auf die Ordnung der an einander gesetzten Buchstaben an-

ankomme, indem a b eben so viel ist als b a; oder b und a mit einander multiplicirt, macht eben so viel als a mit b multiplicirt. Um dieses zu begreifen, darf man nur für a und b bekannte Zahlen, als 3 und 4 nehmen, so giebt es sich von selbsten: nämlich 3 mal 4 ist eben so viel, als 4 mal 3.

28.

Wann anstatt der Buchstaben, welche unmittelbar an einander geschrieben sind, wirkliche Zahlen sollen gesetzt werden, so sieht man leicht, daß dieselben alsdann nicht unmittelbar hinter einander geschrieben werden können. Denn wann man vor 3 mal 4 schreiben wollte 34, so würde solches nicht zwölf, sondern vier und dreyßig heißen. Wann derowegen eine Multiplication mit bloßen Zahlen angedeutet werden soll, so pflegt man einen Punct zwischen dieselben zu setzen: also 3 . 4 bedeutet 3 mal 4, das ist 12; eben so ist 1 . 2 so viel als 2, und 1 . 2 . 3 ist 6; ferner 1 . 2 . 3 . 4 . 56 ist 1344, und 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7 . 8 . 9 . 10 ist 3628800 u. s. f.

29.

Hieraus ergiebt sich nun auch, was eine solche Formul 5 . 7 . 8 . a b c d bedeute; nämlich 5 wird erstlich mit 7 multipliciret, das Product ferner mit 8, dieses Product hernach mit a, und dieses wieder mit b, sodann mit c, und endlich mit d multipliciret; wobey zu merken, daß anstatt 5.7.8, der Werth davon, nämlich die Zahl 5 mal 7, ist 35, und 8 mal 35 ist 280, geschrieben werden kann.

30.

Ferner ist zu merken, daß solche Formeln, die aus der Multiplication mehrerer Zahlen entstehen, Producte genannt werden. Zahlen oder Buchstaben aber, welche einzeln sind, pflegt man Factores zu nennen.

31.

Bis hierher haben wir nur positive Zahlen betrachtet, und da ist gar kein Zweifel, daß die daher entstehenden Producte nicht auch positive seyn sollten: nämlich + a mit + b multipliciret giebt ohnstreitig + ab: was aber herauskomme, wann + a mit — b oder — a mit — b multipliciret werde, erfordert eine besondere Erörterung.

32.

Wir wollen erstlich — a mit 3 oder + 3, multipliciren; weil nun — a als eine Schuld angesehen werden kann, so ist offenbar, daß wann diese Schuld 3 mal genommen wird, dieselbe auch 3 mal größer werden müsse, folglich wird das gesuchte Product — 3a seyn. Eben so, wann — a mit b, das ist + b multipliciret werden soll, so wird heraus kommen — ba, oder welches einerley, — ab. Hieraus machen wir den Schluß, daß, wann eine positive Größe mit einer negativen multiplicirt werden soll, das Product negativ werde; woher diese Regul gemacht wird, + mit + giebt + oder plus, hingegen + mit —, oder — mit + multipliciret, giebt — oder minus.

33.

Nun ist also noch dieser Fall zu bestimmen übrig: nämlich wann — mit — multiplicirt wird, oder — a mit — b. Hierbey ist zuerst klar, daß das Product in Ansehung der Buchstaben heißen werde ab: ob aber das Zeichen + oder — dafür zu setzen sey, ist noch ungewiß, so viel aber ist gewiß, daß es entweder das eine oder andere seyn muß. Nun aber, sage ich, kann es nicht das Zeichen — seyn? Dann — a mit + b multiplicirt giebt — ab, und also — a mit — b multiplicirt kann nicht eben das geben, was — a mit + b giebt, sondern es muß das Gegentheil herauskommen, welches nämlich heißt + ab. Hieraus entsteht diese Regul, — mit — multiplicirt giebt +, eben so wohl als + mit +.

34.

Diese Regeln pflegen zusammengezogen und kürzlich mit diesen Worten ausgedrückt zu werden: Zwey gleiche Zeichen mit einander multiplicirt geben +, zwey ungleiche Zeichen aber geben −. Wann also zum Exempel diese Zahlen + a, − b, − c, + d, mit einander multiplicirt werden sollen, so giebt erstlich + a mit − b multiplicirt − ab, dieses mit − c giebt + abc, und dieses endlich mit + d, giebt + abcd.

35.

Da nun die Sache in Ansehung der Zeichen keine Schwierigkeit hat, so ist noch übrig zu zeigen, wie zwey Zahlen, die schon selbsten Producte sind, mit einander multiplicirt werden sollen. Wann die Zahl ab mit der Zahl cd multiplicirt werden soll, so ist das Product abcd, und entsteht also, wann man erstlich ab mit c, und das, was man durch die Multiplication gefunden, ferner mit d multiplicirt. Oder also, wann man z. E. die Zahl 36 mit 12 multipliciren soll: weil 12 ist 3 mal 4, so hat man nur nöthig, 36 erstlich mit 3 zu multipliciren und das gefundene, nämlich 108, ferner mit 4 zu multipliciren. Da man dann erhält 432, welches so viel ist als 12 mal 36.

36.

36.

Wollte man aber 5ab mit 3cd multipliciren, so könnte man auch wohl setzen 3cd5ab: da es aber hier eben nicht auf die Ordnung der mit einander multiplicirten Zahlen ankommt, so pflegt man die bloße Zahlen zuerst zu setzen, und schreibt für das Product 5.3abcd, oder 15abcd, weil 5 mal 3 so viel ist als 15.

Eben so, wann 12pqr mit 7xy multiplicirt werden sollte, so erhält man 12.7pqrxy, oder 84pqrxy.

Capitel 4.

Von der Natur der ganzen Zahlen in Absicht auf ihre Faktoren.

37.

Wir haben bemerkt, daß ein Product aus 2 oder mehrern mit einander multiplicirten Zahlen entstehe. Diese Zahlen werden die Faktores davon genennt.

Also sind die Faktores des Produkts abcd die Zahlen a, b, c, d.

Zieht man nun alle ganze Zahlen in Betrachtung, in sofern dieselben durch die Multiplication zweyer oder mehrere Zahlen entstehen können, so wird man bald finden, daß einige gar nicht durch die Multiplication entspringen können und also keine Factoren haben, andere aber aus zwey und auch mehreren Zahlen mit einander multiplicirt entstehen können, folglich zwey oder mehrere Factores haben: also ist

4 so viel als 2.2, ferner 6 so viel als 2.3, und 8 so viel als 2.2.2, ferner 27 so viel als 3.3.3, und 10 so viel als 2.5, und so fort.

39.

Hingegen lassen sich die Zahlen

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, ꝛc.

nicht solchergestalt durch Factores vorstellen, es wäre dann, daß man auch 1 zu Hülfe nehmen, und z. E. 2 durch 1.2 vorstellen wollte. Allein da mit 1 multiplicirt die Zahl nicht verändert wird, so wird 1 auch nicht unter die Factores gezählt.

Alle diese Zahlen nun, welche nicht durch Factores vorgestellt werden können, als:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, ꝛc.

werden **einfache** oder **Prim-Zahlen** genennet; die

übrigen Zahlen aber, welche sich durch Factores vorstellen lassen, als:

4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, ꝛc.

heißen **zusammengesetzte** Zahlen.

40.

Die einfache oder Prim-Zahlen verdienen also besonders wohl in Erwägung gezogen zu werden, weil dieselben aus keiner Multiplication zweyer oder mehrerer Zahlen mit einander entstehen können. Wobey insonderheit dieses merkwürdig ist, daß, wann dieselben der Ordnung nach geschrieben werden, als 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, u. s. f. darinnen keine gewisse Ordnung wahrgenommen wird, sondern dieselben bald um mehr, bald um weniger fortspringen.

Und es hat auch bißher kein Gesetz, nach welchem dieselben fortgiengen, ausfindig gemacht werden können.

41.

Die zusammengesetzten Zahlen aber, welche sich durch Factores vorstellen lassen, entspringen alle aus den obigen Prim-Zahlen, so daß alle Factores davon Prim-Zahlen sind. Dann wann je ein Factor keine Prim-Zahl, sondern schon zusammengesetzt wäre, so so würde man denselben wieder durch zwey oder mehr Factores, die Prim-Zahlen wären, vorstellen können. Also wann die Zahl 30 durch 5 . 6 vorgestellt wird, so ist 6 keine Prim-Zahl, sondern 2 . 3, und also kann 30 durch 5 . 2 . 3, oder durch 2 . 3 . 5 vorgestellt werden, wo alle Factores Prim-Zahlen sind.

42.

Erwägt man nun alle zusammengesetzte Zahlen, wie solche durch Prim-Zahlen vorgestellt werden können, so findet sich darinnen ein grosser Unterschied, indem einige nur 2 dergleichen Factores haben, andere 3 oder mehr: also ist, wie wir schon gesehen,

4	so viel als	2 . 2,	6	so viel als	2 . 3,
8	= =	2 . 2 . 2,	9	= =	3 . 3,
10	= =	2 . 5,	12	= =	2 . 3 . 2,
14	= =	2 . 7,	15	= =	3 . 5,
16	= =	2 . 2 . 2 . 2,		u. s. f.	

43.

Hieraus läßt sich begreifen, wie man von einer jeglichen Zahl ihre einfache Factores finden soll.

Also

Also wann die Zahl 360 vorgegeben wäre, so hat man für dieselbe erstlich 2 . 180.

Nun aber ist

	180	so viel als	2 . 90,
und	90	= = =	2 . 45,
und	45	= = =	3 . 15,
und endlich	15	= = =	3 . 5,

Folglich wird die Zahl 360 durch folgende einfache Factores vorgestellt:

2 . 2 . 2 . 3 . 3 . 5,

als welche Zahlen alle mit einander multiplicirt, die Zahl 360 vorbringen.

44.

Wir sehen also hieraus, daß sich die Prim-Zahlen durch keine andere Zahlen theilen lassen, und hingegen die zusammengesetzten Zahlen am füglichsten in ihre einfache Factores aufgelöset werden, wann man alle einfache Zahlen sucht, durch welche sich dieselben theilen lassen. Allein hiebey wird die Division gebraucht, von welcher in dem folgenden Capitel die Regeln erklärt werden sollen.

Capitel

Capitel 5.

Von der Division mit einfachen Größen.

45.

Wann eine Zahl in 2, 3, oder mehrere gleiche Theile zertheilt werden soll, so geschieht solches durch die Division, welche die Größe eines solchen Theils bestimmen lehret. Also wann die Zahl 12 in 3 gleiche Theile zertheilt werden soll, so findet man durch die Division, daß ein solcher Theil 4 sey.

Man bedienet sich aber dabey gewisser Namen. Die Zahl, die zertheilt werden soll, heißt das **Dividendum** oder die zu theilende Zahl: die Anzahl der Theile wird der **Divisor**, oder **Theiler** genennt: die Größe eines solchen Theils aber, welcher durch die Division gefunden wird, pflegt der **Quotus** oder **Quotient** genennt zu werden; also ist dem angeführten Exempel nach

12 das Dividendum, oder die zu theilende Zahl.

3 der Divisor, oder Theiler, und

4 der Quotus, oder Quotient.

46.

Wann man also eine Zahl durch 2 theilt oder in 2 gleiche Theile zerschneidet, so muß ein solcher Theil, das ist, der Quotus zweymal genommen, just die vorgegebene Zahl ausmachen; eben so, wann eine Zahl durch 3 getheilt werden soll, so muß der Quotus 3 mal genommen dieselbe Zahl ausmachen; ja es muß überhaupt immer das Dividend herauskommen, wann man den Quotus und den Divisor mit einander multiplicirt.

47.

Dahero wird auch die Division also beschrieben, daß man für den Quotient eine solche Zahl suche, welche mit dem Divisor multiplicirt just die zu theilende Zahl hervorbringe. Also wann z. Ex. 35 durch 5 getheilt werden soll, so sucht man eine Zahl, welche mit 5 multiplicirt 35 herausbringe. Diese Zahl ist demnach 7, weil 5 mal 7, 35 ausmacht. Man pflegt sich dabey dieser Redensart zu bedienen: 5 in 35 habe ich 7 mal; denn 5 mal 7 ist 35.

48.

Man stellt sich demnach das Dividend als ein Product vor, von welchem der eine Factor dem Divisor

Divisor gleich ist, da dann der andere Factor den Quotienten anzeigt.

Wann ich also 63 durch 7 dividiren soll, so suche ich ein Product, davon der eine Factor 7, und der andere also beschaffen ist, daß, wann derselbe mit dieser 7 multipliciret wird, genau 63 herauskommen. Ein solches ist nun 7 . 9 und deswegen ist 9 der Quotus, welcher entspringt, wenn man 63 durch 7 dividirt.

49.

Wann daher auf eine allgemeine Art die Zahl ab durch a getheilt werden soll, so ist der Quotus offenbar b weil a mit b multiplicirt das Dividend ab ausmacht. Hieraus ist klar, daß wann man ab durch b dividiren soll, der Quotus a seyn werde.

Also überhaupt in allen Divisions-Exempeln, wann man das Dividend durch den Quotus dividirt, so muß der Divisor herauskommen: als, da 24 durch 4 dividirt 6 giebt, so giebt auch umgekehrt 24 durch 6 dividirt 4.

50.

Wie nun alles darauf ankommt, daß man das Dividend durch 2 Factores vorstelle, deren einer dem Divisor gleich sey, weil alsdann der andere den Quotus anzeigt, so wird man die folgende Exempel leicht verstehen. Erstlich das Dividend abc durch a dividirt giebt bc, weil a mit bc multiplicirt abc ausmacht: eben so, wann abc durch b dividirt wird, so kommt ac heraus; und abc durch ac dividirt giebt b. Hernach 12 mn durch 3 m dividirt giebt 4 n, weil 3 m mit 4 n multiplicirt 12 mn ausmacht: wann aber eben diese Zahl 12 mn durch 12 dividirt werden sollte, so würde mn herauskommen.

51.

Weil eine jede Zahl a durch 1 a, oder ein a, ausgedruckt werden kann, so ist hieraus offenbar, daß, wann man a oder 1 a durch 1 theilen soll, alsdann eben dieselbe Zahl a für den Quotus heraus komme. Hingegen wann eben dieselbe Zahl a oder 1 a durch a getheilet werden soll, so wird der Quotus 1 seyn.

52.

Es geschieht aber nicht immer, daß man das Dividend als ein Product von 2 Factoren vorstellen könne, deren einer dem Divisor gleich sey, und in solchen Fällen läßt sich die Division nicht auf diese Art bewerkstelligen. Dann wann ich z. E. 24 durch 7 dividiren soll, so ist die Zahl 7 kein

kein Factor von 24, weil 7 . 3 erst 21 und also zu wenig, hingegen 7 . 4 schon 28 und also zu viel ausmacht: doch sieht man hieraus, daß der Quotus grösser seyn müsse als 3, und doch kleiner als 4. Dahero, um denselben genau zu bestimmen, eine andere Art von Zahlen, die Brüche genannt werden, zu Hülfe genommen werden muß, wovon in einem der folgenden Capitel gehandelt werden soll.

53.

Ehe man aber zu den Brüchen fortschreitet, so begnügt man sich, für den Quotus die nächst kleinere ganze Zahl anzunehmen, dabey aber den Rest zu bestimmen, welcher übrig bleibt; also sagt man 7 in 24 hab ich 3 mal, der Rest aber sey 3, weil 3 mal 7 nur 21 macht, so um 3 zu klein ist. Eben so sind folgende Exempel zu verstehen, als:

6	34	5	nämlich der Divisor ist 6,
	30		das Dividend 34,
	4		der Quotient 5,
			und der Rest ist 4,
9	41	4	und hier ist der Divisor 9,
	36		das Dividend 41,
	5		der Quotient 4,
			der Rest 5.

In

In solchen Exempeln, wo ein Rest übrig bleibt, ist folgende Regul zu merken:

54.

Erstlich daß, wann man den Theiler mit dem Quotus multiplicirt und zum Product noch den Rest addirt, alsdann das Dividend heraus kommen müsse; und auf diese Art pflegt man die Division zu probiren, ob man recht gerechnet habe oder nicht.

Also in dem erstern der zwey letzten Exempel, multiplicirt man 6 . 5, ist 30, dazu den Rest 4 addirt, kommt just das Dividend 34.

Ebenfalls in dem letztern Exempel, wann man den Theiler 9 mit dem Quotus 4 multiplicirt und zum Product 36 noch den Rest 5 addirt, so erhält man das Dividend 41.

55.

Letztlich ist hier auch noch nöthig in Ansehung der Zeichen plus + und minus — anzumerken, daß, wann + ab durch + a dividirt wird, der Quotus + b seyn werde, welches für sich klar ist.

Wann aber + ab durch — a dividirt werden soll, so wird der Quotus — b seyn, weil — a mit — b multiplicirt + ab ausmacht.

Wann ferner das Dividend — ab heißt, und durch den Theiler + a dividirt werden soll, so wird der

der Quotus — b seyn, weil + a mit — b multiplicirt — ab giebt, das ist das Dividend.

Soll endlich das Dividend — ab durch den Divisor — a getheilt werden, so wird der Quotus + b seyn, weil — a mit + b multiplicirt — ab ausmacht.

56.

Es finden also in der Division für die Zeichen + und — eben dieselben Regeln statt, welche wir oben bey der Multiplication angemerkt haben, nämlich: + durch + giebt +: + durch — giebt —: — durch + giebt —: — durch — giebt +: oder kürzer, gleiche Zeichen geben plus, ungleiche aber minus.

57.

Wann also 18 pq durch — 3 p dividiret werden soll, so wird der Quotient — 6 q seyn. Ferner: — 30 xy durch + 6 y dividirt giebt — 5 x: ferner: — 54 abc durch — 9 b div. giebt + 6 ac: weil — 9 b mit + 6 ac mult. — 6 . 9 abc, oder — 54 abc giebt: welches für die Division mit einfachen Größen genug seyn mag. Dahero wir zur Erklärung der Brüche fortschreiten wollen, nachdem wir vorher noch etwas von der Natur der Zahlen in Ansehung ihrer Theiler werden bemerket haben.

Capitel

Capitel 6.

Von den Eigenschaften der ganzen Zahlen in Ansehung ihrer Theiler.

58.

Da wir gesehen haben, daß sich einige Zahlen durch gewisse Divisores theilen lassen, andere aber nicht, so ist zur Erkenntniß der Zahlen nöthig, diesen Unterschied wohl zu bemerken, und diejenigen Zahlen, die sich durch irgend einen Divisor theilen lassen, von denjenigen, die sich dadurch nicht theilen lassen, wohl zu unterscheiden, und zugleich auch den Rest, welcher bey der Division der letztern übrig bleibt, wohl anzumerken; zu welchem Ende wir die Divisores

2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, u. s. f.

betrachten wollen.

59.

Es sey erstlich der Divisor 2: die Zahlen also, welche sich dadurch theilen lassen, sind folgende:

2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, u. s. f.

welche dann so fort immer um 2 steigen. Diese Zahlen werden insgesammt **gerade Zahlen** genannt.

Hingegen die übrigen Zahlen

1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, u. s. f.

welche sich durch 2 nicht theilen lassen, ohne daß nicht 1 im Rest bleibe, werden **ungerade Zahlen** genannt, und sind also immer um eins größer oder kleiner als die gerade Zahlen. Die gerade Zahlen können nun alle in dieser allgemeinen Formel 2a begriffen werden, weil, wann man für a nach und nach alle Zahlen annimmt, als

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, u. s. f.

daraus alle gerade Zahlen entspringen. Hingegen sind alle ungerade Zahlen in dieser Formel 2a + 1 enthalten, weil 2a + 1 um 1 größer ist, als die gerade Zahl 2a.

60.

Zweytens. Es sey der Divisor 3, so sind alle Zahlen, welche sich dadurch theilen lassen, folgende:

3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, u. s. f.

welche durch diese Formel 3a vorgestellt werden können. Denn 3a durch 3 dividirt, giebt a zum Quotus, ohne Rest; die übrigen Zahlen aber, wann

wann man sie durch 3 theilen will, lassen entweder 1, oder 2, zum Rest übrig, und sind also von zweyerley Art. Die, welche 1 übrig lassen, sind folgende:

1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, u. s. f.

und sind in dieser Formel 3a + 1 enthalten. Die von der andern Art, welche 2 übrig lassen, sind folgende:

2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, u. s. f.

welche alle alle in dieser Formel 3a + 2 enthalten sind; also, daß alle Zahlen entweder in der Formel 3a, oder in dieser 3a + 1, oder in dieser 3a + 2, enthalten sind.

61.

Wann ferner der Divisor 4 ist, so sind alle Zahlen, die sich dadurch theilen lassen, folgende:

4, 8, 12, 16, 20, 24, u. s. f.

welche immer um 4 steigen, und in der Formel 4a enthalten sind. Die übrigen Zahlen aber, welche sich sich durch 4 nicht theilen lassen, lassen entweder 1 zum Rest, und sind um 1 größer als jene, nämlich:

1, 5, 9, 13, 17, 21, 25, u. s. f.

welche folglich in dieser Formel 4a + 1 enthalten sind; oder sie lassen 2 zum Rest, als:

 2, 6,

2, 6, 10, 14, 18, 22, 26, u. s. f.

und sind in der Formel $4a + 2$ enthalten.

Oder endlich bleibt 3 zum Rest übrig, solche Zahlen sind folgende:

3, 7, 11, 15, 19, 23, 27, u. s. f.

und sind in dieser Formel $4a + 3$ enthalten, so daß alle Zahlen in einer von diesen vier Formeln

$4a$, $4a + 1$, $4a + 2$, $4a + 3$,

enthalten sind.

62.

Eben so verhält sich die Sache mit dem Divisor 5, da alle Zahlen, welche sich dadurch theilen lassen, in der Formel $5a$ enthalten sind; diejenigen aber, welche sich dadurch nicht theilen lassen, sind entweder:

$5a + 1$, $5a + 2$, $5a + 3$, oder $5a + 4$,

und so kann man weiter zu allen größern Divisoren fortschreiten.

63.

Hierbey kommt nun zu statten, was oben von der Auflösung der Zahlen in ihre einfache Factores vorgebracht worden, weil eine jegliche Zahl, unter deren Factoren sich entweder

2, oder 3, oder 4, oder 5, oder 7,

oder eine andere Zahl befindet, sich auch durch dieselbe theilen läßt: da zum Exempel 60 so viel ist, als $2 . 2 . 3 . 5$, so ist klar, daß sich 60 durch 2, durch 3, und auch durch 5 theilen lasse.

64.

Da hernach überhaupt die Formel $abcd$ sich nicht nur durch a und b und c und d, sondern auch durch folgende: ab, ac, ad, bc, bd, cd, ferner durch abc, abd, acd, bcd, und endlich auch durch $abcd$, das ist durch sich selbst, theilen läßt, so läßt sich gleichfals 60, das ist $2 . 2 . 3 . 5$, außer den einfachen Zahlen, auch durch die theilen, die aus zwey einfachen zusammen gesetzt sind, nämlich durch 4, 6, 10, 15, ferner auch durch die, welche aus dreyen bestehen, als: 12, 20, 30, und endlich auch durch 60, das ist, durch sich selbst.

65.

Wann man also eine jegliche beliebige Zahl durch ihre einfache Factores vorgestellt hat, so ist es sehr leicht, alle diejenigen Zahlen anzuzeigen, wodurch sich dieselbe theilen läßt. Dann man darf nur erstlich einen jeden von den einfachen Factoren für sich selbst nehmen, hernach je zwey, je drey, je vier, und so fort mit einander multipliciren, bis man auf die vorgegebene Zahl selbst kommt.

66.

Vor allen Dingen ist hier zu merken, daß sich eine jede Zahl durch 1 theilen lasse, so wie sich auch eine jede Zahl durch sich selbst theilen läßt; also daß eine jede Zahl zum wenigsten zwey Theiler oder Divisores hat, nämlich 1, und sich selbst; welche Zahlen nun, außer diesen beyden Theilern, keine andere haben, sind eben diejenigen, welche oben sind einfache oder Prim-Zahlen genannt worden.

Alle zusammengesetzte Zahlen aber haben, außer 1 und sich selbst, noch andere Divisores, wie aus folgender Tafel zu sehen ist, wo unter jeder Zahl alle ihre Theiler sind gesetzt worden.

Tafel.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	[illegible]	20
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	[illegible]	1	1	1	1	[illegible]	1
	2	3	2	5	2	7	2	3	2	11	2	13	2	3	2	17		[illegible]	2
			4		3		4	9	5		3		7	5	4		3		4
					6		8		10		4		14	15	8		6		5
											6				16		9		10
											12						18		20
1	2	2	3	2	4	2	4	3	4	2	6	[illegible]	4	4	5	[illegible]	6	2	6
p.	p.	p.		p.		p.				p.		p.				p.		p.	

67.

Endlich ist noch zu merken, daß 0 als eine solche Zahl angesehen werden kann, welche sich durch alle mögliche Zahlen theilen läßt; weil, wann man 0 durch eine jegliche Zahl, als a, theilen soll, der Quotus immer 0 ist, denn 0 mal a oder 0 a ist 0: weil es wohl zu merken ist, daß eine jede Zahl, mit 0 multiplicirt, nichts heraus bringe.

Capitel 7.

Von den Brüchen überhaupt.

68.

Wenn sich eine Zahl, als z. E. 7, durch eine andere, als 3, nicht theilen läßt, so ist dieses nur so zu verstehen, daß sich der Quotus nicht durch eine ganze Zahl ausdrucken läßt, keinesweges aber, daß es an sich unmöglich sey, sich einen Begriff von dem Quotus zu machen.

Man darf sich nur eine Linie, die 7 Fuß lang ist, vorstellen, so wird wohl niemand zweifeln, daß es nicht möglich seyn sollte, diese Linie in drey gleiche Theile zu zerschneiden und sich einen Begriff von der Größe eines solchen Theils zu machen.

69.

Da man sich nun einen deutlichen Begriff von dem Quotus, der in solchen Fällen herauskommt, machen kann, obgleich derselbe keine ganze Zahl ist, so werden wir hiedurch auf eine besondere Art von Zahlen geleitet, welche **Brüche** oder **gebrochene Zahlen** genennt werden.

Also

Also haben wir in obigem Exempel, wo 7 durch 3 dividirt werden soll, einen deutlichen Begriff von dem daher entspringenden Quotus, und man pflegt denselben auf folgende Art anzuzeigen $\frac{7}{3}$; wo die übergesetzte Zahl 7 das Dividend und die untergesetzte Zahl der Divisor ist.

70.

Wann also auf eine allgemeine Art die Zahl a durch die Zahl b getheilt werden soll, so wird der Quotus durch $\frac{a}{b}$ angedeutet, welche Schreib-Art ein Bruch genannt wird; dahero man sich keinen bessern Begriff von einem solchen Bruch $\frac{a}{b}$ machen kann, als daß man sagt, es werde dadurch der Quotus angezeigt, welcher entspringe, wann man die obere Zahl durch die untere Zahl dividire. Hierbey ist noch zu merken, daß bey allen dergleichen Brüchen die untere Zahl der **Nenner**, die obere aber der **Zähler** genennt zu werden pflegt.

71.

In dem oben angeführten Bruch $\frac{7}{3}$, welcher mit dem Worte Sieben Drittel ausgesprochen wird, ist 7 der Zähler, und 3 der Nenner. Eben so heißt dieser Bruch

$\frac{2}{3}$ zwey Drittel, $\frac{3}{4}$ drey Viertel,
$\frac{3}{8}$ drey Achtel, $\frac{12}{100}$ zwölf Hunderttheile.

Dieser

Dieser Bruch aber $\frac{1}{2}$ wird genennt ein Halbes, anstatt ein Zweytel; denn eigentlich ist $\frac{1}{2}$ der Quotus, welcher herauskommt, wann man 1 in zwey gleiche Theile zerschneidet, da dann, wie bekannt, ein solcher Theil ein Halbes genennt wird.

72.

Um die Natur der Brüche recht kennen zu lernen, wollen wir erstlich diesen Fall betrachten, wo die obere Zahl der untern, oder der Zähler dem Nenner gleich ist, als $\frac{a}{a}$. Weil nun dadurch der Quotient angedeutet wird, der heraus kommt, wann man a durch a dividiret: so ist klar, daß dieser Quotus just 1 ist, folglich ist dieser Bruch $\frac{a}{a}$ so viel als 1, oder ein Ganzes, daher sind folgende Brüche

$$\frac{2}{2},\ \frac{3}{3},\ \frac{4}{4},\ \frac{5}{5},\ \frac{6}{6},\ \frac{7}{7},\ \frac{8}{8},\ \text{u. s. f.}$$

alle einander gleich, und ein jeder derselben ist so viel als Eins, oder ein Ganzes.

73.

Da nun ein jeder Bruch, dessen Zähler dem Nenner gleich ist, Eins beträgt, so sind alle Brüche, deren Zähler kleiner sind als ihre Nenner, weniger als Eins. Denn wenn ich eine kleinere Zahl durch eine größere dividiren soll, so kommt weniger als 1 heraus; wann z. E. eine Linie von 2 Fuß in 3 gleiche Theile zerschnitten werden soll, so wird ein Theil ohnstreitig kleiner seyn als ein Fuß, dahero offenbar, daß $\frac{2}{3}$ weniger als 1, und dieses eben deswegen, weil der Zähler 2 kleiner ist als der Nenner 3.

74.

Wenn hingegen der Zähler größer ist als der Nenner, so ist der Werth des Bruchs größer als Eins. Also ist $\frac{3}{2}$ mehr als 1, weil $\frac{3}{2}$ so viel ist als $\frac{2}{2}$ und noch $\frac{1}{2}$. Nun aber ist $\frac{2}{2}$ so viel als 1, folglich ist $\frac{3}{2}$ so viel als $1\frac{1}{2}$, nämlich ein Ganzes und noch ein Halbes. Eben so ist

$\frac{4}{3}$ so viel als $1\frac{1}{3}$; ferner $\frac{5}{3}$ so viel als $1\frac{2}{3}$; weiter $\frac{7}{3}$ so viel als $2\frac{1}{3}$.

Und überhaupt darf man in diesen Fällen nur die obere Zahl durch die untere dividiren, und zum Quotus noch einen Bruch hinzusetzen, dessen Zähler der Rest, der Nenner aber der Divisor ist. Also für den Bruch $\frac{43}{12}$, dividirt man 43 durch 12 und bekommt 3 zum Quotus und 7 zum Rest, daher ist $\frac{43}{12}$ so viel als $3\frac{7}{12}$.

75.

75.

Hieraus sieht man, wie Brüche, deren Zähler größer sind als ihre Nenner, in zwey Glieder aufgelöst werden können, wovon das erste eine ganze Zahl ausmacht, das andere aber einen Bruch, dessen Zähler kleiner ist, als sein Nenner. Aus diesem Grunde werden solche Brüche, wo der Zähler größer ist als der nenner, **unächte Brüche** genennet, weil sie Eins, oder mehrere Ganze in sich begreifen. Hingegen sind die **ächten Brüche** solche, deren Zähler kleiner sind als die Nenner, und deren Werth folglich weniger ist als Eins, oder weniger als ein Ganzes.

76.

Man pflegt sich die Natur der Brüche noch auf eine andere Art vorzustellen, wodurch die Sache nicht wenig erläutert wird: Wann man z. E. den Bruch $\frac{3}{4}$ betrachtet, so ist klar, daß derselbe 3 mal größer ist als $\frac{1}{4}$. Nun aber bestehet die Bedeutung des Bruches $\frac{1}{4}$ darinnen, daß, wann man 1 in 4 gleiche Theile zertheilt, ein solcher Theil den Werth desselben anzeiget; wann man daher solcher Theile drey zusammennimmt, so erhält man den Werth des Bruchs $\frac{3}{4}$.

Eben

Eben so kann man einen jeglichen andern Bruch betrachten, als $\frac{7}{12}$: wann man 1 in 12 gleiche Theile zerschneidet, so machen 7 dergleichen Theile den Werth des vorgelegten Bruchs aus.

77.

Aus dieser Vorstellung sind auch die oben erwähnten Namen des Zählers und Nenners entsprungen. Denn weil in dem vorigen Bruch $\frac{7}{12}$ die untere Zahl 12 anzeiget, daß 1 in 12 gleiche Theile zertheilt werden müsse, und also diese Theile benennet, so wird dieselbe füglich der Nenner genannt.

Da aber die obere Zahl, nämlich 7, anzeigt, daß für den Werth des Bruchs 7 dergleichen Theile zusammen genommen werden müssen, und also dieselben gleichsam darzählet, so wird die obere Zahl der Zähler genannt.

78.

Betrachten wir nun die Brüche, deren Zähler 1 ist, als solche, die den Grund der übrigen enthalten, weil man leicht begreift, was $\frac{3}{4}$ sind, wenn man weis, was $\frac{1}{4}$ ist, so sind dergleichen Brüche folgende: $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{5}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{7}$ $\frac{1}{8}$ $\frac{1}{9}$ $\frac{1}{10}$ $\frac{1}{11}$ $\frac{1}{12}$ $\frac{1}{13}$ u. s. f. Hierbey ist zu merken, daß diese Brüche immer kleiner werden; denn in je mehr Theile ein Ganzes zerschnitten wird, desto kleiner werden auch

die

die Theile, also ist $\frac{1}{100}$ kleiner als $\frac{1}{10}$, und $\frac{1}{1000}$ kleiner als $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{10000}$ kleiner als $\frac{1}{1000}$, und $\frac{1}{100000}$ kleiner als $\frac{1}{10000}$.

79.

Hieraus sieht man nun, daß je mehr bey solchen Brüchen der Nenner vergrößert werde, die Bedeutung derselben um so viel kleiner werden müsse. Hierbey entsteht nun die Frage, ob der Nenner nicht so groß angenommen werden könne, daß der Bruch gänzlich verschwinde und zu nichts werde? Dieses aber wird mit Recht verneint, denn in so viel gleiche Theile man auch immer Eins, z. E. die Länge eines Fußes, zertheilen mag, so behalten die Theile doch noch immer eine gewisse Größe, und sind folglich nicht nichts.

80.

Es ist zwar wahr, daß wann man die Länge eines Fußes in mehr als 1000 gleiche Theile zertheilt, die Theile fast nicht mehr in die Augen fallen. So bald man sie aber durch ein gutes Microspium betrachtet, so erscheinen dieselben so groß, daß sie leicht von neuem in 100 und noch mehrere Theilchen könnten zertheilt werden.

Hier

Hier ist aber die Rede keinesweges von dem, was wir verrichten können, oder was wirklich kann verrichtet werden, und was noch in die Augen fällt, sondern vielmehr von demjenigen, was an sich möglich ist. Und da ist allerdings gewiß, daß, so groß auch immer der Nenner angenommen werden mag, der Bruch gleichwohl nicht gänzlich verschwinde, oder in nichts, oder 0 verwandelt werde.

81.

Weil man nun, so sehr auch der Nenner vermehret würde, niemals gänzlich zu nichts kommt, sondern diese Brüche noch immer einige Größe behalten, und also die obengesetzte Reihe der Brüche immer weiter ohne Ende fortgesetzt werden kann, so pflegt man zu sagen, daß der Nenner unendlich groß seyn müßte, wann endlich der Bruch zu 0 oder nichts werden sollte. Denn das Wort unendlich will hier eben so viel sagen, als daß man mit dem gemeldeten Bruche niemals zu Ende komme.

82.

Um nun diesen Begriff, welcher allerdings fest gegründet ist, vorzustellen, so bedient man sich

dazu

dazu dieses Zeichens ∞, welches eine unendlich große Zahl andeutet: und daher kann man sagen, daß dieser Bruch $\frac{1}{\infty}$ ein wirkliches Nichts sey, eben deswegen, weil ein solcher Bruch niemalen Nichts werden kann, so lange der Nenner noch nicht ins Unendliche vermehret worden.

83.

Dieser Begriff von dem Unendlichen ist desto sorgfältiger zu bemerken, weil derselbe aus den ersten Gründen unserer Erkenntniß ist hergeleitet worden, und in dem folgenden von der größten Wichtigkeit seyn wird. Es lassen sich schon hier daraus schöne Folgen ziehen, welche unsere Aufmerksamkeit verdienen, da dieser Bruch $\frac{1}{\infty}$ den Quotus anzeigt, wann man das Dividend 1 durch den Divisor ∞ dividiret. Nun wissen wir schon, daß, wann man das Dividend 1 durch den Quotus, welcher ist $\frac{1}{\infty}$ oder 0, wie wir gesehen haben, dividiret, alsdann der Divisor, nämlich ∞, herauskomme; daher erhalten wir einen neuen Begriff von dem Unendlichen, nämlich daß dasselbe herauskomme, wann man 1 durch 0 dividiret; folglich kann man mit Grund sagen, daß 1 durch 0 dividirt eine unendlich große Zahl oder ∞ anzeige.

48.

84.

Hier ist nöthig, noch einen ziemlich gemeinen Irrthum aus dem Weg zu räumen, indem viele behaupten, ein unendlich Großes könne weiter nicht vermehret werden. Dieses aber kann mit obigen richtigen Gründen nicht bestehen.

Dann da $\frac{1}{0}$ eine unendlich große Zahl andeutet, und $\frac{2}{0}$ ohnstreitig zweymal so groß ist; so ist klar, daß auch so gar eine unendlich große Zahl noch 2 mal größer werden könne.

Capitel 8.

Von den Eigenschaften der Brüche.

85.

Wie wir oben gesehen haben, daß jeder dieser Brüche, $\frac{2}{2}, \frac{3}{3}, \frac{4}{4}, \frac{5}{5}, \frac{6}{6}, \frac{7}{7}, \frac{8}{8}$, und so fort, ein Ganzes ausmache und folglich alle unter einander gleich sind; so sind auch folgende Brüche,

$\frac{2}{1}, \frac{4}{2}, \frac{6}{3}, \frac{8}{4}, \frac{10}{5}, \frac{12}{6}$, u. s. f.

einander gleich, weil ein jeder derselben zwey Ganze ausmacht: dann es giebt der Zähler eines jeglichen, durch seinen Nenner dividirt, 2. Eben so sind alle diese Brüche,

$$\frac{3}{1}, \frac{6}{2}, \frac{9}{3}, \frac{12}{4}, \frac{15}{5}, \frac{18}{6}, \text{ u. s. f.}$$

einander gleich, weil der Werth eines jeglichen 3 beträgt.

86.

Gleicher Gestalt läßt sich auch der Werth eines jeglichen Bruchs auf unendlich vielerley Arten vorstellen. Denn wann man so wohl den Zähler als den Nenner eines Bruchs mit eben derselben Zahl, so nach Belieben genommen werden kann, multiplicirt, so behält der Bruch immer eben denselben Werth. Also sind alle diese Brüche,

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{5}{10}, \frac{6}{12}, \frac{7}{14}, \frac{8}{16}, \frac{9}{18}, \frac{10}{20}, \text{ u. s. f.}$$

einander gleich, und ein jeder so viel als $\frac{1}{2}$. Eben so sind auch alle diese Brüche,

$$\frac{1}{3}, \frac{2}{6}, \frac{3}{9}, \frac{4}{12}, \frac{5}{15}, \frac{6}{18}, \frac{7}{21}, \frac{8}{24}, \frac{9}{27}, \frac{10}{30}, \text{ u. s. f.}$$

einander gleich, und ein jeder so viel als $\frac{1}{3}$.

Ferner

Ferner auch diese,

$$\frac{2}{3}, \frac{4}{6}, \frac{6}{9}, \frac{8}{12}, \frac{10}{15}, \frac{12}{18}, \frac{14}{21}, \frac{16}{24}, \text{ u. s. f.}$$

einander gleich; weswegen auf eine allgemeine Art dieser Bruch $\frac{a}{b}$ auf folgende Arten kann vorgestellt werden,

$$\frac{a}{b}, \frac{2a}{2b}, \frac{3a}{3b}, \frac{4a}{4b}, \frac{5a}{5b}, \frac{6a}{6b},$$ und so ferner, davon ein jeder so groß ist, als der erste $\frac{a}{b}$.

87.

Um dieses zu beweisen, darf man nur für den Werth des Bruchs $\frac{a}{b}$ einen besondern Buchstaben, als c, schreiben, dergestalt daß c der Quotus sey, wann man a durch b dividirt. Nun aber ist gezeigt worden, daß, wann man den Quotus c mit dem Divisor b multiplicirt, das Dividend herauskommen müsse.

Da nun c mit b multiplicirt a giebt, so wird c mit 2b multiplicirt 2a geben, und c mit 3b multiplicirt wird 3a geben; und also überhaupt c mit mb multiplicirt, muß ma geben.

 Macht

Macht man hieraus wieder ein Divisions-Exempel und dividirt das Product ma durch den einen Factor mb, so muß der Quotus dem andern Factor c gleich seyn: nun aber giebt ma durch mb dividirt den Bruch $\frac{ma}{mb}$, dessen Werth folglich c ist. Weil aber c dem Werth des Bruchs $\frac{a}{b}$ gleich ist, so ist offenbar, daß der Bruch $\frac{ma}{mb}$ dem Bruch $\frac{a}{b}$ gleich sey, man mag statt m eine Zahl annehmen, was man für eine will.

88.

Da nun ein jeglicher Bruch durch unendlich viele Formen kann vorgestellt werden, von welchen eine jede eben denselben Werth enthält, so ist ohnstreitig, daß derjenige am leichtesten zu begreiffen sey, welcher aus den kleinsten Zahlen besteht; als da anstatt $\frac{2}{3}$ ein jeder von folgenden Brüchen, $\frac{4}{6}$, $\frac{6}{9}$, $\frac{8}{12}$, $\frac{10}{15}$, $\frac{12}{18}$, und so fort nach Willkühr gesetzt werden könnte, so wird wohl niemand zweifeln, daß nicht die Form $\frac{2}{3}$ dennoch am leichtesten unter allen zu begreiffen sey. Hierbey kommt nun diese Frage vor, wie man einen Bruch, der nicht in seinen kleinsten Zahlen ausgedruckt ist, z. E.

als z. E. $\frac{8}{12}$, in seine kleinste Form, nämlich in $\frac{2}{3}$, bringen könne?

89.

Diese Frage wird leicht aufzulösen seyn, wann man bedenket, daß ein jeder Bruch seinen Werth behalte, wenn so wohl sein Zähler als Nenner mit einerley Zahl multiplicirt wird. Denn daher erfolgt, daß, wann man auch den Zähler und Nenner eines Bruches durch eben dieselbe Zahl dividiret, der Bruch immer eben denselben Werth behalte. Dieses wird noch leichter aus der allgemeinen Form $\frac{na}{nb}$ ersehen. Denn wenn man so wohl den Zähler na als den Nenner nb durch die Zahl n dividiret, so kommt der Bruch $\frac{a}{b}$ heraus, welcher jenem gleich ist, wie schon oben gezeigt worden.

90.

Um nun einen vorgegebenen Bruch in seine kleinste Form zu bringen, so muß man solche Zahlen finden können, wodurch sich so wohl der Zähler, als der Nenner theilen läßt. Eine solche Zahl nun wird ein **gemeinschaftlicher Theiler** genannt, und so lange man zwischen dem Zähler und

und Nenner einen gemeinschaftlichen Theiler anzeigen kann, so lange läßt sich der Bruch in eine kleinere Form bringen; wann aber kein gemeinschaftlicher Theiler, außer 1, weiter statt findet, so ist der Bruch schon in seine kleinste Form gebracht.

91.

Um dieses zu erläutern, wollen wir den Bruch $\frac{48}{120}$ betrachten. Hier sieht man sogleich, daß sich Zähler und Nenner durch 2 theilen lassen, als woraus der Bruch $\frac{24}{60}$ entsteht. Diese beyde lassen sich nun noch einmal durch 2 theilen, und giebt die Theilung folgenden Bruch, $\frac{12}{30}$, wo 2 abermals ein gemeinschaftlicher Theiler ist und $\frac{6}{15}$ herauskommen. Hier ist aber klar, daß sich der Zähler und Nenner noch durch 3 theilen lasse, woraus der Bruch $\frac{2}{5}$ entspringt, welcher dem vorgegebenen gleich ist, und sich in der kleinsten Form befindet, weil die Zahlen 2 und 5 weiter keinen gemeinschaftlichen Theiler haben außer 1, wodurch aber die Zahlen nicht kleiner werden.

92.

Diese Eigenschaft der Brüche, daß, wann man so wohl den Zähler als Nenner mit eben der Zahl entweder multiplicirt oder dividirt, der Werth des Bruchs unverändert bleibe, ist von der größten Wichtigkeit und wird gemeiniglich darauf die ganze Lehre von den Brüchen gegründet. Es lassen sich z. E. zwey Brüche nicht wohl zusammen addiren, oder von einander subtrahiren, ehe man nicht dieselben in andere Formen gebracht, deren Nenner einander gleich sind; wovon im folgenden Capitel gehandelt werden soll.

93.

Hier wollen wir nur noch bemerken, daß alle ganze Zahlen in Form eines Bruchs vorgestellt werden können. Also ist z. E. 6 so viel als $\frac{6}{1}$, weil 6 durch 1 dividirt auch 6 giebt. Und daher entstehen noch diese Formen,

$$\frac{12}{2},\ \frac{18}{3},\ \frac{24}{4},\ \frac{36}{6},\ \text{u. s. f.}$$

welche alle eben denselben Werth, nämlich 6, in sich haben.

Capitel

Capitel 9.

Von der Addition und Subtraktion der Brüche.

94.

Wann die Brüche gleiche Nenner haben, so hat es keine Schwierigkeit, dieselben zu addiren und zu subtrahiren, indem $\frac{2}{7} + \frac{3}{7}$ so viel als $\frac{5}{7}$ und $\frac{4}{7} - \frac{2}{7}$ so viel als $\frac{2}{7}$ ist In diesem Fall verrichtet man die Addition und Subtraction bloß allein an den Zählern, und schreibt den gemeinschaftlichen Nenner darunter. Also macht $\frac{7}{100} + \frac{9}{100} - \frac{12}{100} - \frac{15}{100} + \frac{20}{100}$ so viel als $\frac{9}{100}$: $\frac{24}{50} - \frac{7}{50} - \frac{12}{50} + \frac{31}{50}$ ist so viel als $\frac{36}{50}$ oder $\frac{18}{25}$: $\frac{16}{20} - \frac{3}{80} - \frac{11}{20} + \frac{14}{20}$ ist so viel als $\frac{16}{20}$ oder $\frac{4}{5}$: eben so auch $\frac{1}{3} + \frac{2}{3}$ macht $\frac{3}{3}$ oder 1, das ist ein Ganzes, und $\frac{2}{4} - \frac{3}{4} + \frac{1}{4}$ macht $\frac{0}{4}$, das ist nichts, oder 0.

95.

Wann aber die Brüche nicht gleiche Nenner haben, so ist es allezeit möglich dieselben, in andere von gleichem Werth zu verwandeln, deren

Nenner

Nenner gleich sind. Also wenn diese Brüche $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{3}$ gegeben sind und zusammen addirt werden sollen, so ist zu erwägen daß $\frac{1}{2}$ so viel ist als $\frac{3}{6}$, und $\frac{1}{3}$ so viel als $\frac{2}{6}$: wir haben also anstatt der vorigen diese Brüche $\frac{3}{6} + \frac{2}{6}$, welche geben $\frac{5}{6}$. Ferner $\frac{1}{2} - \frac{1}{3}$ ist wie das obige, nur daß das Zeichen minus darzwischen steht, also $\frac{3}{6} \cancel{+} \frac{2}{6}$ giebt $\frac{1}{6}$. Es seyen ferner gegeben diese Brüche $\frac{3}{4} + \frac{5}{8}$. Weil hier $\frac{3}{4}$ so viel ist als $\frac{6}{8}$, so setzen wir an derselben Stelle $\frac{6}{8}$, und $\frac{5}{8} + \frac{6}{8}$ giebt $\frac{11}{8}$ oder $1\frac{3}{8}$. Wann man fragt wie viel $\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{4}$ zusammen ausmachen, so schreibe man statt derselben nur $\frac{4}{12}$ und $\frac{3}{12}$, so kommt $\frac{7}{12}$.

96.

Wann mehr als zwey Brüche gegeben sind, als: $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{6}$, welche zu gleichen Nennern gebracht werden sollen, so kommt alles darauf an, daß man eine Zahl finde, welche sich durch alle diese Nenner theilen lasse. Eine solche ist nun 60, welche den gemeinen Nenner abgiebt. Also werden wir haben anstatt $\frac{1}{2}$ diesen $\frac{30}{60}$, anstatt $\frac{2}{3}$ diesen $\frac{40}{60}$, anstatt $\frac{3}{4}$ diesen $\frac{45}{60}$, anstatt $\frac{4}{5}$ diesen $\frac{48}{60}$, anstatt $\frac{5}{6}$ diesen $\frac{50}{60}$. Sollen nun diese Brüche

$\frac{30}{60}$

$\frac{30}{60}$, $\frac{40}{60}$, $\frac{45}{60}$, $\frac{48}{60}$, $\frac{50}{60}$, zusammen addirt werden, so machen die Zähler derselben zusammen $\frac{213}{60}$, oder 3 Ganze und $\frac{33}{60}$, oder $3\frac{11}{20}$.

97.

Es kommt hier alles darauf an, daß man zwey Brüche von ungleichen Nennern in andere verwandele, deren Nenner einander gleich sind. Um dieses auf eine allgemeine Art zu verrichten, so seyen die vorgegebene Bruche $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$. Nun multiplicire man den ersten Bruch oben und unten mit d, so bekommt man $\frac{ad}{bd}$, welcher Bruch so groß ist als $\frac{a}{b}$; den andern Bruch multiplicire man wie den ersten oben und unten mit b, so bekommt man anstatt desselben $\frac{bc}{bd}$, und sind also die Nenner jetzt gleich; die Summa aber derselben ist $\frac{ad+bc}{bd}$ und ihre Differenz ist $\frac{ad-bc}{bd}$. Wann also diese Brüche vorgelegt sind, $\frac{5}{8}$ und $\frac{7}{9}$, so bekommt man anstatt derselben $\frac{45}{72}$ und $\frac{56}{72}$, deren Summa $\frac{101}{72}$, die Differenz aber $\frac{11}{72}$ macht.

98.

Hier pflegt auch die Frage vorzukommen, welcher von zwey gegebenen Brüchen größer, oder kleiner

kleiner sey als der andere? Z. E. welcher von diesen zwey Brüchen $\frac{2}{3}$ und $\frac{5}{7}$ ist der größere? Zu diesem Ende darf man nur die beyden Brüche zu gleichen Nennern bringen, und da bekommt man für den erstern $\frac{14}{21}$ und für den andern $\frac{15}{21}$, woraus offenbar ist, daß $\frac{5}{7}$ größer ist als $\frac{2}{3}$, und zwar um $\frac{1}{21}$. Wann ferner diese zwey Brüche gegeben sind, $\frac{3}{5}$ und $\frac{5}{8}$, so bekommt man statt deren die Brüche $\frac{24}{40}$ und $\frac{25}{40}$, woraus erhellet, daß $\frac{5}{8}$ mehr sey als $\frac{3}{5}$, aber nur um $\frac{1}{40}$.

99.

Wann ein Bruch von einer ganzen Zahl abgezogen werden soll, als $\frac{2}{3}$ von 1, so darf man nur $\frac{3}{3}$ anstatt 1 schreiben, da man dann so gleich sieht, daß $\frac{1}{3}$ übrig bleibt. Eben so $\frac{5}{12}$ von 1 abgezogen, bleibt $\frac{7}{12}$. Soll man aber $\frac{3}{4}$ von 2 abziehen, so schreibe man für 2 nur 1 und $\frac{4}{4}$, da denn 1 und $\frac{1}{4}$ übrig bleibt. Ubrigens ist bekannt, daß wann ein Bruch zu einer ganzen Zahl addirt werden soll, man denselben nur schlechthin davor schreibe, als $\frac{2}{3}$ zu 6 addirt, giebt $6\frac{2}{3}$.

100.

Bisweilen geschieht es auch, daß 2 oder mehrere Brüche zusammen addirt, mehr als ein Ganzes

Ganzes ausmachen, welches sodann bemerkt werden muß: als $\frac{2}{3} + \frac{3}{4}$ oder $\frac{8}{12} + \frac{9}{12}$ giebt $\frac{17}{12}$, welches so viel ist als $1\frac{5}{12}$. Eben so wann mehrere ganze Zahlen und Brüche addirt werden sollen, so addirt man erst die Brüche und wann ihre Summa 1 oder mehr ganze enthält, so werden dieselben hernach mit den ganzen Zahlen addirt; z. E. es wäre $3\frac{1}{2}$ und $2\frac{2}{3}$ zu addiren: so machen erstlich die Brüche $\frac{3}{6}$ und $\frac{4}{6}$ zusammen $\frac{7}{6}$, oder $1\frac{1}{6}$, welches mit den Ganzen 6 und $\frac{1}{6}$ ausmacht.

Capitel 10.

Von der Multiplikation und Division.

101.

Wann ein Bruch mit einer ganzen Zahl multiplicirt werden soll, so multiplicirt man damit nur den Zähler, und läßt den Nenner ohnverändert; also

2 mal $\frac{1}{2}$ macht $\frac{2}{2}$, oder 1 Ganzes
2 mal $\frac{1}{3}$ macht $\frac{2}{3}$; ferner 3 mal $\frac{1}{6}$ macht $\frac{3}{6}$, oder $\frac{1}{2}$;
4 mal $\frac{5}{12}$ macht $\frac{20}{12}$, oder 1 und $\frac{8}{12}$, oder $1\frac{2}{3}$.

Man

Man schließt hieraus die Regel, daß ein Bruch mit einer ganzen Zahl multiplicirt wird, wann man entweder der Zähler damit multiplicirt oder auch den Nenner durch die ganze Zahl dividirt, welches letztere, wann es angeht, die Rechnung abkürzt. Z. E. es soll $\frac{8}{9}$ mit 3 multiplicirt werden, so kommt, wenn der Zähler mit der ganzen Zahl multiplicirt wird, $\frac{24}{9}$ heraus, welches so viel ist als $\frac{8}{3}$; lasse ich aber den Zähler unverändert und dividire den Nenner 9 durch 3, so bekomme ich auch $\frac{8}{3}$, das ist 2 und $\frac{2}{3}$. Eben so $\frac{13}{24}$ mit 6 multiplicirt giebt $\frac{13}{4}$ oder $3\frac{1}{4}$.

102.

Ueberhaupt also, wann ein Bruch $\frac{a}{b}$ durch c multiplicirt werden soll, so bekommt man $\frac{ac}{b}$. Hierbey ist zu merken, daß, wann die ganze Zahl just dem Nenner gleich ist, alsdann das Product dem Zähler gleich werde, also:

$\frac{1}{2}$ zweymal genommen giebt 1.
$\frac{2}{3}$ mit 3 mult. giebt 2.
$\frac{3}{4}$ mit 4 mult. giebt 3.

und allgemein, wann der Bruch $\frac{a}{b}$ mit der Zahl b multiplicirt wird, so ist das Product a, wovon der Grund schon oben gezeigt worden; dann

da

da $\frac{a}{b}$ den Quotus ausdruckt, wann das Dividend a durch den Divisor b dividirt wird, und zugleich bewiesen worden, daß der Quotus mit dem Divisor multiplicirt das Dividend geben müsse, so ist klar, daß $\frac{a}{b}$ mit b multiplicirt die Zahl a geben müsse.

103.

Da wir nur gezeigt haben, wie man einen Bruch mit einer ganzen Zahl multiplicire; so müssen wir auch sehen, wie ein Bruch durch eine gantze Zahl zu dividiren sey, ehe wir die Multiplication eines Bruchs mit einem Bruch lehren können. Es ist aber klar, daß wann ich den Bruch $\frac{2}{3}$ durch 2 dividiren soll, $\frac{1}{3}$ heraus komme, eben so wie in dem Fall, da $\frac{6}{7}$ durch 3 getheilt werden sollen, $\frac{2}{7}$ herauskommen. Hieraus erhellet, daß man nur den Zähler durch die ganze Zahl theilen müsse, da dann der Nenner ohnverändert bleibt. Also:

$\frac{12}{25}$ durch 2, div: giebt $\frac{6}{25}$ und
$\frac{12}{25}$ durch 3, div: giebt $\frac{4}{25}$ und
$\frac{12}{25}$ durch 4, div: giebt $\frac{3}{25}$ und so fort.

104.

Die Sache hat also keine Schwierigkeit, wann sich nur der Zähler durch die vorgegebene Zahl theilen

theilen

theilen läßt: wann aber dieses nicht angeht, so ist zu bemerken, daß man den Bruch in unendlich viele andere Formen verändern könne, unter welchen sich gewiß solche finden müssen, deren Zähler sich durch die gegebene Zahl theilen lasse. Also wann $\frac{3}{4}$ durch 2 getheilt werden soll, so verwandele man diesen Bruch in $\frac{6}{8}$, so giebt es, wann er durch 2 dividirt wird $\frac{3}{8}$.

Auf eine allgemeine Art, wenn der Bruch $\frac{a}{b}$ durch c dividirt werden soll, so verwandele man denselben in diesen, $\frac{ac}{bc}$, dessen Zähler ac durch c dividirt a giebt, also ist der gesuchte Quotient $\frac{a}{bc}$.

105.

Hieraus ersehen wir, das wann ein Bruch, als $\frac{a}{b}$, durch eine ganze Zahl c dividiret werden soll, man nur nöthig habe, den Nenner b mit dieser ganzen Zahl zu multipliciren und den Zähler ohnverändert zu lassen. Also, $\frac{5}{8}$ durch 3 dividirt, giebt $\frac{5}{24}$, und $\frac{9}{16}$ durch 5 dividirt, giebt $\frac{9}{80}$. Wann sich aber der Zähler selbst durch eine ganze Zahl theilen läßt, so wird die Rechnung leichter. Als, $\frac{9}{16}$ durch 3 getheilet, giebt $\frac{3}{16}$. Nach jener Art aber $\frac{9}{48}$. Doch ist dieser Bruch so viel als jener $\frac{3}{16}$. Denn 3 mahl 3 ist 9, und 3 mahl 16 ist 48.

106.

106.

Nun sind wir im Stande zu zeigen, wie ein Bruch $\frac{a}{b}$ mit einem andern Bruch $\frac{c}{d}$ multiplicirt werden soll. Man darf nur bedenken, daß $\frac{c}{d}$ so viel ist als c getheilt durch d: und also hat man nur nöthig, den Bruch $\frac{a}{b}$ erstlich mit c zu multipliciren, da denn $\frac{ac}{b}$ herauskommt; hernach durch d zu dividiren, da es denn $\frac{ac}{bd}$ giebt: und hieraus entspringt diese Regul, daß, um zwey Brüche mit einander zu multipliciren, man nur nöthig habe, erstlich die Zähler, und hernach auch die Nenner besonders mit einander zu multipliciren.

Also: $\frac{1}{2}$ mit $\frac{2}{3}$ mult. giebt $\frac{2}{6}$ oder $\frac{1}{3}$: ferner
$\frac{2}{3}$ mit $\frac{4}{5}$ mult. giebt $\frac{8}{15}$; und
$\frac{3}{4}$ mit $\frac{5}{12}$ mult. giebt $\frac{15}{48}$ oder $\frac{5}{16}$ u. s. f.

107.

Nun ist noch übrig zu zeigen, wie ein Bruch durch einen andern Bruch dividirt werden soll; wobey erstlich zu merken, daß wann die Brüche gleiche Nenner haben, die Division nur in den Zählern verrichtet werde: weil z. E. $\frac{3}{12}$ in $\frac{9}{12}$ eben so viel mal enthalten ist, als 3 in 9, das ist 3 mal. Dahero wann $\frac{8}{12}$ durch $\frac{9}{12}$ dividirt werden soll, so darf man nur 8 durch 9 dividi-

ren,

ren, das giebt $\frac{8}{9}$. Ferner $\frac{6}{20}$ in $\frac{18}{20}$ ist 3 mal: $\frac{7}{100}$ in $\frac{49}{100}$ ist 7 mal: $\frac{6}{25}$ durch $\frac{7}{25}$ giebt $\frac{6}{7}$: eben so $\frac{3}{7}$ durch $\frac{4}{7}$ giebt $\frac{3}{4}$.

108.

Wenn aber die Brüche nicht gleiche Nenner haben, so weis man, wie dieselben auf gleiche Nenner zu bringen sind. Z. E. man soll den Bruch $\frac{a}{b}$ durch $\frac{c}{d}$ dividiren, so bringe man erstlich diese Brüche auf gleiche Nenner, und da bekommt man den Bruch $\frac{ad}{bd}$ durch $\frac{bc}{bd}$ zu dividiren, wo dann eben so viel heraus kommen muß, als wann man den ersten Zähler ad durch den letztern bc dividiret. Folglich wird der gesuchte Quotus seyn $\frac{ad}{bc}$.

Hieraus entspringt diese Regul: man muß den Zähler des Dividends mit dem Nenner des Divisors, und den Nenner des Dividens mit dem Zähler des Divisors multipliciren, so wird jenes Product den Zähler, und dieses den Nenner zum Quotient geben.

109.

Wann also $\frac{5}{8}$ durch $\frac{2}{3}$ dividiret werden soll, so bekommt man nach dieser Regul $\frac{15}{16}$ zum Quotient: Wann ferner $\frac{3}{4}$ durch $\frac{1}{2}$ dividert werden soll, so bekommt man $\frac{6}{4}$ oder $\frac{3}{2}$, das ist 1 und $\frac{1}{2}$. Ferner wann durch $\frac{5}{6}$ der Bruch $\frac{25}{48}$ dividirt werden soll, so bekommt man $\frac{150}{240}$ oder $\frac{5}{8}$.

110.

Man pflegt diese Regul für die Division auf eine bequemere Art folgender Gestalt vorzutragen: Man kehrt den Bruch, durch welchen dividirt werden soll, um, indem man seinen Nenner oben, und seinen Zähler unten schreibt, und multiplicirt den Bruch, welcher getheilt werden soll, mit diesem umgekehrten Bruch, so erhält man den gesuchten Quotient. Also $\frac{3}{4}$ durch $\frac{1}{2}$ dividirt, ist eben so viel als $\frac{3}{4}$ mit $\frac{2}{1}$ multiplicirt, woraus kommt $\frac{6}{4}$ oder $1\frac{1}{2}$. Eben so $\frac{5}{8}$ durch $\frac{2}{3}$ dividirt ist eben so viel als $\frac{5}{8}$ mit $\frac{3}{2}$ multiplicirt, woraus kommt $\frac{15}{16}$: ferner $\frac{25}{48}$ durch $\frac{5}{6}$ dividirt, giebt eben so viel als $\frac{25}{48}$ mit $\frac{6}{5}$ multiplicirt, da denn $\frac{150}{240}$ oder $\frac{5}{8}$ entsteht.

Man sieht also überhaupt, daß durch den Bruch $\frac{1}{2}$ dividirt eben so viel ist, als mit $\frac{2}{1}$, das ist mit 2, multiplicirt: und durch $\frac{1}{3}$ dividirt ist eben so viel als mit $\frac{3}{1}$, das ist mit 3, multiplicirt.

111.

Wann dahero die Zahl 100 durch $\frac{1}{2}$ dividirt werden soll, so giebt es 200; und 1000 durch $\frac{1}{3}$ dividirt giebt 3000. Wann ferner 1 durch $\frac{1}{1000}$ dividirt

dividirt werden soll, so kommt 1000; und 1 durch $\frac{1}{100000}$ dividirt, giebt 100000; woraus man begreiffen kann, daß eine Division, die durch 0 geschiehet, unendlich viel geben müße, weil, wann man 1 durch diesen kleinen Bruch $\frac{1}{1000000000}$ dividiret, die große Zahl 1000000000 herauskommt.

112.

Wann ein Bruch durch sich selbsten dividiret werden soll, so versteht sich von selbsten, daß der Quotus 1 seyn werde, weil eine jede Zahl durch sich selbst dividirt 1 giebt: eben dieses weißt auch unsere Regul: als wann z. E. $\frac{3}{4}$ durch $\frac{3}{4}$ dividirt werden soll, so multiplicirt man $\frac{3}{4}$ mit $\frac{4}{3}$, da dann kommt $\frac{12}{12}$, das ist 1. Und wann $\frac{a}{b}$ durch $\frac{a}{b}$ dividirt werden soll, so multiplicirt man $\frac{a}{b}$ mit $\frac{b}{a}$, da dann $\frac{ab}{ab}$, das ist, 1 herauskommt.

113.

Es ist noch übrig, eine Redens-Art zu erklären, welche öfters gebraucht wird: z. E. man frägt, was die Hälfte von $\frac{3}{4}$ sey, so will das so viel sagen, als man soll $\frac{3}{4}$ mit $\frac{1}{2}$ multipliciren. Eben so, wann man frägt, was $\frac{2}{3}$ von $\frac{5}{8}$ sey, so muß man $\frac{5}{8}$ mit $\frac{2}{3}$ multipliciren, da dann kommt $\frac{10}{24}$; und $\frac{3}{4}$ von $\frac{9}{16}$ ist eben so viel als $\frac{9}{16}$ mit $\frac{3}{4}$ multiplicirt

 giebt

giebt und beträgt $\frac{27}{64}$. Welches wohl zu merken, so oft diese Redens-Art vorkommt.

114.

Endlich ist hier wegen der Zeichen $+$ und $-$ eben das zu bemerken, was oben bey den ganzen Zahlen gesagt worden. Also: $+\frac{1}{2}$ mit $-\frac{1}{3}$ multiplicirt, giebt $-\frac{1}{6}$; und $-\frac{2}{3}$ mit $-\frac{4}{5}$ multiplicirt, giebt $+\frac{8}{15}$. Ferner $-\frac{5}{8}$ durch $+\frac{2}{3}$ dividirt, giebt $-\frac{15}{16}$, und $-\frac{3}{4}$ durch $-\frac{3}{4}$, giebt $+\frac{12}{12}$ oder $+1$.

Capitel II.

Von den Quadrat-Zahlen.

115.

Wann eine Zahl mit sich selbsten multiplicirt wird, so wird das Product ein **Quadrat** genennet, so wie in Ansehung dessen die Zahl, daraus es entstanden, seine **Quadrat-Wurzel** genennet wird.

Also wann man z. E. 12 mit 12 multiplicirt, so ist das Product 144 eine Quadrat-Zahl, deren Wurzel die Zahl 12 ist.

116.

Der Grund dieser Benennung ist aus der Geometrie genommen, wo der Inhalt eines Quadrats gefunden wird, wann man die Seite desselben mit sich selbsten multipliciret.

116.

Daher werden alle Quadrat-Zahlen durch die Multiplication gefunden, wann man nehmlich die Wurzel mit sich selbsten multipliciret.

Also weil 1 mit 1 multiplicirt 1 giebt, so ist 1 das Quadrat von 1.

Ferner ist 4 das Quadrat von der Zahl 2; und 2 ist hingegen die Quadrat-Wurzel von 4.

Eben so ist 9 das Quadrat von 3, und 3 die Quadrat-Wurzel von 9. Wir wollen demnach die Quadraten der natürlichen Zahlen betrachten, und folgende Tafel hersetzen, in welcher die Zahlen oder Wurzeln in der ersten, die Quadraten aber in der andern Reihe vorgestellt werden.

Zahlen	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
Quadr.	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144	169	196	[illegible]	256	289

117.

Bey dieser der Ordnung nach fortschreitenden Quadrat-Zahlen bemerken wir sogleich eine schöne Eigenschaft, welche darinnen besteht, daß, wann man

man eine jede von der folgenden subtrahiret, die Reste in folgender Ordnung fortgehen:

3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, etc.

welche immer um zwey steigen, und alle ungerade Zahlen der Ordnung nach vorstellen.

118.

Auf gleiche Weise werden die Quadraten von Brüchen gefunden, wann man nämlich einen Bruch mit sich selbsten multiplicirt. Also ist

von $\frac{1}{2}$ das Quadrat $\frac{1}{4}$,
von $\frac{2}{3}$ = = = $\frac{4}{9}$,
von $\frac{1}{4}$ = = = $\frac{1}{16}$,
von $\frac{3}{4}$ = = = $\frac{9}{16}$, u. s. f.

Man darf nämlich nur das Quadrat des Zählers durch das Quadrat des Nenners dividiren, so bekommt man das Quadrat des Bruches. Also ist $\frac{25}{64}$ das Quadrat des Bruches $\frac{5}{8}$ und umgekehrt ist $\frac{5}{8}$ die Wurzel von $\frac{25}{64}$.

119.

Wann man das Quadrat von einer vermischten Zahl, welche aus einer ganzen Zahl und einem Bruch besteht, finden will, so darf man dieselbe in einen einzelnen Bruch bringen, und Quadrat davon nehmen. Also um das Quadrat

von $2\frac{1}{2}$ zu finden, so ist erstlich $2\frac{1}{2}$ so viel als $\frac{5}{2}$, und folglich das Quadrat $\frac{25}{4}$, welches beträgt $6\frac{1}{4}$. Also ist $6\frac{1}{4}$ das Quadrat von $2\frac{1}{2}$. Eben so um das Quadrat von $3\frac{1}{4}$ zu finden, so bemerke man, daß $3\frac{1}{4}$ so viel ist als $\frac{13}{4}$, wovon das Quadrat $\frac{169}{16}$ ist, welches 10 und $\frac{9}{16}$ ausmacht. Wir wollen z. E. die Quadraten, welche von 3 bis 4 um ein Viertel steigen, betrachten, als:

Zahlen 3	$3\frac{1}{4}$	$3\frac{1}{2}$	$3\frac{3}{4}$	4
Quadrate 9	$10\frac{9}{16}$	$12\frac{1}{4}$	$14\frac{1}{16}$	16

Woraus man leicht abnehmen kann, daß wann die Wurzel einen Bruch enthält, das Quadrat derselben auch immer einen Bruch enthalte. Also wenn die Wurzel ist $1\frac{5}{12}$, so wird das Quadrat derselben gefunden, welches ist $2\frac{1}{144}$, und also nur um sehr wenig größer als 2.

120.

Auf eine allgemeine Art, wenn die Wurzel a ist, so ist das Quadrat aa: ferner von der Wurzel 2a ist das Quadrat 4aa. Hieraus sieht man, daß wann die Wurzel 2 mal so groß genommen wird, das Quadrat 4 mal größer werde. Ferner ist von der Wurzel 4a das Quadrat 16aa u. s. w. Heißt aber die Wurzel ab, so ist ihr Quadrat aabb, und wann abc die Wurzel ist, so ist ihr Quadrat aabbcc.

121.

Wann daher die Wurzel aus 2 oder mehrern Factoren besteht, so muß man die Quadrate derselben mit einander multipliciren, und umgekehrt, wann das Quadrat aus 2 oder mehrern Factoren besteht, deren jeder ein Quadrat ist, so braucht man nur die Wurzel derselben mit einander zu multipliciren. Also da 2304 so viel ist, als 4 . 16 . 36; so ist die Quadrat-Wurzel davon 2 . 4 . 6, das ist 48, und in der That ist 48 die Quadrat-Wurzel von 2304, weil 48 . 48 eben so viel ausmacht, als 2304.

122.

Nun wollen wir auch die Zeichen plus und minus erwegen, was es mit denselben bey den Quadraten für eine Bewandniß habe. Es erhellet sogleich, daß wann die Wurzel das Zeichen + hat, oder eine Positiv-Zahl ist, dergleichen wir bisher angenommen haben, das Quadrat derselben auch eine Positiv-Zahl seyn müsse, weil + mit + multiplicirt + giebt. Also wird das Quadrat von + a seyn + aa. Wann aber die Wurzel eine Negativ-Zahl ist, als — a, so wird ihr Quadrat seyn + aa, eben so als wann die Wurzel + a wäre; folglich ist + aa eben so wohl das Quadrat von + a als von — a; und können von einem jeden Quadrat zwey Quadrat-Wurzeln angegeben werden, deren eine positiv, die andere negativ ist. Also ist die Quadrat-Wurzel von 25 so wohl + 5, als — 5, weil + 5 mit + 5 multiplicirt, und auch — 5 mit — 5 multiplicirt, + 25 giebt.

Capitel 12.

Von den Quadrat-Wurzeln und den daher entspringenden Irrational-Zahlen.

123.

Aus dem vorhergehenden erhellet, daß die Quadrat-Wurzel aus einer vorgegebenen Zahl nichts anderes ist, als eine solche Zahl, deren Quadrat der vorgegebenen Zahl gleich ist. Also die Quadrat-Wurzel von 4 ist 2, von 9 ist sie 3, von 16 ist sie 4, u. s. w. wobey zu merken ist, daß diese Wurzeln so wohl mit dem Zeichen plus als minus gesetzt werden können. Also von der Zahl 25 ist die Quadrat-Wurzel so wohl + 5, als — 5, weil — 5 mit — 5 multiplicirt eben so wohl + 25 ausmacht, als + 5 mit + 5 multiplicirt.

124.

124.

Wenn dahero die vorgegebene Zahl ein Quadrat ist man die Quadrat-Zahlen so weit im Gedächtniß hat so ist es leicht die Quadrat-Wurzel zu finden; als, wenn die vorgegebene Zahl 196 wär, so weiß man, daß die Quadrat-Wurzel davon 14 ist. Mit den Brüchen ist es ebenfalls nicht schwerer, und ist aus dem obigen klar, daß von dem Bruch $\frac{25}{49}$ die Quadrat-Wurzel $\frac{5}{7}$ sey, weil man nur so wohl von dem Zähler, als von dem Nenner die Quadrat-Wurzel nehmen darf. Ist die vorgegebene Zahl eine vermischte Zahl, als $12\frac{1}{4}$, so bringe man dieselbe auf einen einzelnen Bruch, nämlich $\frac{49}{4}$, wovon die Quadrat-Wurzel offenbar $\frac{7}{2}$ ist, oder $3\frac{1}{2}$, welches also die Quadrat-Wurzel von $12\frac{1}{4}$ ist.

125.

Wann aber die vorgegebene Zahl kein Quadrat ist, als z. E. 12, so ist auch nicht möglich, die Quadrat-Wurzel davon, das ist, eine solche Zahl, welche mit sich selbst multiplicirt just 12 ausmache, zu finden oder anzugeben. Inzwischen aber wissen wir doch, daß die Quadrat-Wurzel von 12 grösser als 3, weil $3 \cdot 3$ nur 9 macht, doch aber kleiner als 4, weil $4 \cdot 4$ schon 16 macht; wir wissen so gar

gar auch, daß dieselbe kleiner seyn müsse, als $3\frac{1}{2}$, weil das Quadrat von $3\frac{1}{2}$ mehr ist als 12, dann $3\frac{1}{2}$ ist $\frac{7}{2}$ und dessen Quadrat $\frac{49}{4}$ oder $12\frac{1}{4}$. Wir können sogar diese Wurzel noch näher bestimmen durch $3\frac{7}{15}$, denn das Quadrat von $3\frac{7}{15}$ oder $\frac{52}{15}$ macht $\frac{2704}{225}$; folglich ist $3\frac{7}{15}$ noch um etwas zu groß, denn $\frac{2704}{225}$ ist um $\frac{4}{225}$ größer als 12.

126.

Weil nun $3\frac{1}{2}$ und auch $3\frac{7}{15}$ um etwas grösser ist als die Quadrat-Wurzel von 12, so möchte man denken, daß wenn man anstatt des Bruchs $\frac{7}{15}$ einen etwas kleinern zu 3 addirte, das Quadrat davon genau 12 werden könnte.

Laßt uns also $3\frac{3}{7}$ nehmen, weil $\frac{3}{7}$ um etwas weniges kleiner ist als $\frac{7}{15}$. Nun ist $3\frac{3}{7}$ so viel als $\frac{24}{7}$, wovon das Quadrat $\frac{576}{49}$, und also kleiner ist als 12. Denn 12 betragen $\frac{588}{49}$, ist also noch um $\frac{12}{49}$ zu klein. Hieraus sehen wir also, daß $3\frac{3}{7}$ zu klein, $3\frac{7}{15}$ aber zu groß ist. Man könnte also $3\frac{5}{11}$ annehmen, weil $\frac{5}{11}$ größer ist als $\frac{3}{7}$, und doch kleiner als $\frac{7}{15}$. Da nun $3\frac{5}{11}$ in einen Bruch gebracht $\frac{38}{11}$ sind, so ist das Quadrat davon $\frac{1444}{121}$. Aber 12 auf diesen Nenner gebracht, giebt $\frac{1452}{121}$, woraus erhellet, daß $3\frac{5}{11}$ noch zu klein ist und das nur um $\frac{8}{121}$. Wollte man

man nun setzen, die Wurzel wäre $3\frac{6}{13}$, weil $\frac{6}{13}$ etwas größer ist als $\frac{5}{11}$, so wäre das Quadrat davon $\frac{2025}{169}$; aber 12 zu diesem Nenner gebracht, bringt $\frac{2028}{169}$. Also ist $3\frac{6}{13}$ noch zu klein, doch nur um $\frac{3}{169}$, da doch $3\frac{7}{15}$ zu groß ist.

127.

Es läßt sich auch leicht begreiffen, daß, was wir auch immer für einen Bruch zu 3 hinzusetzen möchten, das Quadrat davon immer einen Bruch in sich fassen müsse, und also niemals genau 12 betragen könne. Also, ohnerachtet wir wissen, daß die Quadrat-Wurzel von 12 grösser ist als $3\frac{6}{13}$, doch aber kleiner als $3\frac{7}{15}$, so müssen wir doch bekennen, daß es nicht möglich sey, zwischen diesen zwey Brüchen einen solchen ausfündig zu machen, welcher, zu 3 addirt, die Quadratwurzel von 12 genau ausdrückte. Inzwischen kann man doch nicht sagen, daß die Quadrat-Wurzel von 12 an und für sich selbsten unbestimmt wäre, sondern es folgt aus dem angeführten nur so viel, daß dieselbe durch Brüche nicht könne ausgedrückt werden, ohngeachtet sie nothwendig eine bestimmte Größe hat.

128.

128.

Hierdurch werden wir auf eine neue Art von Zahlen geleitet, welche sich keineswegs durch Brüche ausdrücken lassen, und gleichwohl eine bestimmte Größe haben, wie wir von der Quadrat-Wurzel aus der Zahl 12 gesehen haben. Diese neue Art von Zahlen werden nun **Irrational-Zahlen** genennt, und solche entspringen, so oft man die Quadrat-Wurzel aus einer Zahl suchen soll, welche kein Quadrat ist. Also weil 2 kein Quadrat ist, so ist auch die Quadrat-Wurzel 2, oder diejenige Zahl, welche mit sich selbsten multiplicirt, genau 2 hervorbringt, eine Irrational-Zahl. Bisweilen pflegen auch solche Zahlen **Surdische** genennt zu werden.

129.

Ohngeachtet sich nun solche Irrational-Zahlen durch keinen Bruch vorstellen lassen, so haben wir doch einen deutlichen Begriff von der Größe derselben. Denn z. E. die Quadrat-Wurzel aus 12 mag auch immer noch so verborgen scheinen, so wissen wir doch, daß dieselbe eine solche Zahl ist, welche, mit sich selbst multiplicirt, just 12 hervorbringt. Und diese Eigenschaft ist hinlänglich, uns

einen

einen deutlichen Begriff von dieser Zahl zu geben, insonderheit da wir immer näher zu dem Werth derselben gelangen können.

130.

Weil wir nun einen hinlänglichen Begriff von dergleichen Irrational-Zahlen haben, so bedienet man sich eines gewisses Zeichens, um die Quadrat-Wurzel von solchen Zahlen, welche keine Quadrate sind, anzudeuten. Dieses Zeichen hat nun diese Figur $\sqrt{}$, und wird mit dem Wort Quadrat-Wurzel ausgesprochen. Also $\sqrt{12}$ deutet diejenige Zahl an, welche mit sich selbst multiplicirt 12 giebt, oder die Quadrat-Wurzel aus 12. Eben so bedeutet $\sqrt{2}$ die Quadrat-Wurzel aus 2: $\sqrt{3}$ die Quadrat-Wurzel aus 3: ferner $\sqrt{\frac{2}{3}}$ die Quadrat-Wurzel aus $\frac{2}{3}$, und überhaupt $\sqrt{a}$ deutet die Quadrat-Wurzel aus der Zahl a an. So oft man also aus einer Zahl, welche kein Quadrat ist, die Quadrat-Wurzel anzeigen soll, so bedient man sich dieses Zeichens $\sqrt{}$, welches vor dieselbe Zahl geschrieben wird.

131.

Der obbemeldete Begriff von diesen Irrational-Zahlen führt uns sogleich auf einen Weg, die gewöhnlichen Rechnungen mit denselben anzustellen. Weil nämlich die Quadrat-Wurzel aus 2 mit sich selbst

selbst multiplicirt 2 geben muß, so wissen wir, daß wenn $\sqrt{2}$ mit $\sqrt{2}$ multiplicirt wird, nothwendig 2 herauskomme: eben so $\sqrt{3}$ mit $\sqrt{3}$ multiplicirt giebt 3; und $\sqrt{5}$ mit $\sqrt{5}$ giebt 5; imgleichen $\sqrt{\frac{2}{3}}$ mit $\sqrt{\frac{2}{3}}$ giebt $\frac{2}{3}$: und überhaupt $\sqrt{a}$ mit $\sqrt{a}$ multiplicirt, giebt a.

132.

Wann aber $\sqrt{a}$ mit $\sqrt{b}$ multiplicirt werden soll, so ist das Product $\sqrt{ab}$, weil wir oben gezeigt haben, daß wenn ein Quadrat Factores hat, die Wurzel davon auch aus den Wurzeln der Factores entstehen. Daher findet man die Quadrat-Wurzel aus dem Product ab, das ist $\sqrt{ab}$, wenn man die Quadrat-Wurzel von a, das ist $\sqrt{a}$, mit der Quadrat-Wurzel von b, das ist $\sqrt{b}$, multiplicirt. Hieraus erhellet sogleich, daß wenn b, dem a gleich wäre, alsdenn $\sqrt{a}$ mit $\sqrt{b}$ multiplicirt $\sqrt{aa}$ gäbe. Nun aber ist $\sqrt{aa}$ offenbar a, weil aa das Quadrat ist von a.

§ 120 et § 121

133.

Eben so, wenn $\sqrt{a}$ durch $\sqrt{b}$ dividiret werden soll, so bekömmt man $\sqrt{\frac{a}{b}}$, wobey es sich zutragen kann, daß im Quotus die Irrationalität ver-

verschwinde. Also wenn $\sqrt{18}$ durch $\sqrt{8}$ dividirt werden soll, so bekommt man $\sqrt{\frac{18}{8}}$: Es ist aber $\frac{18}{8}$ so viel als $\frac{9}{4}$, und die Quadrat-Wurzel von $\frac{9}{4}$ ist $\frac{3}{2}$.

134.

Wann die Zahl, vor welche das Wurzel-Zeichen $\sqrt{\ }$ gesezt wird, selbst ein Quadrat ist, so läßt sich die Wurzel davon auf die gewöhnliche Art ausdrucken. Also ist $\sqrt{4}$ so viel als 2; $\sqrt{9}$ ist 3; $\sqrt{36}$ ist 6; und $\sqrt{12\frac{1}{4}}$ ist $\sqrt{\frac{49}{4}}$: das ist, $\frac{7}{2}$ oder $3\frac{1}{2}$. In diesen Fällen ist demnach die Irrationalität nur scheinbar und fällt von selbst weg.

135.

Es ist auch leicht, solche Irrational-Zahlen mit gewöhnlichen Zahlen zu multipliciren. Also ist 2 mal $\sqrt{5}$ so viel als $2\sqrt{5}$; und $\sqrt{2}$ mit 3 multiplicirt, giebt $3\sqrt{2}$; weil aber 3 so viel ist als $\sqrt{9}$, so giebt auch $\sqrt{9}$ mit $\sqrt{2}$ multiplicirt, folgende Form, nämlich $\sqrt{18}$: also, daß $\sqrt{18}$ eben so viel ist als $3\sqrt{2}$. Eben so ist $2\sqrt{a}$ so viel als $\sqrt{4a}$, und $3\sqrt{a}$ so viel als $\sqrt{9a}$, Und auf eine allgemeine Art ist $b\sqrt{a}$ so viel als die Quadrat-Wurzel aus bba oder $\sqrt{ab^2}$; woraus man sieht, daß

daß, wann die Zahl, die hinter dem Zeichen steht, ein Quadrat in sich enthält, die Wurzel davon vor das Zeichen gesezt werden kann; als $b\sqrt{a}$ anstatt $\sqrt{bba}$. Diesem nach werden folgende Reductionen klar seyn:

$\sqrt{8}$, oder $\sqrt{2.4}$ ist so viel als $2\sqrt{2}$.
$\sqrt{12}$, = $\sqrt{3.4}$ = = = = $2\sqrt{3}$.
$\sqrt{18}$, = $\sqrt{2.9}$ = = = = $3\sqrt{2}$.
$\sqrt{24}$, = $\sqrt{6.4}$ = = = = $2\sqrt{6}$.
$\sqrt{32}$, = $\sqrt{2.16}$ = = = = $4\sqrt{2}$.
$\sqrt{75}$, = $\sqrt{3.25}$ = = = = $5\sqrt{3}$ u. s. f.

136.

Mit der Division hat es eben die Bewandniß: $\sqrt{a}$ durch $\sqrt{b}$ dividirt giebt $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, das ist $\sqrt{\frac{a}{b}}$.

Auf eben diese Weise ist $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}$ so viel als $\sqrt{\frac{8}{2}}$, oder $\sqrt{4}$, oder 2.

$\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}}$ ist $\sqrt{\frac{18}{2}}$, oder $\sqrt{9}$, oder 3.
$\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}}$ ist $\sqrt{\frac{12}{3}}$, oder $\sqrt{4}$, oder 2.
$\frac{2}{\sqrt{2}}$ ist $\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{2}}$, oder $\sqrt{\frac{4}{2}}$, oder $\sqrt{2}$.
$\frac{3}{\sqrt{3}}$ ist $\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{3}}$, oder $\sqrt{\frac{9}{3}}$, oder $\sqrt{3}$.
$\frac{12}{\sqrt{6}}$ ist $\frac{\sqrt{144}}{\sqrt{6}}$, oder $\sqrt{\frac{144}{6}}$, oder $\sqrt{24}$, oder $\sqrt{6.4}$, das ist $2\sqrt{6}$.

137.

Bey der Addition und Subtraction fällt nichts besonders zu bemerken vor, weil die Zahlen nur mit plus und minus verbunden werden. Als: $\sqrt{2}$ zu $\sqrt{3}$ addirt, giebt $\sqrt{2} + \sqrt{3}$; und $\sqrt{3}$ von $\sqrt{5}$ abgezogen, giebt $\sqrt{5} - \sqrt{3}$.

138.

Endlich ist noch zu merken, daß, zum Unterschied dieser sogenannten Irrational-Zahlen, die gewöhnlichen Zahlen, so wohl ganze als Brüche, Rational-Zahlen genennt zu werden pflegen.

Wann also von Rational-Zahlen die Rede ist, so werden darunter allezeit nur ganze Zahlen, oder auch Brüche verstanden.

Capitel 13.

Von den aus eben dieser Quelle entspringenden ohnmöglichen oder imaginären Zahlen.

139.

Wir haben schon oben gesehen, daß die Quadraten so wohl von den positiven als negativen Zahlen immer positiv sind, oder mit dem Zeichen plus heraus kommen; indem $-a$ mit $-a$ multiplicirt eben so wohl $+aa$ giebt, als wann man $+a$ mit $+a$ multiplicirt. Und dahero haben wir in dem vorigen Capitel alle Zahlen, woraus die Quadrat-Wurzeln gezogen werden sollen, als positiv angenommen.

140.

Wann es sich dahero zuträgt, daß aus einer Negativ-Zahl die Quadrat-Wurzel gezogen werden soll, so muß man sich allerdings in einer großen Verlegenheit befinden, weil sich keine Zahl angeben läßt, deren Quadrat eine Negativ-Zahl wäre. Denn wann man z. E. die Quadrat-Wurzel von der Zahl — 4 verlangt, so will man eine solche Zahl haben, welche mit sich selbst multiplicirt — 4 gebe. Diese gesuchte Zahl ist also weder + 2 noch — 2, indem so wohl + 2 als — 2, mit sich selbsten multiplicirt, allemal + 4 giebt, und nicht — 4.

141.

Hieraus erkennt man also: daß die Quadrat-Wurzel von einer Negativ-Zahl weder eine Positiv- noch Negativ-Zahl seyn könne, weil auch von allen Negativ-Zahlen die Quadrate positiv werden, oder das Zeichen + bekommen; folglich muß die verlangte Wurzel von einer ganz besondern Art Zahlen seyn, indem dieselbe weder zu den Positiv- noch Negativ-Zahlen gerechnet werden kann.

142.

Da nun oben schon angemerkt worden, daß die Positiv-Zahlen alle größer sind als nichts, oder 0: die Negativ-Zahlen hingegen alle kleiner sind als nichts, oder 0; also, daß alles, was größer ist als nichts, durch Positiv-Zahlen, alles aber, was kleiner ist als nichts, durch Negativ-Zahlen ausgedrückt

gedrückt wird: so sehen wir, daß die Quadrat-Wurzeln aus Negativ-Zahlen weder größer sind als nichts, noch kleiner als nichts. Nichts sind sie aber doch auch nicht, weil 0 mit 0 multiplicirt 0, und also keine Negativ-Zahl giebt.

143.

Weil nun alle mögliche Zahlen, die man sich nur immer vorstellen mag, entweder größer oder kleiner sind als 0, oder etwa 0 selbst; so ist klar, daß die Quadrat-Wurzeln von Negativ-Zahlen nicht einmahl unter die möglichen Zahlen können gerechnet werden: folglich müssen wir sagen, daß dieselben ohnmögliche Zahlen sind. Und dieser Umstand leitet uns auf den Begriff von solchen Zahlen, welche ihrer Natur nach ohnmöglich sind, und gemeiniglich *imaginäre Zahlen*, oder *eingebildete Zahlen* genennt werden, weil sie blos allein in der Einbildung statt finden.

144.

Dahero bedeuten alle diese Ausdrücke $\sqrt{-1}$, $\sqrt{-2}$, $\sqrt{-3}$, $\sqrt{-4}$, etc. solche ohnmögliche oder imaginäre Zahlen, weil dadurch Quadrat-Wurzeln von Negativ-Zahlen angezeigt werden.

Von

Von diesen behauptet man also mit allem Recht, daß sie weder größer noch kleiner sind als nichts; und auch nicht einmahl nichts selbsten, als aus welchem Grunde sie folglich für ohnmöglich gehalten werden müssen.

145.

Gleichwohl aber werden sie unserm Verstand dargestellt, und finden in unserer Einbildung statt; daher sie auch blos eingebildete Zahlen genennt werden. Ungeachtet aber diese Zahlen, als z. E. $\sqrt{-4}$, ihrer Natur nach ganz und gar ohnmöglich sind, so haben wir davon doch einen hinlänglichen Begriff, indem wir wissen, daß dadurch eine solche Zahl angedeutet werde, welche mit sich selbsten multiplicirt zum Product -4 hervorbringe; und dieser Begriff ist zureichend, um diese Zahlen in der Rechnung gehörig zu behandeln.

146.

Dasjenige nun, was wir zu allererst von dergleichen ohnmöglichen Zahlen, als z. E. von $\sqrt{-3}$, wissen, besteht darin, daß das Quadrat davon, oder das Product, welches herauskommt, wann

wann $\sqrt{-3}$ mit $\sqrt{-3}$ multiplicirt wird, -3 giebt, eben so ist $\sqrt{-1}$ mit $\sqrt{-1}$ multiplicirt, -1. Und überhaupt wann man $\sqrt{-a}$ mit $\sqrt{-a}$ multiplicirt, oder das Quadrat von $\sqrt{-a}$ nimmt, so giebt es $-a$.

147.

Da $-a$ so viel ist, als $+a$ mit -1 multplicirt, und die Quadrat-Wurzel aus einem Product gefunden wird, wann man die Quadrat-Wurzel aus den Factoren mit einander multiplicirt, so ist Radix aus a mit -1 multiplicirt oder $\sqrt{-a}$, so viel als $\sqrt{a}$ mit $\sqrt{-1}$ multiplicirt. Nun aber ist $\sqrt{a}$ eine mögliche Zahl, folglich läßt sich dieses Ohnmögliche, welches darin vorkommt, allezeit auf $\sqrt{-1}$ bringen. Aus diesem Grunde ist also $\sqrt{-4}$ so viel als $\sqrt{4}$ mit $\sqrt{-1}$ multiplicirt: $\sqrt{4}$ aber ist 2, also ist $\sqrt{-4}$ so viel als $2\sqrt{-1}$, und $\sqrt{-9}$ so viel als $\sqrt{9} \cdot \sqrt{-1}$, das ist $3\sqrt{-1}$, und $\sqrt{-16}$ so viel als $4\sqrt{-1}$.

148.

Da ferner $\sqrt{a}$ mit $\sqrt{b}$ multiplicirt, $\sqrt{ab}$ giebt, so wird $\sqrt{-2}$ mit $\sqrt{-3}$ multiplicirt $\sqrt{6}$ geben. Eben

Eben so wird $\sqrt{-1}$ mit $\sqrt{-4}$ multiplicirt, $\sqrt{4}$, das ist, 2 geben. Hieraus sieht man, daß zwey unmögliche Zahlen mit einander multiplicirt, eine mögliche oder wirkliche Zahl hervorbringen.

Wann aber $\sqrt{-3}$ mit $\sqrt{+5}$ multiplicirt wird, so bekommt man $\sqrt{-15}$. Oder eine mögliche Zahl mit einer unmöglichen multiplicirt, giebt allezeit etwas unmögliches.

149.

Eben so verhält sich die Sache auch mit der Division. Dann da $\sqrt{a}$ durch $\sqrt{b}$ dividirt $\sqrt{\frac{a}{b}}$ giebt, so wird $\sqrt{-4}$ durch $\sqrt{-1}$ dividirt, $\sqrt{+4}$ geben, und $\sqrt{+3}$ durch $\sqrt{-3}$ dividirt, wird geben $\sqrt{-1}$. Ferner 1 durch $\sqrt{-1}$ dividirt, giebt $\sqrt{\frac{+1}{-1}}$, das ist $\sqrt{-1}$, weil 1 so viel ist als $\sqrt{+1}$.

150.

Wie aber die obige Anmerkung allezeit statt findet, daß die Quadrat-Wurzel aus einer jeglichen Zahl immer einen doppelten Werth hat, oder so wohl negativ als positiv genommen werden kann, indem z. E. $\sqrt{4}$ so wohl $+2$ als -2 ist, und überhaupt für die Quadrat-Wurzel aus a so wohl $+\sqrt{a}$ als $-\sqrt{a}$ geschrieben werden kann, so gilt dieses

dieses auch bey den möglichen Zahlen; und die Quadrat-Wurzel aus $+a$ ist so wohl $-\sqrt{+a}$, als $+\sqrt{+a}$, wobey man die Zeichen + und −, welche vor dem $\sqrt{}$ Zeichen gesezt werden, von dem Zeichen, so hinter dem $\sqrt{}$ Zeichen steht, wohl unterscheiden muß.

151.

Endlich muß noch ein Zweifel gehoben werden, welcher darin besteht, daß, da dergleichen Zahlen ohnmöglich sind, dieselben auch ganz und gar keinen Nutzen zu haben scheinen, und diese Lehre als eine bloße Grille angesehen werden könne. Allein dieselbe ist in der That von der größten Wichtigkeit, indem öfters Fragen vorkommen, von welchen man sogleich nicht wissen kann, ob sie möglich sind oder nicht. Wann nun die Auflösung derselben auf solche ohnmögliche Zahlen führt, so ist es ein sicheres Zeichen, daß diese Frage selbst ohnmöglich sey. Um dieses mit einem Exempel zu erläutern, so laßt uns diese Frage betrachten: Man soll die Zahl 12 in zwey solche Theile zerschneiden, deren Product 40 ausmache. Wann man nun diese Frage nach den Regeln auflößt, so findet man für die zwey gesuchte Theile $6+\sqrt{-4}$, und

und $6 - \sqrt{-4}$, welche folglich ohnmöglich sind, hieraus eben erkennt man, daß diese Frage ohnmöglich könne aufgelößt werden. Wollte man aber die Zahl 12 in zwey solche Theile zerschneiden, deren Product 35 wäre, so ist offenbar, daß diese Theile 7 und 5 seyn würden.

Capitel 14.

Von den Cubic-Zahlen.

152.

Wann eine Zahl dreymal mit sich selbst, oder ihr Quadrat nochmals mit derselben Zahl multiplicirt wird, so wird das Product ein Cubus oder eine Cubic-Zahl genennet. Also ist von der Zahl a der Cubus aaa, welcher entsteht, wann die Zahl a mit sich selbsten, nämlich mit a, und das Quadrat derselben aa, nochmals mit der Zahl a multiplicirt wird.

Also sind die Cubi von den natürlichen Zahlen folgende:

Zahlen	1,	2,	3	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10
Cubus	1,	8,	27,	64,	125,	216,	343,	512,	729,	1000.

153.

153.

Wann wir bey diesen Cubic-Zahlen ihre Differenzen, wie bey den Quadrat-Zahlen geschehen, in Betrachtung ziehen, indem wir eine jede von der folgenden subtrahiren, so bekommen wir folgende Reihe von Zahlen, wobey wir noch keine Ordnung bemerken:

7, 19, 37, 61, 91, 127, 169, 217, 271;

wann wir aber von denselben noch ferner die Differenzen nehmen, so erhalten wir folgende Reihe Zahlen, welche offenbar immer um 6 steigen., als:

12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54.

154.

Solchergestalt wird man auch leicht die Cubos von Brüchen finden können: also ist von $\frac{1}{2}$ der Cubus $\frac{1}{8}$, von $\frac{1}{3}$ ist er $\frac{1}{27}$, von $\frac{2}{3}$ ist er $\frac{8}{27}$. Man darf nämlich nur besonders vom Zähler und Nenner die Cubos nehmen. Also vom Bruch $\frac{3}{4}$ wird der Cubus seyn $\frac{27}{64}$.

155.

Wann von einer vermischten Zahl der Cubus gefunden werden soll, so muß dieselbe erstlich in einen

einen einzelnen Bruch verwandelt werden, da dann die Rechnung leicht angestellet wird. Also von der Zahl $1\frac{1}{2}$ wird es leicht seyn, den Cubum zu finden: denn da $1\frac{1}{2}$, zu einem einzeln Bruch gebracht, $\frac{3}{2}$ ist, so wird der Cubus von $\frac{3}{2}$ seyn $\frac{27}{8}$, das ist 3 und $\frac{3}{8}$. Eben so von der Zahl $1\frac{1}{4}$, oder $\frac{5}{4}$, ist der Cubus $\frac{125}{64}$, das ist 1 und $\frac{61}{64}$. Ferner von der Zahl $3\frac{1}{4}$ oder $\frac{13}{4}$ ist der Cubus $\frac{2197}{64}$, welches giebt $34\frac{21}{64}$.

156.

Da von der Zahl a der Cubus aaa ist, so wird von der Zahl ab der Cubus seyn aaabbb; woraus man sieht, daß wann die Zahl zwey oder mehr Factores hat, der Cubus davon gefunden werde, wann man die Cubos von jeglichem Factoren mit einander multiplicirt. Also z. E. weil 12 so viel ist als 3 . 4, so multiplicirt man den Cubus von 3, welcher ist 27, mit dem Cubus von 4, welcher ist 64, so bekommt man 1728, und dieses ist der Cubus von 12. Hieraus ist ferner klar, daß der Cubus von 2a ist 8aaa, und also 8 mal grösser, als der Cubus von a; eben so ist von 3a der Cubus 27aaa, und also 27 mal grösser, als der Cubus von a.

157.

Ziehen wir nun auch die Zeichen + und − in Betrachtung, so ist für sich klar, daß von einer Positiv-Zahl + a der Cubus + aaa, und folglich auch positiv seyn müsse. Wann aber von einer Negativ-Zahl, als − a, der Cubus genommen werden soll, so nehme man erstlich das Quadrat, welches ist + aa, und da solches nochmals mit − a multiplicirt werden soll, so wird der gesuchte Cubus seyn − aaa und wird folglich auch negativ seyn. Dahero es mit den Cubis eine ganz andere Bewandniß hat, als mit den Quadraten, welche allezeit positiv herauskommen. Also ist von − 1 der Cubus − 1, von − 2 der Cubus − 8, von − 3 ist er − 27, und so fort.

Capitel 15.

Von den Cubic-Wurzeln und den daher entspringenden Irrational-Zahlen.

158.

Da gezeigt worden, wie von einer gegebenen Zahl der Cubus gefunden werden soll, so kann auch umgekehrt aus einer gegebenen Zahl diejenige Zahl gefunden werden, welche drey mal mit sich selbsten multiplicirt dieselbe Zahl hervorbringe: und diese wird in Ansehung jener ihre **Cubic-Wurzel** genennet. Also ist die Cubic-Wurzel aus einer vorgegebenen Zahl eine solche Zahl, deren Cubus der vorgegebenen Zahl gleich ist.

159.

Wann also die vorgegebene Zahl eine wirkliche Cubic-Zahl ist, dergleichen wir im obigen Capitel gefunden, so ist leicht die Cubic-Wurzel davon zu finden. Also ist von 1 die Cubic-Wurzel 1, von 8 ist sie 2, und von 27 ist sie 3, von 64 ist sie 4, und so fort.

Eben

Eben so ist auch von -27 die Cubic-Wurzel -3, von -125 ist sie -5. Wann auch die Zahl gebrochen ist, so ist von $\frac{8}{27}$ die Cubic-Wurzel $\frac{2}{3}$, und von $\frac{64}{343}$ ist sie $\frac{4}{7}$. Ferner wann es eine vermischte Zahl ist, als $2\frac{10}{27}$, welche in einem einzelnen Bruch $\frac{64}{27}$ beträgt, so ist die Cubic-Wurzel davon $\frac{4}{3}$, das ist $1\frac{1}{3}$.

160.

Wann aber die vorgegebene Zahl kein wirklicher Cubus ist, so läßt sich auch die Cubic-Wurzel davon, weder durch ganze noch gebrochene Zahlen, ausdrücken; also da 43 keine Cubic-Zahl ist, so kann unmöglich weder in ganzen noch gebrochenen Zahlen eine Zahl angezeigt werden, deren Cubus genau 43 ausmache. Inzwischen aber wissen wir doch so viel, daß die Cubic-Wurzel davon grösser sey als 3, weil der Cubus davon nur 27 ausmacht, und doch kleiner als 4, weil der Cubus davon schon 64 ist. Folglich wissen wir, daß die verlangte Cubic-Wurzel zwischen den Zahlen 3 und 4 enthalten seyn müsse.

161.

Wollte man nun zu 3, weil die Cubic-Wurzel aus 43 grösser ist als 3, noch einen Bruch hinzusetzen,

so

so könnte man der Wahrheit näher kommen; da aber doch der Cubus davon immer einen Bruch enthalten würde, so könnte derselbe niemals genau 43 werden. Man setze z. E. die gesuchte Cubic-Wurzel wäre $3\frac{1}{2}$ oder $\frac{7}{2}$, so würde der Cubus davon seyn $\frac{343}{8}$ oder $42\frac{7}{8}$, folglich nur um $\frac{1}{8}$ kleiner als 43.

162.

Hieraus ist also klar, daß sich die Cubic-Wurzel aus 43 auf keinerley Weise durch ganze Zahlen und Brüche ausdrücken lasse; da wir aber gleichwohl einen deutlichen Begriff von der Größe derselben haben, so bedient man sich, dieselbe anzuzeigen, dieses Zeichens $\sqrt[3]{}$), so vor die gegebene Zahl gesetzet und mit dem Worte Cubic-Wurzel ausgesprochen wird, um dasselbe von der Quadrat-Wurzel zu unterscheiden. Also bedeutet $\sqrt[3]{43}$ die Cubic-Wurzel von 43, das ist, eine solche Zahl, deren Cubus 43 ist, oder welche dreymal mit sich selbsten multiplicirt, 43 hervorbringt.

163.

Hieraus ist klar, daß dergleichen Ausdrücke keineswegs zu den rationalen gehören, sondern eine besondere Art von Irrational-Grössen darstellen. Sie haben auch mit den Quadrat-Wurzeln keine Gemeinschaft, und es ist nicht möglich, eine solche Cubic-Wurzel durch eine Quadrat-Wurzel, als etwa $\sqrt{12}$, auszudrücken: denn da von $\sqrt{12}$ das Quadrat 12 ist, so ist der Cubus davon $12\sqrt{12}$ und also noch irrational, folglich kann derselbe nicht 43 seyn.

164.

Ist aber die vorgegebene Zahl ein wirklicher Cubus, so werden die Ausdrücke rational, also ist $\sqrt[3]{1}$ so viel als 1, $\sqrt[3]{8}$ so viel als 2, und $\sqrt[3]{27}$ so viel als 3, und überhaupt $\sqrt{aaa}$ so viel als a.

165.

Sollte man eine Cubic-Wurzel als $\sqrt[3]{a}$ mit einer andern multipliciren, als mit $\sqrt[3]{b}$, so ist das Product $\sqrt[3]{ab}$; denn wir wissen, daß die Cubic-Wurzel aus einem Product ab gefunden wird, wenn man die Cubic-Wurzel aus den Factoren mit einander multiplicirt. Und eben so, wann $\sqrt[3]{a}$ durch $\sqrt[3]{b}$ dividirt werden soll, so ist der Quotus $\sqrt[3]{\frac{a}{b}}$.

166.

Dahero begreift man, daß $2\sqrt[3]{a}$ so viel ist als $\sqrt[3]{8\,a}$, weil 2 so viel ist als $\sqrt[3]{8}$. Eben so ist $3\sqrt[3]{a}$ so viel als $\sqrt[3]{27\,a}$, und $b\sqrt[3]{a}$ so viel als $\sqrt[3]{abbb}$. Dahero auch umgekehrt, wann die Zahl hinter dem Zeichen einen Factoren hat, der ein Cubus ist, die Cubic-Wurzel daraus vor das Zeichen gesetzt werden kann: also ist $\sqrt[8]{64\,a}$ so viel als $4\sqrt[3]{a}$, und $\sqrt[3]{125\,a}$ so viel als $5\sqrt[3]{a}$. Hieraus folgt, daß $\sqrt[3]{16}$ so viel ist als $2\sqrt[3]{2}$, weil 16 dem $8 \cdot 2$ gleich ist.

167.

Wann die vorgegebene Zahl negativ ist, so hat die Cubic-Wurzel davon keine solche Schwierigkeit, wie oben bey den Quadrat-Wurzeln geschehen; weil nämlich die Cubi von Negativ-Zahlen auch negativ werden, so sind auch hinwiederum die Cubic-Wurzeln aus Negativ-Zahlen negativ. Also ist $\sqrt[3]{-8}$ so so viel als -2, und $\sqrt[3]{-27}$ ist -3. Ferner

$\sqrt[3]{-12}$ ist so viel als $-\sqrt[3]{12}$ und $\sqrt[3]{-a}$ so viel als $-\sqrt[3]{a}$. Woraus man sieht, daß das Zeichen $(-)$, so hinter dem Cubic-Wurzel-Zeichen ist, auch vor dasselbe geschrieben werden kann. Also werden wir hier auf keine unmögliche oder eingebildete Zahlen geleitet, wie bey den Quadrat-Wurzeln der Negativ-Zahlen geschehen.

Capitel 16.

Von den Potestäten oder Potenzen überhaupt.

189.

Wann eine Zahl mehrmalen mit sich selbst multiplicirt wird, so wird das Product eine Potestät, oder auch Potenz, bisweilen auch eine Dignität genennet. Auf teutsch könnte dieser Name durch eine Macht ausgedrückt werden. Da nun ein Quadrat entsteht, wann eine Zahl zwey mal mit sich selbsten multiplicirt wird, und ein Cubus, wann die Zahl drey mal mit sich selbsten multiplicirt wird, so sind so wohl die Quadraten, als die Cubi, unter dem Namen der Potenzen oder Potestäten begriffen.

169.

Diese Potestäten werden nach der Anzahl, wie viel mal eine Zahl mit sich selbst multiplicirt worden, von einander unterscheiden. Also wann eine Zahl zwey mal mit sich selbst multiplicirt wird, so heißt das Product ihre zweyte Potestät, welche also eben so viel ist als das Quadrat davon; wird eine Zahl drey mal mit sich selbst multiplicirt, so heißt das Product ihre dritte Potestät, welche also einerley Bedeutung mit dem Cubus hat: wird ferner eine Zahl vier mal mit sich selbst multiplicirt, so wird das Product ihre vierte Potestät genennt, welche gemeiniglich mit dem Namen des Biquadrats belegt wird: woraus man ferner versteht, was die fünfte, sechste, siebente Potestät einer Zahl bedeute; welche höhere Potestäten übrigens keine besondere Namen zu führen pflegen.

170.

Um dieses besser zu erläutern, so bemerken wir, erstlich daß von der Zahl 1 alle Potestäten immer 1 bleiben, weil, so viele mal man auch 1 mit sich selbst multiplicirt, das Product immer 1 bleibt. Laßt uns dahero die Potestäten der Zahl 2, so wie auch die Potestäten der Zahl 3 nach der Ordnung herschreiben. Diese gehen folgendermaßen fort:

Pote-

Potestäten	der Zahl 2.	der Zahl 3.
I.	2	3
II.	4	9
III.	8	27
IV.	16	81
V.	32	243
VI	64	729
VII.	128	2187
VIII.	256	6561
IX.	512	19683
X.	1024	59049
XI.	2048	177147
XII.	4096	531441
XIII.	8192	1594323
XIV.	16384	4782969
XV.	32768	14348907
XVI.	65536	43046721
XVII.	131072	129140163
XVIII.	262144	387420489

Aber insbesondere sind die Potestäten von der Zahl 10 merkwürdig, nämlich:

I. II. III IV. V. VI.
10, 100, 1000, 10000, 100000, 1000000,

weil sich darauf unsere ganze Rechenkunst gründet. Uebrigens ist zu merken, daß die darüber gesetzten römischen Zahlen andeuten, die wie vielste Potestät eine jegliche sey.

171.

171.

Wollen wir die Sache auf eine allgemeine Art betrachten, so würden sich die Potestäten der Zahl a folgender gestalt verhalten:

I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	
a,	aa,	aaa,	aaaa,	aaaaa,	aaaaaa,	etc.

Bey dieser Art zu schreiben ereignet sich aber diese Unbequemlichkeit, daß, wann sehr hohe Potestäten geschrieben werden sollten, man eben denselben Buchstaben gar viele mal hinschreiben müßte, und es dem Leser noch viel beschwerlicher fallen würde, die Menge dieser Buchstaben zu zählen, um zu wissen, die wie vielste Potestät dadurch angezeigt werde. Also z. E. würde sich die hundertste Potestät auf diese Art schwerlich schreiben lassen, und noch viel weniger zu erkennen seyn.

172.

Dieser Unbequemlichkeit abzuhelfen, hat man eine weit bequemere Art, solche Potestäten auszudrücken, eingeführt, welche wegen ihres herrlichen Nutzens auf das sorgfältigste erklärt zu werden verdienet. Man pflegt nämlich über die Zahl, wovon z. E. die hundertste Potestät soll angezeigt werden,

werden, etwas seitwärts zur rechten die Zahl 100 zu schreiben: also a^{100}, welches ausgesprochen wird, a elivirt oder erhaben zu hundert, drückt die hundertste Potestät von a aus. Die dabey oben geschriebene Zahl, als in unserm Fall 100, pflegt der Exponent genennet zu werden, welche Namen wohl zu bemerken sind.

173.

Nach dieser Art deutet also a^2, oder a elivirt zu aa, die zweyte Potestät von a an, und pflegt auch bisweilen anstatt aa geschrieben zu werden, weil beyde Arten gleich leicht zu schreiben und zu verstehen sind. Hingegen wird gemeiniglich anstatt des Cubi oder der dritten Potestät aaa, nach dieser neuen Art a^3 geschrieben, weil dadurch mehr Platz erspart wird. Eben so drückt a^4 die vierte Potestät, a^5 die fünfte, und a^6 die sechste Potestät von a aus.

174.

Nach dieser Art werden alle Potestäten von der Zahl a folgenderdestalt vorgestellt:

a, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6, a^7, a^8, a^9, a^{10}, a^{11}, a, etc.

woraus man sieht, daß nach dieser Art für das erste Glied a, gar füglich a^1 geschrieben werden könnte, um die Ordnung desto deutlicher in die Augen

fallen

fallen zu machen. Dahero ist a^1 nichts anders als a weil die Unität anzeigt, daß der Buchstabe a nur einmal geschrieben werden soll. Eine solche Reihe von Potestäten pflegt auch eine geometrische Progression genennt zu werden, weil immer ein jedes Glied um eben so viel mal größer ist, als das vorhergehende.

175.

Wie in dieser Reihe der Potestäten ein jedes Glied gefunden wird, wann man das vorhergehende mit a multiplicirt, wodurch der Exponent um eins größer wird; so wird auch aus einem jeglichen Gliede das vorhergehende gefunden, wann man jenes durch a dividirt, als wodurch der Exponent um eins vermindert wird. Hieraus sehen wir, daß das dem ersten Glied a^1 vorhergehende Glied $\frac{a}{a}$ seyn müsse, das ist 1: nach dem Exponenten wird aber eben dasselbe seyn a^0, als woraus diese merkwürdige Eigenschaft folgt, daß a^0 allezeit 1 seyn müsse, die Zahl a mag auch noch so groß oder so klein seyn als sie immer will, ja sogar auch wenn a nichts ist, also daß 0^0 gewiß 1 ausmacht.

176.

Wir können diese Reihe von Potestäten noch weiter rückwärts fortsetzen, und dieses so gar auf eine doppelte Weise: einmal, indem wir immer das

das Glied durch a theilen; hernach aber auch, indem wir den Exponent um eins vermindern oder eins davon subtrahiren. Und wir sind gewiß, daß nach beyderley Arten die Glieder einander vollkommen gleich sind. Wir wollen also die obige Reihe auf diese gedoppelte Art rückwärts vorstellen, welche auch rückwärts von der rechten zur linken gelesen werden muß:

	$\frac{1}{aaaaaa}$	$\frac{1}{aaaaa}$	$\frac{1}{aaaa}$	$\frac{1}{aaa}$	$\frac{1}{aa}$	$\frac{1}{a}$	1	a
1ste	$\frac{1}{a^6}$	$\frac{1}{a^5}$	$\frac{1}{a^4}$	$\frac{1}{a^3}$	$\frac{1}{a^2}$	$\frac{1}{a^1}$		
2te	a^{-6}	a^{-5}	a^{-4}	a^{-3}	a^{-2}	a^{-1}	a^0	a^1

177.

Hierdurch gelangen wir also zur Erkenntniß solcher Potestäten, deren Exponenten negative Zahlen sind; und wir sind im Stande, den Werth derselben genau anzuzeigen. Wir wollen daher dasjenige, was wir gefunden, folgendergestalt vor Augen legen:

Erstlich a^0 ist so viel als 1.

= = a^{-1} = = = $\frac{1}{a}$,

= = a^{-2} = = = $\frac{1}{aa}$ oder $\frac{1}{a^2}$,

= = a^{-3} = = = $\frac{1}{a^3}$,

= = a^{-4} = = = $\frac{1}{a^4}$, u. s. f.

178.

178.

Hieraus ist auch klar, wie die Potestäten von einem Product als ab gefunden werden müssen. Dieselben sind nämlich:
ab oder a^1b^1, a^2b^2, a^3b^3, a^4b^4, a^5b^5, a^6b^6, etc.
Eben so werden auch die Potestäten von Brüchen gefunden, als von dem Bruch $\frac{a}{b}$ sind die Potestäten folgende:

$$\frac{a^1}{b^1}, \frac{a^2}{b^2}, \frac{a^3}{b^3}, \frac{a^4}{b^4}, \frac{a^5}{b^5}, \frac{a^6}{b^6}, \frac{a^7}{b^7}, \text{ etc.}$$

179.

Endlich kommen auch noch hier die Potestäten von Negativ-Zahlen zu betrachten vor. Es sey demnach gegeben die Negativ-Zahl $-a$, so werden ihre Potestäten der Ordnung nach also auf einander folgen,
$-a$, $+aa$, $-a^3$, $+a^4$, $-a^5$, $+a^6$, $-a^7$, etc.
woraus erhellet, daß nur diejenigen Potestäten, deren Exponenten ungerade Zahlen sind, negativ werden; hingegen sind diejenige Potestäten, deren Exponenten gerade sind, alle positiv. Also haben die dritte, fünfte, siebente, neunte Potestäten der negativen Zahlen alle das Zeichen $-$.

Die zweyte, vierte, sechste, achte Potestäten hingegen alle das Zeichen $+$.

Capitel

Capitel 17.

Von den Rechnungs-Arten mit den Potestäten.

180.

In Ansehung der Addition und Subtraction ist hier nichts zu bemerken, indem verschiedene Potestäten nur mit dem Zeichen $+$ und $-$ verbunden werden.

Also ist $a^3 + a^2$ die Summe von der dritten und zweyten Potestät des a; und $a^5 - a^4$ ist der Rest, wann von der fünften Potestät die vierte abgezogen wird, und beydes kann nicht kürzer ausgedruckt werden. Wann aber gleiche Potestäten vorkommen, so ist klar, daß für $a^3 + a^3$ geschrieben werden kann $2a^3$, etc.

181.

Bey der Multiplication solcher Potestäten aber kommt verschiedenes zu bemerken vor. Erstlich wann eine jede Potestät von a mit der Zahl a selbsten multiplicirt werden soll, so kommt die folgende Potestät heraus, deren Exponent um 1 grösser

ser ist. Also a^2 mit a multiplicirt giebt a^3, und a^3 mit a multiplicirt giebt a^4 etc. Eben so mit denjenigen, deren Exponenten negativ sind, wann dieselben mit a multiplicirt werden sollen, darf man nur zu dem Exponent 1 addiren; also a^{-1} mit a multiplicirt giebt a^0, das ist 1, welches daraus klar ist, weil a^{-1} so viel als $\frac{1}{a}$ ist, welches mit a multiplicirt $\frac{a}{a}$ giebt, das ist 1. Eben so mit a^{-2}, wann solches mit a multiplicirt werden soll, giebt a^{-1}, das ist $\frac{1}{a}$, und a^{-10} mit a multiplicirt, giebt a^{-9}, u. s. f.

182.

Wann aber eine Potestät mit aa, oder mit der zweyten Potestät multiplicirt werden soll, so wird der Exponent um 2 größer; also a^2 mit a^2 multiplicirt, giebt a^4, und a^3 mit a^2 multiplicirt, giebt a^5; ferner a^4 mit a^2 multiplicirt, giebt a^6, und überhaupt a^n mit a^2 multiplicirt, giebt a^{n+2}. Eben so mit den Negativ-Exponenten, als a^{-1} mit a^2 multiplicirt, giebt a^1, das ist a, welches daraus klar ist, weil a^{-1} ist $\frac{1}{a}$, dieses mit aa multiplicirt giebt $\frac{aa}{a}$, das ist a. Eben so giebt a^{-2} mit a^2 multiplicirt a^0, das ist 1, ferner a^{-1} mit a^{-2} multiplicirt giebt a^{-}.

183.

Eben so ist klar, daß, wann eine jegliche Potestät mit der dritten Potestät von a, oder mit a^3 multiplicirt werden soll, der Exponent derselben um 3 vermehret werden müsse; oder a^n mit a^3 multiplicirt giebt a^{n+3}. Und überhaupt, wann zwey Potestäten von a mit einander multiplicirt werden sollen, so ist das Product wieder eine Potestät von a, deren Exponent die Summe ist von jenen Exponenten. Also a^4 mit a^5 multiplicirt giebt a^9, und a^{12} mit a^7 multiplicirt giebt a^{19} u. s. f.

184.

Aus diesem Grunde können die hohen Potestäten von bestimmten Zahlen ziemlich leicht gefunden werden; als wann man z. E. die 24ste Potestät von 2 haben wollte, so würde man dieselbe finden, wann man die 12te Potestät mit der 12ten Potestät multiplicirt, weil 2^{24} so viel ist, als 2^{12} mit 2^{12} multiplicirt. Nun aber ist 2^{12}, so wie wir oben gesehen haben, 4096: daher multiplicirt man 4096 mit 4096, so wird das Product 16777216 die verlangte Potestät, nämlich 2^{24} anzeigen.

185.

Bey der Division ist folgendes zu merken. Erstlich wann eine Potestät von a durch a dividirt werden soll, so wird ihr Exponent um 1 kleiner, oder man muß 1 davon subtrahiren. Also a^5 durch a dividirt giebt a^4, und a^0, das ist 1, durch a dividirt, giebt a^{-1} oder $\frac{1}{a}$. Ferner a^{-3} durch a dividirt giebt a^{-4}.

186.

Wann hernach eine Potestät von a durch a^2 dividirt werden soll, so muß man von dem Exponenten derselben 2 abziehen, und wollte man dieselbe durch a^3 dividiren, so müßte man von ihrem Exponenten 3 abziehen. Und also überhaupt was für eine Potestät auch immer von a durch eine andere dividirt werden soll, so muß man von dem Exponenten der erstern den Exponenten der andern subtrahiren. Also a^{15} durch a^7 dividirt giebt a^8, und a^6 durch a^7 dividirt giebt a^{-1}. Ferner auch a^{-3} durch a^4 dividirt giebt a^{-7}.

187.

Hieraus ist leicht zu begreifen, wie Potestäten von Potestäten gefunden werden müssen, weil solches durch die Multiplication geschieht. Also wann man die zweyte Potestät, oder das Quadrat von a^3 verlangt, so ist dasselbe a^6, und die dritte Potestät, oder der Cubus von a^4 wird seyn a^{12}; woraus erhellet, daß um das Quadrat einer Potestät zu finden, der Exponent derselben nur verdoppelt werden müsse. Also von a^n ist das Quadrat a^{2n}, und der Cubus oder die dritte Potestät von a^n wird seyn a^{3n}. Eben so wird auch die siebente Potestät von a^n gefunden a^{7n}, u. s. f.

188.

Das Quadrat von a^2 ist a^4, das ist, die vierte Potestät von a, welche dahero das Quadrat des Quadrats ist. Hieraus erhellet, warum man die vierte Potestät ein Biquadrat oder auch ein Quadratoquadrat nennet.

Weil ferner von a^3 das Quadrat a^6 ist, so pflegt auch die sechste Potestät ein Quadrato-Cubus genennet zu werden.

Endlich auch weil der Cubus von a^3 ist a^9, das ist, die neunte Potestät von a, so pflegt dieselbe auch ein Cubocubus genennet zu werden. Mehrere Nahmen sind heut zu Tage nicht üblich.

Capitel

Capitel 18.

Von den Wurzeln in Absicht auf alle Potestäten.

189.

Weil die Quadrat-Wurzel einer gegebenen Zahl eine solche Zahl ist, deren Quadrat derselben gleich ist, und die Cubic-Wurzel eine solche, deren Cubus ihr gleich ist, so können auch von einer jeden gegebenen Zahl solche Wurzeln angezeigt werden, deren vierte oder fünfte, oder eine beliebige andere Potestät derselben gegebenen Zahl gleich ist. Um diese verschiedene Arten von Wurzeln von einander zu unterscheiden, wollen wir die Quadrat-Wurzel die zweyte Wurzel, und die Cubic-Wurzel die dritte Wurzel nennen, da dann diejenigen Wurzeln, deren vierte Potestät einer gegebenen Zahl gleich ist, ihre vierte Wurzel heissen wird, und diejenige, deren fünfte Potestät derselben Zahl gleich ist, ihre fünfte Wurzel und so fort heißen wird.

190.

Wie die zweyte oder Quadrat-Wurzel durch das Zeichen $\sqrt{}$, und die dritte oder Cubic-Wurzel durch dieses

dieses Zeichen $\sqrt[3]{}$ angedeutet wird; so pflegt man gleicherweise die vierte Wurzel durch dieses Zeichen $\sqrt[4]{}$, die fünfte Wurzel durch dieses Zeichen $\sqrt[5]{}$, und so weiter, anzuzeigen; woraus dann klar ist, daß nach dieser Schreibart das Zeichen der Quadrat-Wurzel also $\sqrt[2]{}$ ausgedruckt werden sollte. Weil aber die Quadrat-Wurzeln am öftesten vorkommen, so wird der Kürze halber die Zahl 2 aus dem Wurzel-Zeichen weggelassen. Daher wann in dem Wurzel-Zeichen keine Ziffer befindlich ist, so muß allezeit dadurch die Quadrat-Wurzel verstanden werden.

191.

Um dieses vor Augen zu legen, so wollen wir die verschiedenen Wurzeln der Zahl a hierher setzen, und ihre Bedeutung anzeigen.

$\sqrt{a}$ ist die zweyte Wurzel von a,
$\sqrt[3]{a}$ - - dritte - - - a,
$\sqrt[4]{a}$ - - vierte - - - a,
$\sqrt[5]{a}$ - - fünfte - - - a,
$\sqrt[6]{a}$ - - sechste - - - a, u. s. f.

Also, daß hinwiederum die
zweyte Potestät von $\sqrt{a}$ dem a gleich ist,
dritte . = = $\sqrt[3]{a}$ = a = =
vierte = = = $\sqrt[4]{a}$ = a = =
fünfte = = = $\sqrt[5]{a}$ = a = =
sechste = = = $\sqrt[6]{a}$ = a = = u. s. f.

192.

Die Zahl a mag nun groß oder klein seyn, so begreift man daher, wie alle Wurzeln von diesen verschiedenen Graden verstanden werden müssen.

Wobey zu merken, daß, wann für a die Zahl 1 genommen wird, alle diese Wurzeln immer 1 bleiben, weil alle Potestäten von 1 immer 1 sind.

Wann aber die Zahl a größer ist als 1, so sind auch alle Wurzeln größer als 1.

Ist aber die Zahl kleiner als 1, so sind auch alle ihre Wurzeln kleiner als 1.

192.

Wann die Zahl a positiv ist, so begreift man aus demjenigen, was oben von den Quadrat= und Cubic=Wurzeln angeführt worden, daß auch alle übrige

Wurzeln wirklich angezeigt werden können, und folglich wirkliche und mögliche Zahlen sind.

Ist aber die Zahl a negativ; so werden ihre zweyten, vierten, sechsten, und überhaupt alle gerade Wurzeln, unmögliche Zahlen, weil alle gerade Potestäten so wohl von Positiv= als Negativ=Zahlen immer das Zeichen + bekommen.

Hingegen aber werden die dritten, fünften, siebenten, und überhaupt alle ungerade Wurzeln, negativ, weil die ungeraden Potestäten von Negativ=Zahlen auch negativ sind.

194.

Wir erhalten also daher eine unendliche Menge neuer Arten von Irrational= oder surdischen Zahlen, weil, so oft die Zahl a keine solche wirkliche Potestät ist, als die Wurzel anzeigt, so oft ist es auch nicht möglich, diese Wurzel durch ganze Zahlen oder Brüche auszudrücken, folglich gehöret dieselbe in dasjenige Geschlecht von Zahlen, welche Irrational=Zahlen genennet werden.

Capitel 19.

Von der Ausdrückung der Irrational-Zahlen durch gebrochene Exponenten.

195.

Wir haben eben in dem letzten Capitel von den Potestäten gezeigt, daß das Quadrat von einer jeglichen Potestät gefunden wird, wann man ihren Exponenten verdoppelt, und daß überhaupt das Quadrat oder die zweyte Potestät von a^n seyn a^{2n}. Dahero ist hinwiederum von der Potestät a^{2n} die Quadrat-Wurzel a^n, und wird folglich gefunden, wann man den Exponenten derselben halbirt oder durch 2 dividirt.

Also ist von a^2 die Quadrat-Wurzel a^1, von a^4 ist die Quadrat-Wurzel a^2, und von a^6 ist die Quadrat-Wurzel a^3, und so fort. Weil nun dieses eine allgemeine Wahrheit ist, so sieht man, wann die Quadrat-Wurzel von a^3 gefunden werden soll, daß dieselbe $a^{\frac{3}{2}}$ seyn werde. Eben so wird von a^5 die Quadrat-Wurzel seyn $a^{\frac{5}{2}}$. Folglich von der Zahl a selbst oder von a^1 wird die Quadrat-Wurzel seyn $a^{\frac{1}{2}}$. Woraus erhellet, daß $a^{\frac{1}{2}}$ eben so viel sey als $\sqrt{a}$, welche neue Manier die Quadrat-Wurzel anzudeuten, wohl zu bemerken ist.

197.

Wir haben ferner gezeigt, daß, um den Cubum von einer Potestät, als a^n, zu finden, man ihren Exponenten mit 3 multiplliciren müsse, und also der Cubus davon seyn werde a^{3n}.

Wann also rückwärts von der Potestät a^{3n} die dritte oder die Cubic-Wurzel gefunden werden soll, so ist dieselbe a^n, und man hat nur nöthig, den Exponenten jener durch 3 zu dividiren. Also von a^3 ist die Cubic-Wurzel a^1 oder a, von a^6 ist dieselbe a^2, von a^9 ist dieselbe a^3, u. s. f.

198.

Dieses muß nun auch wahr seyn, wann sich der Exponent nicht durch 3 theilen läßt, und daher wird von a^2 die Cubic-Wurzel seyn $a^{\frac{2}{3}}$. Und von a^4 ist dieselbe $a^{\frac{4}{3}}$ oder $a^{1\frac{1}{3}}$. Folglich wird auch von der Zahl a selbsten, das ist von a^1, die Cubic- oder dritte Wurzel seyn $a^{\frac{1}{3}}$. Woraus erhellet, daß $a^{\frac{1}{3}}$ eben so viel sey als $\sqrt[3]{a}$.

199.

199.

Eben so verhält es sich auch mit den höhern Wurzeln: und die vierte Wurzel von a wird seyn $a^{\frac{1}{4}}$, welches folglich eben so viel als $\sqrt[4]{a}$. Gleicherweise wird die fünfte Wurzel von a seyn $a^{\frac{1}{5}}$, welches eben so viel ist als $\sqrt[5]{a}$, und dieses ist auch von allen höhern Wurzeln zu verstehen.

200.

Man könnte nun also die schon längst eingeführte Wurzelzeichen gänzlich entbehren, und anstatt derselben die hier erklärten gebrochenen Exponenten gebrauchen; allein da man einmal an jene Zeichen gewöhnet ist, und dieselben in allen Schriften vorkommen, so ist es nicht rathsam, dieselben gänzlich abzuschaffen. Doch wird heut zu Tage diese neue Art auch häufig gebraucht, als welche die Natur der Sache deutlich in sich faßt. Denn daß $a^{\frac{1}{2}}$ wirklich die Quadratwurzel von a sey, sieht man gleich, wann man nur das Quadrat davon nimmt, welches geschieht, wenn man $a^{\frac{1}{2}}$ mit $a^{\frac{1}{2}}$ multiplicirt, da dann offenbar herauskommt a^1, das ist a.

201.

201.

Hieraus ersieht man auch, wie alle übrige gebrochene Exponenten verstanden werden müssen; als wann man hat $a^{\frac{4}{3}}$, so muß von der Zahl a erstlich ihre vierte Potestät a^4 genommen, und hernach die Cubic- oder dritte Wurzel gezogen werden, also daß $a^{\frac{4}{3}}$ eben so viel ist, als nach der gemeinen Art $\sqrt[3]{a^4}$. Eben so wird der Werth $a^{\frac{3}{4}}$ gefunden, wann man erstlich den Cubum oder die dritte Potestät von a sucht, welche a^3 ist, und hernach aus derselben die vierte Wurzel ziehet: also daß $a^{\frac{3}{4}}$ eben so viel ist als $\sqrt[4]{a^3}$. Eben so ist $a^{\frac{4}{5}}$ eben so viel als $\sqrt[5]{a^4}$ u. s. w.

202.

Wenn der Bruch, der den Exponenten vorstellt, größer ist als 1, so läßt sich der Werth auch folgender Gestalt bestimmen. Es sey gegeben $a^{\frac{5}{2}}$, so ist dieses so viel als $a^{2\frac{1}{2}}$, welches herauskommt, wann man a^2 mit $a^{\frac{1}{2}}$ multiplicirt. Da nun $a^{\frac{1}{2}}$ so viel ist als $\sqrt{a}$, so ist $a^{\frac{5}{2}}$ so viel als $a^2\sqrt{a}$. Eben so ist $a^{\frac{10}{3}}$, das ist $a^{3\frac{1}{3}}$, eben so viel als

als $a^3\sqrt[3]{a}$; und $a^{\frac{15}{4}}$, das ist $a^{2\frac{3}{4}}$, ist eben so viel als $a^3\sqrt[4]{a^3}$. Aus welchen allen der herrliche Gebrauch der gebrochenen Exponenten genugsam erhellet.

203.

Auch in Brüchen hat derselbe seinen Nutzen. Als wann vorgegeben ist $\frac{1}{\sqrt{a}}$, so ist dieses so viel als $\frac{1}{a^{\frac{1}{2}}}$. Wir haben aber oben gesehen, daß ein solcher Bruch $\frac{1}{a^n}$ durch a^{-n} ausgedrückt werden kann, folglich kann $\frac{1}{\sqrt{a}}$ durch $a^{-\frac{1}{2}}$ ausgedrückt werden. Eben so wird $\frac{1}{\sqrt[3]{a}}$ seyn $a^{-\frac{1}{3}}$, und $\frac{a^2}{\sqrt[4]{a^3}}$ wird verwandelt in $\frac{a^2}{a^{\frac{3}{4}}}$, woraus entspringet a^2 multiplicirt mit $a^{-\frac{3}{4}}$, welches ferner verwandelt wird in $a^{\frac{5}{4}}$, das ist $a^{1\frac{1}{4}}$, und das ist ferner $a\sqrt[3]{a}$. Dergleichen Reductionen werden durch die Uebung gar merklich erleichtert.

204.

Endlich ist noch zu merken, daß eine jede solche Wurzel auf vielerley Art kann vorgestellt werden. Denn da $\sqrt{a}$ so viel ist als $a^{\frac{1}{2}}$ und $\frac{1}{2}$ in alle diese Brüche und $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{4}{8}$, $\frac{5}{10}$, $\frac{6}{12}$, etc. verwandelt werden kann; so ist klar, daß $\sqrt{a}$ so viel ist als $\sqrt[4]{a^2}$, imgleichen auch $\sqrt[6]{a^3}$, wie auch $\sqrt[8]{a^4}$, und so fort. Eben so ist $\sqrt[3]{a}$ so viel als $a^{\frac{1}{3}}$; $a^{\frac{1}{3}}$ aber so viel als $\sqrt[6]{a^2}$, oder $\sqrt[9]{a^3}$, oder $\sqrt[12]{a^4}$. Hieraus sieht man leicht, daß die Zahl a selbst, oder a^1, durch folgende Wurzelzeichen könne ausgedruckt werden, $\sqrt[2]{a^2}$, oder $\sqrt[3]{a^3}$, oder $\sqrt[4]{a^4}$, oder $\sqrt[5]{a^5}$, u. s. f.

205.

Dieses kommt bey der Multiplication und Division wohl zu statten: als z. E. wann $\sqrt[2]{a}$ mit $\sqrt[3]{a}$ multiplicirt werden soll, so schreibe man anstatt $\sqrt[2]{a}$ die $\sqrt[6]{a^3}$, und anstatt $\sqrt[3]{a}$ die $\sqrt[6]{a^2}$. Solchergestalt hat man gleiche Wurzelzeichen, und erhält daher das Product $\sqrt[6]{a^5}$. Welches auch daher erhellet, weil $a^{\frac{1}{2}}$ mit $a^{\frac{1}{3}}$ multiplicirt giebt $a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}$. Nun aber ist $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ so viel als $\frac{5}{6}$, und also das Produkt $a^{\frac{5}{6}}$ oder $\sqrt[6]{a^5}$. Sollte $\sqrt[2]{a}$ oder $a^{\frac{1}{2}}$ durch $\sqrt[3]{a}$ oder $a^{\frac{1}{3}}$ dividirt werden, so bekömmt man $a^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}$, das ist $a^{\frac{3}{6}-\frac{2}{6}}$, also $a^{\frac{1}{6}}$, folglich $\sqrt[6]{a}$.

Capitel 20.

Von den verschiedenen Rechnungs-Arten und ihrer Verbindung überhaupt.

206.

Wir haben bisher verschiedene Rechnungs-Arten als die Addition, Subtraction, Multiplication und Division, die Erhebung zu Potestäten, und endlich die Ausziehung der Wurzeln vorgetragen.

Daher wird es nicht wenig zu besserer Erläuterung dienen, wann wir den Ursprung dieser Rechnungsarten und ihre Verbindung unter sich deutlich erklären, damit man erkennen möge, ob noch andere dergleichen Arten möglich seyen oder nicht.

Zu diesem Ende brauchen wir ein neues Zeichen, welches anstatt der bisher so häufig vorgekommenen Redensart, ist so viel als, gesetzt werden kann. Dieses Zeichen ist nun $=$ und wird ausgesprochen ist gleich. Also wann geschrieben wird $a = b$, so ist die Bedeutung, daß a eben so viel sey als b, oder daß a dem b gleich sey; also ist z. E. $3 \cdot 5 = 15$.

207.

Die erste Rechnungsart, welche sich unserm Verstande darstellt, ist ohnstreitig die Addition, durch welche zwey Zahlen zusammen addirt, oder die Summe derselben gefunden werden soll. Es seyen demnach a und b die zwey gegebenen Zahlen und ihre Summe werde durch den Buchstaben c angedeutet, so hat man $a + b = c$. Wann also die beyden Zahlen a und b bekannt sind, so lehrt die Addition, wie man daraus die Zahl c finden soll.

208.

Man behalte diese Vergleichung $a + b = c$, kehre aber jetzt die Frage um, und frage, wann die

die Zahlen a und c bekannt sind, wie man die Zahl b finden soll.

Man fragt also, was man für eine Zahl zu der Zahl a addiren müsse, damit die Zahl c herauskomme. Es sey z. E. $a = 3$ und $c = 8$, also daß $3 + b = 8$ seyn müßte, so ist klar, daß b gefunden wird, wann man 3 von 8 subtrahirt. Ueberhaupt also um b zu finden, so muß man a von c subtrahiren und da wird $b = c - a$. Denn wann a darzu addirt wird, so bekommt man $c - a + a$, das ist c.

Hierinnen besteht also der Ursprung der Subtraction.

209.

Die Subtraction entsteht also, wann die Frage, welche bey der Addition vorkommt, umgekehrt wird. Und da es sich zutragen kann, daß die Zahl, welche abgezogen werden soll, größer ist als diejenige, von der sie abgezogen werden soll: als wann z. E. 9 von 5 abgezogen werden sollte: so erhalten wir daher den Begriff von einer neuen Art Zahlen, welche negativ genennet werden, weil $5 - 9 = -4$.

210.

Wann viele Zahlen, welche zusammen addirt werden sollen, einander gleich sind, so wird ihre Summe durch die Multiplication gefunden, und heißt alsdann das Product. Also bedeutet ab das Product, welches entsteht, wann die Zahl a mit der Zahl b multiplicirt wird. Wann wir nun dieses Product mit dem Buchstaben c andeuten, so haben wir $ab = c$, und die Multiplication lehrt, wann die Zahlen a und b bekannt sind, wie man daraus die Zahl c finden solle.

211.

Laßt uns nun folgende Frage aufwerfen: Wann die Zahlen c und a bekannt sind, wie soll man daraus die Zahl b finden. Es sey z. E. $a = 3$ und $c = 15$, so daß $3b = 15$, und wird gefragt, mit was für einer Zahl man 3 multipliciren müsse, damit 15 herauskomme. Dieses geschieht nun durch die Division, und wird daher überhaupt die Zahl b gefunden, wann man c durch a dividirt; woraus folglich diese Gleichung entsteht $b = \frac{c}{a}$.

212.

Weil es sich nun oft zutragen kann, daß sich die Zahl c nicht wirklich durch die Zahl a theilen lasse, und gleichwohl der Buchstabe b einen bestimmten Werth haben muß, so werden wir auf eine neue Art von Zahlen geleitet, welche Brüche genennet werden. Also wann wir annehmen $a = 4$, und $c = 3$, also daß $4b = 3$, so sieht man wohl, daß b keine ganze Zahl seyn kann, sondern ein Bruch ist, nämlich $b = \frac{3}{4}$.

213.

Wie nun die Multiplication aus der Addition entstanden, wann viele Zahlen, die addirt werden sollen, einander gleich sind, so wollen wir jezt auch bey der Multiplication annehmen, daß viele gleiche Zahlen mit einander multiplicirt werden sollen, und dadurch gelangen wir zu den Potestäten, welche auf eine allgemeine Art durch diese Form a^b vorgestellt werden, wodurch angezeigt wird, daß die Zahl a so viele mal mit sich selbst multiplicirt werden müsse, als die Zahl b anweiset. Hier wird, wie oben gemeldet, a die Wurzel, b der Exponent und a^b die Potestät genennet.

214.

Lasset uns nun diese Potestät selbst durch den Buchstaben c andeuten, so haben wir $a^b = c$, worinn also drey Buchstaben a, b, c, vorkommen. Dieses

Dieses vorausgesezt, so wird in der Lehre von den Potestäten gezeigt, wie man, wann die Wurzel a nebst dem Exponenten b bekannt ist, daraus die Potestät selbst, das ist, den Buchstaben c bestimmen soll. Es sey z. E. $a = 5$, und $b = 3$, also daß $c = 5^3$: woraus man sieht, daß von 5 die dritte Potestät genommen werden müsse, welche ist 125; also wird $c = 125$.

Hier wird also gelehrt, wie man aus der Wurzel a und dem Exponenten b, die Potestät c finden soll.

215.

Lasset uns nun auch hier sehen, wie die Frage umgekehrt oder verändert werden kann, also daß aus zweyen von diesen dreyen Zahlen a, b, c, die dritte gefunden werden soll, welches auf zweyerley Art geschehen kann, indem nebst dem c, entweder a oder b für bekannt angenommen wird. Wobey zu merken, daß in den obigen Fällen bey der Addition und Multiplication nur eine Veränderung statt findet, weil im ersten Fall, wo $a + b = c$, es gleich viel ist, ob man nebst dem c, noch a oder b für bekannt annimmt, indem es gleich viel ist, ob ich schreibe $a + b$ oder $b + a$; und eben so verhält es sich auch mit der Gleichung

chung $ab = c$, oder $ba = c$, wo die Buchstaben a und b ebenfalls verwechselt werden können. Allein dieses findet nicht statt bey den Potestäten, indem vor a^b keineswegs gesezt werden kann b^a, welches aus einem einzigen Exempel leicht zu ersehen: wann z. E. $a = 5$ und $b = 3$ gesetzt wird, so wird $a^b = 5^3 = 125$. Hingegen wird $b^a = 3^5 = 243$, welches sehr weit von 125 verschieden ist.

216.

Hieraus ist klar, daß hier wirklich noch zwey Fragen angestellt werden können, wovon die erste ist: wann nebst der Potestät c, noch der Exponent b gegeben wird, wie man daraus die Wurzel a finden soll. Die zweyte Frage aber ist, wann nebst der Potestät c noch die Wurzel a für bekannt angenommen wird, wie man daraus den Exponenten b finden soll.

217.

Im obigen ist nur die erste von diesen zwey Fragen erörtert worden, und dieses ist geschehen in der Lehre von der Ausziehung der Wurzeln. Denn wann man z. E. $b = 2$ setzt und $a^2 = c$, so muß a eine solche Zahl seyn, deren Quadrat

dem

dem c gleich sey, und da wird $a = \sqrt[2]{c}$. Eben so, wann $b = 3$, so hat man $a^3 = c$, da muß also der Cubus von a der gegebenen Zahl c gleich seyn, und da erhält man $a = \sqrt[3]{c}$. Hieraus läßt sich auf eine allgemeine Art verstehen, wie man aus den beyden Buchstaben c und b den Buchstaben a finden müsse. Es wird nämlich seyn $a = \sqrt[b]{c}$.

218.

So oft es sich nun ereignet, daß die gegebene Zahl c nicht wirklich eine solche Potestät ist, deren Wurzel verlangt wird, so ist schon oben bemerkt worden, daß die verlangte Wurzel a weder in ganzen Zahlen noch in Brüchen könne ausgedrückt werden. Da nun dieselbe gleichwohl ihren bestimmten Werth haben muß, so sind wir dadurch zu einer neuen Art von Zahlen gelanget, welche Irrational- oder Surdische Zahlen genennt werden; von welchen es nach der Mannigfaltigkeit der Wurzeln, so gar unendlich vielerley Arten giebt. Auch hat uns diese Betrachtung noch auf eine ganz besondere Art von Zahlen geleitet, welche unmöglich sind und imaginaire oder eingebildete Zahlen genennet werden.

219.

Man sieht also, daß uns noch eine Frage zu betrachten übrig sey, nämlich wann außer der Potestät c noch die Wurzel a für bekannt angenommen wird, wie man daraus den Exponenten finden soll? Diese Frage wird auf die wichtige Lehre von den Logarithmen leiten, deren Nutzen in der ganzen Mathematik so groß ist, daß fast keine weitläufige Rechnung ohne Hülfe der Logarithmen zu Stande gebracht werden kann. Wir werden also diese Lehre in dem folgenden Capitel erklären, wo wir wieder auf ganz neue Arten von Zahlen, welche nicht einmahl zu den obigen irrationalen gerechnet werden können, werden geleitet werden.

Capitel 21.

Von den Logarithmen überhaupt.

220.

Wir betrachten also die Gleichung $a^b = c$, und bemerken zuförderst, daß in der Lehre von den Logarithmen für die Wurzel a eine gewisse Zahl nach Belieben festgestellet werde, also daß dieselbe einerley Werth behalte. Wann nun der Exponent b also angenommen wird, daß die Potestät a^b einer gegebenen Zahl c gleich werde, so wird der Exponent b der Logarithmus dieser Zahl c genennet, und um dieselben anzuzeigen, werde ich mich des Zeichens eines l bedienen, welches der Zahl c vorgesetzt wird; und also schreibt man $b = lc$, wodurch angedeutet wird, daß b gleich sey dem Logarithmus der Zahl c, oder der Logarithmus von c sey b.

221.

Nachdem also die Wurzel a einmal festgestellet worden, so ist der Logarithmus einer jeglichen Zahl c nichts anders, als der Exponent derjenigen Potestät von a, welche der Zahl c gleich ist. Da nun $c = a^b$, so ist b der Logarithmus der Potestät a^b. Setzt man nun $b = 1$, so ist 1 der Logarithmus von a^1, das ist $la = 1$; setzt man $b = 2$, so ist 2 der Logarithmus von a^2, das ist $la^2 = 2$. Eben so wird man haben: $la^3 = 3$, $la^4 = 4$, $la^5 = 5$, u. s. f.

222.

Setzt man $b = 0$, so wird 0 der Logarithmus seyn von a^0: nun aber ist $a^0 = 1$, und also ist $l1 = 0$, die Wurzel a mag angenommen werden, wie man will.

Setzt man ferner $b = -1$, so wird -1 der Logarithmus von a^{-1}. Es ist aber $a^{-1} = \frac{1}{a}$; also hat man $l\frac{1}{a} = -1$. Eben so bekommt man $l\frac{1}{a^2} = -2$, $l\frac{1}{a^3} = -3$, $l\frac{1}{a^4} = -4$, u. s. f.

223.

Hieraus erhellet, wie die Logarithmen von allen Potestäten der Wurzel a, und auch sogar von Brüchen, deren Zähler $= 1$, der Nenner aber eine Potestät von a ist, können angezeiget werden; in welchen Fällen die Logarithmen ganze Zahlen sind. Nimmt man aber für b Brüche an, so werden dieselben Logarithmen von Irrationalzahlen; wann nämlich $b = \frac{1}{2}$, so ist $\frac{1}{2}$ der Logarithmus von $a^{\frac{1}{2}}$ oder von $\sqrt{a}$. Daher bekommt man $l\sqrt{a} = \frac{1}{2}$; eben so $l\sqrt[3]{a} = \frac{1}{3}$ und $l\sqrt[4]{a} = \frac{1}{4}$, u. s. f.

224.

Wann aber der Logarithmus von einer andern Zahl c gefunden werden soll, so sieht man leicht, daß derselbe weder eine ganze Zahl, noch ein Bruch seyn kann. Inzwischen muß es doch immer einen solchen Exponenten geben, nämlich b, so daß die Potestät a^b der gegebenen Zahl c gleich

gleich werde, und alsdann hat man $b = lc$. Folglich hat man auf eine allgemeine Art $a^{lc} = c$.

225.

Laßt uns nun eine andere Zahl d betrachten, deren Logarithmus ebenfalls durch ld angedeutet wird, also daß $a^{ld} = d$. Man multiplicire nun diese Formel mit der vorhergehenden $a^{lc} = c$, so bekommt man $a^{lc+ld} = cd$: nun aber ist der Exponent allezeit der Logarithmus der Potestät; folglich ist $lc + ld = lcd$. Dividirt man aber die erstere Formel durch die letztere, so bekommt man $a^{lc-ld} = \frac{c}{d}$. Folglich wird $lc - ld = l\frac{c}{d}$.

226.

Hierdurch werden wir zu den zwey Haupt-Eigenschaften der Logarithmen geführet, wovon die erste in der Gleichung $lc + ld = lcd$ besteht, und woraus wir lernen, daß der Logarithmus von einem Product als cd gefunden werde, wann man die Logarithmen der Factoren zusammen addirt. Die zweyte Eigenschaft ist in der Gleichung $lc - ld = l\frac{c}{d}$ enthalten und zeiget an, daß der Logarithmus von einem Bruch gefunden werde, de, wann man von dem Logarithmus des Zählers den Logarithmus des Nenners subtrahirt.

227.

Und eben hierinn besteht der herrliche Nutzen, den die Logarithmen in der Rechenkunst leisten. Weil, wann zwey Zahlen mit einander multiplicirt oder dividirt werden sollen, man nur nöthig habe, die Logarithmen derselben zu addiren oder zu subtrahiren. Es ist aber offenbar, daß es ungleich viel leichter sey, Zahlen zu addiren oder subtrahiren, als zu multipliciren oder dividiren, insonderheit wann die Zahlen sehr groß sind.

228.

Noch wichtiger aber ist der Nutzen bey den Potestäten und der Ausziehung der Wurzeln. Denn wann $d = c$, so hat man aus der erstern Eigenschaft $lc + lc = lcc$, also ist $lcc = 2lc$: eben so bekommt man $lc^3 = 3lc$ und $lc^4 = 4lc$, und allgemein $lc^n = nlc$.

Nimmt man nun für n gebrochene Zahlen an, so bekommt man $lc^{\frac{1}{2}}$, das ist $l\sqrt{c} = \frac{1}{2}lc$; ferner auch für Negativ-Zahlen lc^{-1}, das ist $l\frac{1}{c} = -lc$, und lc^{-2}, das ist $l\frac{1}{cc} = -2lc$ u. s. f.

229.

Wann man also solche Tabellen hat, worinnen für alle Zahlen die Logarithmen berechnet sind, so kann man durch Hülfe derselben die schwerste Rechnungen, wo große Multiplicationen und Divisionen, imgleichen auch Erhebungen zu Potestäten und Ausziehungen der Wurzeln vorkommen, mit leichter Mühe ausführen, weil man in diesen Tafeln so wohl für jede Zahl ihre Logarithmen, als auch für einen jeden Logarithmus die Zahl selbst, finden kann. Also wann man aus einer Zahl c die Quadrat-Wurzel finden soll, so sucht man erstlich den Logarithmus der Zahl c, welcher ist lc, hernach nimmt man davon die Hälfte, welche ist $\frac{1}{2}lc$, und diese ist der Logarithmus von der gesuchten Quadratwurzel: also die Zahl, die diesem Logarithmus zukommt, und in der Tafel gefunden wird, ist die Quadratwurzel selbst.

230.

Wir haben oben gesehen, daß die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, etc. und folglich alle Positivzahlen Logarithmen sind von der Wurzel a und ihren positiven Potestäten, das ist, von Zahlen, die größer sind als eins.

Hin-

Hingegen die Negativzahlen, als -1, -2, etc. sind Logarithmen von den Brüchen $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{aa}$, etc. welche kleiner sind als Eins, gleichwohl aber noch grösser als nichts.

Hieraus folgt, daß, wann der Logarithmus positiv ist, die Zahl immer grösser sey als Eins; wenn aber der Logarithmus negativ ist, so ist die Zahl immer kleiner als Eins, doch aber grösser als 0. Folglich können für Negativzahlen keine Logarithmen angezeigt werden, oder die Logarithmen von Negativzahlen sind unmöglich und gehören zu dem Geschlecht der imaginären oder eingebildeten Zahlen.

231.

Um dieses besser zu erläutern, wird dienlich seyn, für die Wurzel a eine bestimmte Zahl anzunehmen, und zwar diejenige, nach welcher die üblichen logarithmischen Tabellen berechnet sind. Es wird aber darinn die Zahl 10 für die Wurzel a angenommen, weil nach derselben schon die ganze Rechenkunst eingerichtet ist. Man sieht aber leicht, daß dafür eine jegliche andre Zahl, die nur grösser ist als Eins, angenommen werden könnte; denn wann man $a = 1$ setzen wollte, so würden alle Potestäten davon, als $a^b = 1$, und immer Eins bleiben, und niemals einer andern gegebenen Zahl als c gleich werden können.

Capitel

Capitel 22.

Von den üblichen Logarithmischen Tabellen.

232.

In diesen Tabellen wird, wie gemeldet, zum Grunde gelegt, daß die Wurzel $a = 10$ sey; also ist der Logarithmus von einer jeglichen Zahl c derjenige Exponent, zu welchem, wann die Zahl 10 erhoben wird, die Potestät der Zahl gleich werde. Oder wenn der Logarithmus der Zahl c durch lc angedeutet wird, so hat man immer $10^{lc} = c$.

233.

Wir haben schon bemerket, daß von der Zahl 1 der Logarithmus immer 0 sey, weil $10^0 = 1$, also ist $l1 = 0$, $l10 = 1$, $l100 = 2$, $l1000\ 3$, $10000 = 4$, $l100000 = 5$, $l1000000 = 6$; ferner $l\frac{1}{10} = -1$, $l\frac{1}{100} = -2$, $l\frac{1}{1000} = -3$, $l\frac{1}{10000} = -4$, $l\frac{1}{100000} = -5$, $l\frac{1}{1000000} = -6$.

234.

Wie sich nun die Logarithmen von diesen Hauptzahlen von sich selbst ergeben, so ist um so viel schwerer, die Logarithmen aller übrigen Zahlen,

len zu finden, welche gleichwohl in den Tabellen müssen angezeiget werden. Hier ist auch noch nicht der Ort, eine hinlängliche Anweisung zu geben, wie dieselben gefunden werden sollen, dahero wollen wir nur überhaupt bemerken, was dabey zu beobachten vorkommt.

235.

Da nun $l\,1 = 0$, und $l\,10 = 1$, so ist leicht zu erachten, daß von allen Zahlen zwischen 1 und 10 ihre Logarithmen zwischen 0 und 1 enthalten seyn müssen, oder sie sind größer als 0, und doch kleiner als 1.

Laßt uns nur die Zahl 2 betrachten, so ist gewiß, daß ihr Logarithmus, den wir durch den Buchstaben x andeuten wollen, also daß $l\,2 = x$ größer sey als 0, und doch kleiner als 1. Es muß aber eine solche Zahl seyn, daß 10^x just dem 2 gleich werde.

Man kann auch leicht sehen, daß x viel kleiner seyn müsse als $\frac{1}{2}$, oder daß $10^{\frac{1}{2}}$ größer sey als 2, denn wann man beyderseits die Quadrate nimmt, so wird das Quadrat von $10^{\frac{1}{2}} = 10^1$: das Quadrat von 2 aber wird 4, also viel kleiner. Eben so ist auch $\frac{1}{3}$ für x noch zu groß, oder $10^{\frac{1}{3}}$ ist größer als 2. Denn der Cubus von $10^{\frac{1}{3}} = 10$, der Cubus von 2 aber ist nur 8. Hingegen ist $\frac{1}{4}$ für x angenommen zu klein: denn $10^{\frac{1}{4}}$ ist kleiner als 2, weil die vierte Potestät von jenem 10 ist, von diesem aber 16. Hieraus sieht man also, daß x oder $l\,2$ kleiner ist als $\frac{1}{3}$, und doch größer als $\frac{1}{4}$; man kann auch für einen jeden andern Bruch, der zwischen $\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{4}$ ist, finden, ob derselbe zu groß oder zu klein sey. Als $\frac{2}{7}$ ist kleiner als $\frac{1}{3}$, und größer als $\frac{1}{4}$; wollte man nun $\frac{2}{7}$ für x nehmen, so müßte $10^{\frac{2}{7}} = 2$ seyn: wann aber dieses wäre, so müßten auch die siebente Potestäten einander gleich seyn. Es ist aber von $10^{\frac{2}{7}}$ die siebente Potestät $= 10^2 = 100$, welche der siebenten Potestät von 2 gleich seyn müßte; da nun die siebente Potestät von $2 = 128$ und also größer, als jene, so ist auch $10^{\frac{2}{7}}$ kleiner als 2, und also $\frac{2}{7}$ kleiner als $l\,2$, oder $l\,2$ ist größer als $\frac{2}{7}$, und doch kleiner als $\frac{1}{3}$.

Ein solcher Bruch ist $\frac{3}{10}$; sollte nun $10^{\frac{3}{10}} = 2$ seyn, so müßten auch die zehnte Potestäten einander gleich seyn: Es ist aber von $10^{\frac{3}{10}}$ die zehnte Potestät $= 10^3 = 1000$, von 2 aber ist die zehnte Pote-

Potestät = 1024; woraus wir schließen, daß $\frac{3}{10}$ noch zu klein ist, oder daß $l\,2$ größer sey als $\frac{3}{10}$ und doch kleiner als $\frac{1}{3}$.

236.

Diese Betrachtung dienet, um zu zeigen, daß $l\,2$ keine bestimmte Größe habe, weil wir wissen, daß derselbe gewiß größer ist als $\frac{3}{10}$, und doch kleiner als $\frac{1}{3}$. Weiter können wir hier noch nicht gehen, und weil wir den wahren Werth noch nicht wissen, so wollen wir für denselben den Buchstaben x gebrauchen, also daß $l\,2 = x$, und zeigen, wann derselbe gefunden wäre, wie man daraus von unzählig viel andern Zahlen die Logarithmen finden könne; worzu die oben gegebene Gleichung dienet, $l\,cd = l\,c + l\,d$, oder daß der Logarithmus von einem Product gefunden werde, wann man die Logarithmen der Factoren zusammen addirt.

237.

Da nun $l\,2 = x$, und $l\,10 = 1$, so bekommen wir $l\,20 = x + 1$, und $l\,200 = x + 2$, ferner $l\,2000 = x + 3$, weiter $l\,20000 = x + 4$ und $l\,200000 = x + 5$, u. s. f.

238.

Da ferner $lc^2 = 2lc$ und $lc^3 = 3lc$, $lc^4 = 4lc$ etc. so erhalten wir daher $l4 = 2x$, $l8 = 3x$, $l16 = 4x$, $l32 = 5x$, $l64 = 6x$, etc.

Hieraus finden wir ferner $l\,40 = 2x + 1$, $l\,400 = 2x + 2$, $l\,4000 = 2x + 3$, $l\,40000 = 2x + 4$ etc.

$l80 = 3x + 1$, $l800 = 3x + 2$, $l8000 = 3x + 3$, $l80000 = 3x + 4$ etc.

$l160 = 4x + 1$, $l1600 = 4x + 2$, $l\,16000 = 4x + 3$, $l160000 = 4x + 4$ etc.

239.

Da ferner gefunden worden $l\,\frac{c}{d} = l\,c - l\,d$, so setze man $c = 10$, und $d = 2$, und weil $l\,10 = 1$ und $l\,2 = x$, so bekommen wir $l\,\frac{10}{2}$, das ist $l\,5 = 1 - x$, daher erhalten wir

$l50 = 2 - x$, $l500 = 3 - x$, $l5000 = 4 - x$ etc.

ferner

$l25 = 2 - 2x$, $l125 = 3 - 3x$, $l625 = 4 - 4x$ etc.

Daher gelangen wir weiter zu folgenden:

$l250 = 3 - 2x$, $l2500 = 4 - 2x$, $l25000 = 5 - 2x$ etc.

ferner

$l1250 = 4 - 3x$, $l12500 = 5 - 3x$, $l125000 = 6 - 3x$, u. s. f.

ferner

$l6250 = 5 - 4x$, $l62500 = 6 - 4x$, $l625000 = 7 - 4x$ u. s. f.

240.

Hätte man auch den Logarithmus von 3 gefunden, so könnte man daher noch von unendlich mehrern Zahlen die Logarithmen bestimmen. Wir wollen den Buchstaben y für $l3$ setzen, und daher würden wir haben:

$l30 = y + 1$, $l300 = y + 2$, $l3000 = y + 3$, etc.
$l9 = 2y$, $l27 = 3y$, $l81 = 4y$, $l243 = 5y$, etc.
daher kann man noch weiter finden:
$l6 = x + y$, $l12 = 2x + y$, $l18 = x + 2y$, imgleichen auch $l15 = l3 + l5 = y + 1 - x$.

241.

Wir haben oben gesehen, daß alle Zahlen aus den sogenannten Primzahlen durch die Multiplication hervorgebracht werden. Also wann nun die Logarithmen der Primzahlen bekannt wären, so könnte man daraus die Logarithmen aller andern Zahlen blos durch die Addition finden; als z. E. von der Zahl 210, welche aus folgenden Factoren besteht, $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$, wird seyn der Logarithmus $= l2 + l3 + l5 + l7$: gleichergestalt da $360 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$, so wird $l360 = 3l2 + 2l3 + l5$, woraus erhellet, wie man aus den Logarithmen der Primzahlen die Logarithmen von allen andern Zahlen bestimmen kann. Also bey Verfertigung der Logarithmischen Tabellen hat man nur dafür zu sorgen, daß die Logarithmen von allen Primzahlen gefunden werden.

Capitel 23.

Von der Art, die Logarithmen vorzustellen.

242.

Wir haben gesehen, daß der Logarithmus von 2 größer ist als $\frac{3}{10}$ und kleiner als $\frac{1}{3}$; oder daß der Exponent von 10 zwischen diesen zwey Brüchen fallen müsse, wann die Potestät dem 2 gleich werden soll: man mag aber einen Bruch annehmen was man immer für einen will, so wird die Potestät immer eine Irrationalzahl, und entweder größer oder kleiner als 2 seyn, dahero sich der Logarithmus von 2 durch keinen solchen Bruch ausdrücken läßt. Man muß sich deswegen begnügen, den Werth desselben durch Annäherungen so genau zu bestimmen, daß der Fehler unmerklich werde. Hierzu bedient man sich der sogenannten Decimal-

Decimal-Brüche, deren Natur und Beschaffenheit deutlicher erklärt zu werden verdient.

243.

Man weiß, daß in der gewöhnlichen Art, alle Zahlen mit den zehen Ziffern

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

zu schreiben, dieselben nur auf der ersten Stelle zur rechten Hand ihre natürliche Bedeutung haben, und daß auf der zweyten Stelle ihre Bedeutung 10 mal größer werde, auf der dritten aber 100 mal, auf der vierten 1000 mal, und so fort auf einer jeden folgenden Stelle 10 mal größer als auf der vorhergehenden.

Also in dieser Zahl 1765 steht auf der ersten Stelle zur rechten die Ziffer 5, die auch wirklich 5 bedeutet, auf der zweyten Stelle steht 6, welche aber nicht 6, sondern 10 . 6 oder 60 anzeigt: die Ziffer 7 auf der dritten Stelle bedeutet 100 . 7 oder 700, und endlich das 1 auf der vierten Stelle bedeutet 1000, und so wird auch diese Zahl ausgesprochen, indem man sagt:

Ein Tausend, Sieben Hundert, Sechszig, und Fünf.

244.

Wie nun von der rechten zur linken die Bedeutung der Ziffern immer 10 mal größer und folglich von der linken zur rechten immer 10 mal kleiner wird, so kann man nach diesem Gesetz noch weiter gehen und gegen die rechte Hand fortrücken, da dann die Bedeutung der Ziffern immer fort 10 mal kleiner wird. Hier muß man aber die Stelle wohl bemerken, wo die Ziffern ihren natürlichen Werth haben, dieses geschieht durch ein Comma, so hinter diese Stelle gesetzt wird. Wann man dahero diese Zahl geschrieben findet, als 36,54892, so ist dieselbe also zu verstehen: erstlich hat die Ziffer 6 ihre natürliche Bedeutung, und die Ziffer 3 auf der zweyten Stelle von der linken 30. Aber nach dem Comma bedeutet die Ziffer 5 nur $\frac{5}{10}$, die folgende 4 sind $\frac{4}{100}$, die Ziffer 8 bedeutet $\frac{8}{1000}$, die Ziffer 9, $\frac{9}{10000}$ und die Ziffer 2, $\frac{2}{100000}$; woraus man sieht, daß, je weiter diese Ziffern nach der rechten Hand fortgesetzt werden, ihre Bedeutungen immer kleiner und endlich so klein werden, daß sie nichts zu achten sind.

245.

Diese Art die Zahlen auszudrücken, heißt nun ein Decimalbruch, und auf diese Art werden auch die Logarithmen in den Tabellen dargestellt. Daselbst wird z. E. der Logarithmus von 2 also ausgedrückt 0,3010300; wobey folglich zu merken, daß weil vor dem Comma 0 steht, dieser Logarithmus auch kein Ganzes betrage, und daß sein Werth sey $\frac{3}{10}+\frac{0}{100}+\frac{1}{1000}+\frac{0}{10000}+\frac{3}{100000}+\frac{0}{1000000}+\frac{0}{10000000}$. Man hätte also wohl die zwey hintersten 0 weglassen können, allein dieselben dienen, um zu zeigen, daß von diesen Theilchen wirklich keine vorhanden sind. Man läugnet aber nicht, daß nicht weiter noch kleinere Theilchen folgen sollten, welche man aber wegen ihrer Kleinheit für nichts achtet.

246.

Den Logarithmus von 3 findet man also ausgedrückt 0,4771213, woraus man sieht, daß derselbe kein Ganzes betrage, sondern daß er aus diesen Brüchen bestehe:

$\frac{4}{10}+\frac{7}{100}+\frac{7}{1000}+\frac{1}{10000}+\frac{2}{100000}+\frac{1}{1000000}+\frac{3}{10000000}$. Man muß aber nicht glauben, daß dieser Logarithmus solchergestalt ganz genau ausgedrückt sey. Doch aber weiß man so viel, daß der Fehler gewiß kleiner ist als $\frac{1}{10000000}$, welcher auch wirklich so klein ist, daß man ihn in den meisten Rechnungen aus der Acht lassen kann.

247.

Nach dieser Art heißt der Logarithmus von 1 also 0,0000000, weil derselbe wirklich 0 ist; von 10 aber heißt

heißt der Logarithmus 1,0000000, woraus man erkennt, daß derselbe just 1 sey. Von 100 aber ist der Logarithmus 2,0000000, oder just 2, woraus zu sehen, daß von den Zahlen zwischen 10 und 100, oder welche mit zwey Ziffern geschrieben werden, die Logarithmen zwischen 1 und 2 enthalten seyn müssen, und folglich durch 1 und einen Decimalbruch ausgedrückt werden. Also ist $l50 = 1,6989700$, derselbe ist also 1 und noch über dies $\frac{6}{10}+\frac{9}{100}+\frac{8}{1000}+\frac{9}{10000}+\frac{7}{100000}$. Von den Zahlen aber über hundert bis tausend enthalten die Logarithmen 2 nebst einem gesetzten Decimalbruch; als $l800 = 2,9030900$. Von 1000 bis 10000 sind die Logarithmen größer als 3. Von 10000 bis 100000 größer als 4, und so fort.

248.

Von den Zahlen unter 10 aber, welche nur mit einer Ziffer geschrieben werden, ist der Logarithmus noch kein Ganzes, und deswegen steht vor dem Comma eine 0. Bey einem jeden Logarithmus sind also zwey Theile zu bemerken. Der erste steht vor dem Comma und zeigt die Ganzen an, wann dergleichen vorhanden; der andre Theil aber zeigt die Decimalbrüche an, die zu dem Ganzen noch gesezt werden müssen. Also ist es leicht, den ersten oder ganzen Theil des Logarithmus einer jeglichen Zahl

 anzu-

anzugeben, weil derselbe 0 ist für alle Zahlen, die nur aus einer Ziffer bestehen. Für die Zahlen, die aus 2 Ziffern bestehen, ist derselbe 1. Derselbe ist ferner 2 für diejenige, so aus 3 Ziffern bestehen, und so fort ist derselbe immer um eins kleiner als die Anzahl der Ziffern. Wann man also den Logarithmus von 1766 verlangt, so weiß man schon, daß der erstere oder ganze Theil davon 3 seyn muß.

249.

Umgekehrt also, so bald man den ersten Theil eines Logarithmus ansieht, so weis man, aus wie viel Figuren die Zahl selbst bestehen werde, weil die Anzahl der Figuren immer um eins größer ist als der ganze Theil des Logarithmus. Wann man also für eine unbekannte Zahl diesen Logarithmus gefunden hätte 6,4771213, so wüßte man sogleich, daß dieselbe Zahl aus 7 Figuren bestehe, und also größer seyn müsse als 1000000. Diese Zahl ist auch wirklich 3000000: denn $l\,3000000 = l\,3 + l\,1000000$. Nun aber ist $l\,3 = 0,4771213$ und $l\,1000000 = 6$, welche zwey Logarithmen zusammen addirt geben 6,4771213.

250.

Bey einem jeglichen Logarithmus kommt also die Hauptsache auf den nach dem Comma folgenden Decimalbruch an, welcher, wann er einmal bekannt ist, für viele Zahlen dienen kann. Um dieses zu zeigen, wollen wir den Logarithmus der Zahl 365 betrachten, dessen erster Theil ohnstreitig 2 ist, für den andern Theil aber, nämlich den Decimalbruch, wollen wir, der Kürze halber, den Buchstaben x schreiben, also daß $l\,365 = 2 + x$; hieraus erhalten wir, wann wir immerfort mit 10 multipliciren, $l\,3650 = 3 + x$: $l\,36500 = 4 + x$; $l\,365000 = 5 + x$. Wir können auch zurück gehen und immer durch 10 dividiren, so bekommen wir $l\,36,5 = 1 + x$; $l\,3,65 = 0 + x$; $l\,0,365 = -1 + x$; $l\,0,0365 = -2 + x$; $l\,0,00365 = -3 + x$ u. s. f.

251.

Für alle diese Zahlen nun, welche aus den Ziffern 365 entstehen, sie mögen 0 hinter oder vor sich haben, bleibt einerley Decimalbruch in ihren Logarithmen und der Unterschied befindet sich nur in der ganzen Zahl vor dem Comma, welche, wie wir gesehen, auch negativ werden kann, wann nämlich die Zahl kleiner als 1 wird. Weil nun die gemeinen Rechner nicht wohl mit den Negativzahlen umgehen können, so wird in diesen Fällen die ganze Zahl der Logarithmen um 10 vermehrt, und

und anstatt 0 vor dem Comma, pflegt man schon 10 zu schreiben, da man dann, anstatt − 1, bekommt 9; anstatt − 2 bekommt man 8; anstatt − 3 bekommt man 7, u. s. f. Hier muß aber gar nicht aus der Acht gelassen werden, daß die ganzen Zahlen vor dem Comma um 10 zu groß angenommen worden, damit man nicht schließe, die Zahl bestehe aus 10, oder 9, oder 8 Figuren, sondern daß die Zahl erst nach dem Comma entweder auf der ersten Stelle, wann 9 vorhanden, oder auf der zweyten Stelle, wann 8 vorhanden, oder gar erst auf der dritten, wann 7 vom Anfang des Logarithmus steht, zu schreiben angefangen werden muß. Auf solche Art findet man die Logarithmen der Sinus in den Tabellen vorgestellt.

252.

In den gewöhnlichen Tabellen bestehen die Decimalbrüche für die Logarithmen in sieben Figuren, wovon also die letzte $\frac{1}{10000000}$ Theile andeutet, und man kann sicher seyn, daß dieselben um kein einziges solches Theilchen von der Wahrheit abweichen, welcher Fehler gemeiniglich nichts zu bedeuten hat. Wollte man aber noch genauer rechnen, so müßten die Logarithmen noch auf mehr als sieben Figuren vorgestellet werden, welches in den

den großen Vlacquischen Tabellen geschieht, allwo die Logarithmen auf zehen Figuren berechnet sind.

253.

Weil der erste Theil eines Logarithmus keine Schwierigkeit hat, so wird derselbe in den Tabellen nicht gesetzt, sondern man findet daselbst nur die sieben Figuren des Decimalbruchs, welche den zweyten Theil ausmachen. In den Englischen Tabellen findet man dieselben für alle Zahlen bis auf 100000 ausgedrückt, und wann größere Zahlen noch vorkommen, so sind kleine Täfelchen beygefügt, woraus man ersehen kann, wie viel wegen der folgenden Figuren noch zu den Logarithmen addirt werden müsse.

254.

Hieraus ist also leicht zu verstehen, wie man aus einem gefundenen Logarithmus hinwiederum die ihm zukommende Zahl aus den Tabellen nehmen soll. Um die Sache besser zu erläutern, so wollen wir z. E. diese Zahlen 343 und 2401 mit einander multipliciren. Da nun die Logarithmen davon addirt werden müssen, so kommt die Rechnung also zu stehen:

l 343

$$
\begin{array}{rcll}
l\,343 & = & 2,5352941 & \multirow{2}{*}{\Big\}\ \text{addirt}} \\
l\,2401 & = & 3,3803923 & \\
\hline
 & & 5,9156862 & \multirow{2}{*}{\Big\}\ \text{subtrahirt}} \\
 & & ,6847 & \\
\hline
\text{giebt also} & & 823543,16. &
\end{array}
$$

Diese Summe ist nun der Logarithmus des gesuchten Products, und aus desselben ersten Theil 5 erkennen wir, daß das Product aus 6 Figuren bestehe, welche aus dem Decimalbruche vermittelst der Tabelle gefunden worden 823543, und dieses ist wirklich das gesuchte Product.

255.

Da bey Ausziehung der Wurzeln die Logarithmen besonders einen wichtigen Vortheil leisten, so wollen wir auch dieses mit einem Exempel erläutern. Es soll aus der Zahl 10 die Quadratwurzel gefunden werden. Da hat man also nur nöthig, den Logarithmus von 10, welcher ist 1,0000000, durch 2 zu dividiren, so wird der Quotus 0,5000000, der Logarithmus der gesuchten Wurzel seyn. Dahero die Wurzel selbst aus den Tabellen gefunden wird 3,16228, wovon auch wirklich das Quadrat nur um $\frac{1}{100000}$ Theilchen größer ist als 10.

Ende des ersten Abschnitts.

Des

Des

Ersten Theils

Zweyter Abschnitt.

Von den verschiedenen Rechnungs-Arten mit zusammengesetzten Größen.

Capitel 1.

Von der Addition mit zusammengesetzten Größen.

256.

Wann zwey oder mehr Formeln, welche aus vielen Gliedern bestehen, zusammen addirt werden sollen, so pflegt die Addition zuweilen nur durch gewisse Zeichen angedeutet zu werden, indem man eine jede Formel in Klammern einschließt und dieselben mit dem Zeichen $+$ verbindet. Also wann diese Formel $a + b + c$ und $d + e + f$ zusammen addirt werden sollen, so wird die Summe also angezeigt:

$$(a + b + c) + (d + e + f).$$

257.

Solchergestalt wird die Addition nur angedeutet, nicht aber vollzogen. Es ist aber leicht einzu-

einzusehen, daß, um dieselbe zu vollziehen, man nur nöthig habe die Klammern wegzulassen: denn da die Zahl $d + e + f$ zur ersten addirt werden soll, so geschieht solches, wenn man erstlich $+ d$, hernach $+ e$ und endlich $+ f$ hinzuschreibt, da dann die Summe seyn wird:

$$a + b + c + d + e + f.$$

Eben dieses würde auch zu beobachten seyn, wann einige Glieder das Zeichen — hätten, als welche sodann gleichfalls mit ihren Zeichen hinzugeschrieben werden müßten.

258.

Um dieses deutlicher zu machen, wollen wir ein Exempel in puren Zahlen betrachten, und zu der Formel $12 - 8$ noch diese $15 - 6$ addiren.

Man addire also erstlich 15, so hat man $12 - 8 + 15$: man hat aber zu viel addirt, weil man nur $15 - 6$ addiren sollte, und es ist klar, daß man 6 zu viel addirt habe: man nehme also diese 6 wieder weg, oder schreibe sie mit ihrem Zeichen dazu, so hat man die wahre Summa:

$$12 - 8 + 15 - 6.$$

Woraus

Woraus erhellet, daß die Summe gefunden wird, wann man alle Glieder, ein jedes mit seinem Zeichen, zusammenschreibt.

159.

Wann demnach zu dieser Formel $a - b + c$ noch diese $d - e - f$ addirt werden soll, so wird die Summe folgendergestalt ausgedrückt:

$$a - b + c + d - e - f.$$

Wobey wohl zu bemerken, daß es hier gar nicht auf die Ordnung der Glieder ankomme, sondern dieselben nach Belieben unter einander versetzt werden können, wann nur ein jedes sein ihm vorgesetztes Zeichen behält. Also könnte die obige Summa auch also geschrieben werden:

$$c - e + a - f + d - b.$$

260.

Folglich hat die Addition nicht die geringste Schwierigkeit, wie auch immer die Glieder aussehen mögen. Also wann zu dieser Formel

$$2a^3 + 6\sqrt{b} - 4lc$$

noch diese $5\sqrt[5]{a} - 7c$ addirt werden sollte, so würde die Summe seyn:

$$2a^3 + 6\sqrt{b} - 4lc + 5\sqrt[5]{a} - 7c:$$

woraus

woraus erhellet, daß dieses die Summa sey, und es auch erlaubt ist, diese Glieder nach Belieben unter einander zu versetzen, wann nur ein jedes sein Zeichen behält.

261.

Oefters trägt es sich aber zu, daß die solchergestalt gefundene Summe weit kürzer zusammen gezogen werden kann, indem zuweilen zwey oder mehr Glieder sich gänzlich aufheben. Als wann in der Summa diese Glieder $+ a - a$, oder solche $3a - 4a + a$ vorkäme. Auch können bisweilen zwey oder mehrere Glieder in eines gebracht werden, wie z. E.

$3a + 2a = 5a$, $7b - 3b = + 4b$, $- 6c + 10c = + 4c$, $5a - 8a = - 3a$, $- 7b + b = - 6b$, $- 3c - 4c = - 7c$, $2a - 5a + a = - 2a$, $- 3b - 5b + 2b = - 6b$.

Diese Abkürzung findet also statt, so oft zwey oder mehr Glieder in Ansehung der Buchstaben völlig einerley sind. Hingegen $2aa + 3a$ läßt sich nicht zusammenziehen, und $2b^3 - b^4$ läßt sich auch nicht abkürzen.

262.

Wir wollen also einige Exempel von dieser Art betrachten. Erstlich sollen diese zwey Formeln addirt werden $a + b$ und $a - b$, da dann nach obiger Regel herauskommt $a + b + a - b$, nun aber ist $a + a = 2a$ und $b - b = 0$, folglich ist die Summa $= 2a$. Welches Exempel folgende sehr nützliche Wahrheit anzeiget:

Wann zu der Summe zweyer Zahlen $(a + b)$ ihre Differenz $(a - b)$ addirt wird, so kommt die größere Zahl doppelt heraus.

Man betrachte noch folgendes Exempel:

$$\begin{array}{l|l} 3a - 2b - c & a^3 - 2aab + 2abb \\ 5b - 6c + a & - aab + 2abb \quad b^3 \\ \hline 4a + 3b - 7c & a^3 - 3aab + 4abb - b^3. \end{array}$$

Capitel 2.

Von der Subtraction mit zusammengesetzten Größen.

263.

Wann man die Subtraction nur andeuten will, so schließt man eine jede Formel in Klammern ein, und diejenige, welche abgezogen werden soll, wird mit Vorsetzung des Zeichen — an diejenige angehängt, von welcher sie abgezogen werden soll. Also wann von dieser Formel $a - b + c$ diese $d - e + f$ abgezogen werden soll, so wird der gesuchte Rest also angedeutet:

$$(a - b + c) - (d - e + f),$$

als woraus deutlich zu ersehen, daß die letztere Formel von der erstern abgezogen werden soll.

264.

Um aber die Subtraction wirklich zu vollziehen, so ist vor das erste zu merken, daß, wenn von einer Größe, als a, eine andere positive Größe, als $+ b$, abgezogen werden soll, so wird man bekommen $a - b$.

Wann

Wann aber eine negative Zahl als $- b$ von a abgezogen werden soll, so wird man bekommen $a + b$, weil eine Schuld wegnehmen eben so viel ist, als etwas schenken.

265.

Laßt uns nun setzen, man soll von dieser Formel $a - c$ diese $b - d$ subtrahiren, so nehme man erstlich b weg, da bekommt man $a - c - b$; wir haben aber zu viel weggenommen, denn wir sollten nur $b - d$ wegnehmen, und das um d zu viel: wir müssen also dieses d wieder hinzusetzen, da wir dann erhalten

$$a - c - b + d,$$

woraus sich diese Regel offenbar ergiebt, daß die Glieder derjenigen Formel, welche subtrahirt werden sollen, mit verkehrten Zeichen hinzugeschrieben werden müssen.

266.

Durch Hülfe dieser Regel ist es also ganz leicht, die Subtraction zu verrichten, indem die Formel, von welcher subtrahirt werden soll, ordentlich hingeschrieben, diejenige Formel aber, welche subtrahirt werden soll, mit verkehrten oder verwechselten Zeichen angehängt wird. Also im ersten Exempel, da von $a - b + c$ diese Formel,

 d —

$d - e + f$ abgezogen werden soll, so bekommt man: $a - b + c - d + e - f$.

Um dieses mit puren Zahlen zu erläutern, so subtrahire man von $9 - 3 + 2$, diese Formel $6 - 2 + 4$, da bekommt man

$$9 - 3 + 2 - 6 + 2 - 4 = 0,$$

welches auch sogleich in die Augen fällt; dann $9 - 3 + 2 = 8$, $6 - 2 + 4 = 8$, und $8 - 8 = 0$.

267.

Da nun die Subtraction selbst weiter keine Schwierigkeit hat, so ist nur noch übrig zu bemerken, daß, wann in dem gefundenen Rest zwey oder mehr Glieder vorkommen, welche in Ansehung der Buchstaben einerley sind, die Abkürzung nach eben denselben Regeln vorgenommen werden könne, welche oben bey der Addition gegeben worden.

268.

Es soll von $a + b$, wodurch die Summa zweyer Zahlen angedeutet wird, ihre Differenz $a - b$ subtrahirt werden, so bekommt man erstlich $a + b - a + b$; nun aber ist $a - a = 0$ und $b + b = 2b$, folglich ist der gesuchte Rest $2b$, das ist die kleinere Zahl doppelt genommen.

269.

299.

Zu mehrerer Erläuterung wollen wir noch einige Exempel beyfügen:

$$\begin{array}{c|c}
aa + ab + bb & 3a - 4b + 5c \\
bb - ab + aa & 2b + 4c - 6a \\
\hline
2ab & 9a - 6b + c
\end{array}$$

$$\begin{array}{c}
a^3 + 3aab + 3abb + b^3 \\
a^3 - 3aab + 3abb - b^3 \\
\hline
6aab + 2b^3
\end{array}$$

$$\begin{array}{c}
\sqrt{a} + 2\sqrt{b} \\
\sqrt{a} + 3\sqrt{b} \\
\hline
-\sqrt{b}
\end{array}$$

Capitel 3.

Von der Multiplication mit zusammengesetzten Größen.

270.

Wann eine solche Multiplication nur soll angezeigt werden, so wird eine jede von den Formeln, welche mit einander multiplicirt werden sollen, in Klammern eingeschlossen, und entweder ohne Zeichen oder mit einem dazwischen gesezten Punkt an einander gehängt.

Also wann diese beyde Formeln $a - b + c$ und $d - e + f$ mit einander multiplicirt werden sollen, so wird das Product solchergestalt angezeigt:

$$(a - b + c) \cdot (d - e + f)$$

oder $$(a - b + c)\ (d - e + f).$$

Diese Art wird sehr haufig gebraucht, weil man daraus sogleich sieht, aus was für Factoren ein solches Product zusammengesetzt ist.

271.

Um aber zu zeigen, wie eine solche Multiplication wirklich angestellt werden müsse, so ist erstlich zu merken, daß, wann eine solche Formel $a - b$

$a - b + c$ z. E. mit 2 multiplicirt werden soll, ein jedes Glied derselben besonders mit 2 multiplicirt werden müsse, und also herauskomme:

$$2a - 2b + 2c.$$

Eben dieses gilt auch von allen andern Zahlen. Wann also dieselbe Formel mit d multiplicirt werden soll, so bekommt man

$$ad - bd + cd.$$

272.

Hier haben wir vorausgesetzt, daß die Zahl d positiv sey; wann aber mit einer Negativ-Zahl als $-e$ multiplicirt werden soll, so ist die oben gegebene Regel zu beobachten, daß nämlich zwey ungleiche Zeichen multiplicirt $-$, zwey gleiche aber $+$ geben. Dahero bekommt man

$$-ae + be - ce.$$

273.

Um nun zu zeigen, wie eine Formel, sie mag einfach oder zusammengesetzt seyn, als A, durch eine zusammengesetzte, als $d - e$, multiplicirt werden soll, so wollen wir erstlich pure Zahlen betrachten, und annehmen, daß A mit $7 - 3$ multiplicirt werden soll. Hier ist nun klar, daß man das

das vierfache von A verlange: nimmt man nun erstlich das siebenfache, so muß man hernach das dreifache davon subtrahiren. Also auch überhaupt, wann man mit $d - e$ multiplicirt, so multiplicirt man die Formel A erstlich mit d und hernach mit e, und subtrahirt das letztere Product von dem ersteren, also daß herauskommt $dA - eA$. Laßt uns nun setzen $A = a - b$, welches mit $d - c$ multiplicirt werden soll, so erhalten wir:

$$\begin{array}{rl} dA = & ad - bd \\ eA = & ae - be \\ \hline & ad - bd - ae + be, \end{array}$$

welches das verlangte Product ist.

274.

Da wir nun das Product $(a - b).(d - e)$ gefunden haben, und von der Richtigkeit desselben überzeugt sind, so wollen wir dieses Multiplications-Exempel folgender Gestalt deutlicher vor Augen stellen:

$$\begin{array}{c} a - b \\ d - e \\ \hline ad - bd - ae + be, \end{array}$$

woraus

woraus wir sehen, daß ein jedes Glied der obern Formel mit einem jeglichen der untern multiplicirt werden müsse, und daß wegen der Zeichen die oben gegebene Regel gänzlich statt habe, und hierdurch von neuem bestätiget werde, wann etwa jemand noch irgend einen Zweifel darüber gehabt hätte.

275.

Nach dieser Regel wird es also leicht seyn, folgendes Exempel auszurechnen; $a + b$ soll multiplicirt werden mit $a - b$:

$$\begin{array}{rrr} a + b & & \\ a - b & & \\ \hline aa + ab & & \\ - ab & - bb & \\ \hline \end{array}$$

das Product wird seyn $aa - bb$

276.

Wann also für a und b nach Belieben bestimmte Zahlen gesetzt werden, so leitet uns dieses Exempel auf folgende Wahrheit: Wann die Summe zweyer Zahlen mit ihrer Differenz multiplicirt wird, so ist das Product die Differenz ihrer Quadraten, welches also kann vorgestellet werden:

$(a + b)$

$(a+b)(a-b) = aa - bb$: folglich ist hinwiederum die Differenz zwischen zwey Quadratzahlen immer ein Product, oder sie läßt sich theilen, sowohl durch die Summe als durch die Differenz der Wurzel, und ist also keine Primzahl.

277.

Laßt uns noch ferner folgende Exempel ausrechnen.

I.)
$$\begin{array}{l} 2a - 3 \\ a + 2 \\ \hline 2aa - 3a \\ \quad + 4a - 6 \\ \hline 2aa + a - 6 \end{array}$$

II.)
$$\begin{array}{l} 4aa - 6a + 9 \\ 2a + 3 \\ \hline 8a^3 - 12aa + 18a \\ \quad + 12aa - 18a + 27 \\ \hline 8a^3 + 27 \end{array}$$

III.)
$$\begin{array}{l} 3aa - 2ab - bb \\ 2a - 4b \\ \hline 6a^3 - 4aab - 2abb \\ \quad - 12aab + 8abb + 4b^3 \\ \hline 6a^3 - 16aab + 6abb + 4b^3 \end{array}$$

IV.)
$$\begin{array}{l} aa + 2ab + 2bb \\ aa - 2ab + 2bb \\ \hline a^4 + 2a^3b + 2aabb \\ \quad - 2a^3b - 4aabb - 4ab^3 \\ \qquad + 2aabb + 4ab^3 + 4b^4 \\ \hline a^4 + 4b^4. \end{array}$$

V.)
$$\begin{array}{l} 2aa - 3ab - 4bb \\ 3aa - 2ab + bb \\ \hline 6a^4 - 9a^3b - 12aabb \\ \quad - 4a^3b + 6aabb + 8ab^3 \\ \qquad + 2aabb - 3ab^3 - 4b^4. \\ \hline 6a^4 - 13a^3b - 4aabb + 5ab^3 - 4b^4. \end{array}$$

VI.)
$$\begin{array}{l} aa + bb + cc - ab - ac - bc \\ a + b + c \\ \hline a^3 + abb + acc - aab - aac - abc \\ \quad - abb - acc + aab + aac - abc \quad b^3 + bcc - bbc \\ \qquad - abc \quad - bcc + bbc + c^3. \\ \hline a^3 - 3abc + b^3 + c^3. \end{array}$$

278.

Wann mehr als zwey Formeln mit einander multiplicirt werden sollen, so begreift man leicht, daß, nachdem man zwey davon mit einander multiplicirt, das Product nach und nach auch durch die übrigen multiplicirt werden müsse, und daß es gleich viel sey, was man für eine Ordnung darin beobachtet. Es soll z. E. folgendes Product, so aus vier Factoren besteht, gefunden werden:

$$\overset{\text{I.}}{(a+b)}\ \overset{\text{II.}}{(aa+ab+bb)}\ \overset{\text{III.}}{(a-b)}\ \overset{\text{IV.}}{(aa-ab+bb)},$$

so multiplicirt man erstlich den I. und II. Factor:

$$\begin{array}{rl}
\text{II.} & aa + ab + bb \\
\text{I.} & a + b \\
\hline
 & a^3 + aab + abb \\
 & \quad + aab + abb + a^3 \\
\hline
\text{I. II.} & a^3 + 2aab + 2abb + b^3.
\end{array}$$

Hernach multiplicirt man den III. und IV. Factor:

$$\begin{array}{rl}
\text{IV.} & aa - ab + bb \\
\text{III.} & a - b \\
\hline
 & a^3 - abb + abb \\
 & \quad - aab + abb - c^3 \\
\hline
\text{III. IV.} & a^3 - 2aab + 2abb - b^3
\end{array}$$

Nun ist also noch übrig, jenes Product I. II. mit diesem III. IV. zu multipliciren,

$$\begin{array}{rl}
\text{I. II} & = a^3 + 2aab + 2abb + b^3 \\
\text{III. IV.} & = a^3 - 2aab + 2abb - b^3 \\
\hline
 & a^6 + 2a^5b + 2a^4bb + a^3 \\
 & \quad - 2a^5b - 4a^4bb - 4a^3b^3 + 2aab^4 \\
 & \quad\quad + 2a^4bb + 4a^3b^3 \;\; aab^4 \;\; 2ab^5 \\
 & \quad\quad\quad - a^3b^3 - 2aab^4 - 2ab^5 - b^6 \\
\hline
 & a^6 - b^6
\end{array}$$

dieses ist nun das gesuchte Product.

279.

Laßt uns nun bey eben diesem Exempel die Ordnung verändern und erstlich die I. Formel mit der III. und sodann die II. mit der IV. multipliciren.

I. a

$$\begin{array}{rl}
\text{I.} & a + b \\
\text{III.} & a - b \\
\hline
 & aa + ab \\
 & \quad - ab - bb \\
\hline
\text{I. III.} & = aa - bb
\end{array}$$

$$\begin{array}{rl}
\text{II.} & aa + ab + bb \\
\text{IV.} & aa - ab + bb \\
\hline
 & a^4 + a^3b + aabb \\
 & \quad - a^3b - aabb \\
 & \quad\quad + aabb \\
\hline
\text{II. IV.} & a^4 + aabb + b^4.
\end{array}$$

Nun ist noch übrig, das Product II. IV. mit dem I. II. zu multipliciren:

$$\begin{array}{rl}
\text{II. IV.} & = a^4 + aabb + b^4 \\
\text{I. III.} & = aa - bb \\
\hline
 & a^6 + a^4bb + aab^4 \\
 & \quad - a^4bb - aab^4 - b^6 \\
\hline
 & a^6 - b^6.
\end{array}$$

welches das gesuchte Product ist.

280.

Wir wollen die Rechnung noch nach einer andern Ordnung anstellen und erstlich die I. Formel mit der IV. und hernach die II. mit der III. multipliciren:

IV. aa

$$\begin{array}{lrrrr}
\text{IV.} & aa & -\,ab & +\,bb & \\
\text{I.} & a & +\,b & & \\
\hline
 & a^3 & -\,aab & +\,abb & \\
 & & +\,aab & -\,abb & +\,b^3 \\
\hline
\text{I. IV.} & = a^3 + b^3. & & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{lrrrr}
\text{II.} & aa & +\,ab & +\,bb & \\
\text{III.} & a & -\,b & & \\
\hline
 & a^3 & +\,aac & +\,abb & \\
 & & -\,abb & -\,abb & -\,b^3 \\
\hline
\text{II. III.} & = a^3 - b^3. & & &
\end{array}$$

Nun ist noch übrig, das Product I. IV. mit II. III. zu multipliciren:

$$\begin{array}{lrrr}
\text{I. IV.} & = a^3 & +\,b^3 & \\
\text{II. III.} & = a^3 & -\,b^3 & \\
\hline
 & a^6 & +\,a^3b^3 & \\
 & & -\,a^3b^3 & -\,b^6 \\
\hline
 & a^6 & -\,b^6. &
\end{array}$$

281.

Es ist der Mühe werth, dieses Exempel mit Zahlen zu erläutern. Es sey daher $a = 3$ und $b = 2$; so hat man $a + b = 5$ und $a - b = 1$; ferner $aa = 9$, $ab = 6$, $bb = 4$. Also ist $aa + ab + bb = 19$, und $aa - ab + bb = 7$. Folglich wird dieses Product verlangt: $5 \cdot 19 \cdot 1 \cdot 7$, welches ist 665. Es ist aber $a^6 = 729$ und $b^6 = 64$, folglich $a^6 - b^6 = 665$, wie wir schon gesehen haben.

Capitel

Capitel 4.

Von der Division mit zusammengesetzten Größen.

282.

Wann man die Division nur anzeigen will, so bedient man sich entweder des gewöhnlichen Zeichens eines Bruchs, indem man das Dividendum über die Linie und den Divisor unter die Linie schreibt: oder man schließt beyde in Klammern ein, und schreibt den Divisor nach dem Dividendum mit darzwischen gesezten zwey Punkten. Also wann $a + b$ durch $c + d$ getheilt werden soll, so wird der Quotient nach der ersten Art also angezeigt:

$$\frac{a+b}{c+d}.$$

Nach der andern Art aber also:

$$(a + b) : (c + d).$$

Beydes wird ausgesprochen $a + b$ getheilt durch $c + d$.

283.

Wann eine zusammengesetzte Formel durch eine einfache getheilt werden soll, so wird ein jedes Glied besonders getheilt, z. E.

6a

$6a - 8b$ durch 2 getheilt, giebt $3a - 4b + 2e$, und $(aa - 2ab) : = a - 2b$.
Eben so $(a^3 - 2aab + 3abc) : (a) = aa - 2ab + 3bb$: ferner $(4aab - 6aac + 8abc) : (2a) = 2ab - 3ac + 4bc$: und $(9aabc - 12abbc + 15abcc) : (3abc) = 3a - 4b + 5c$ und so fort.

284.

Wann sich etwan ein Glied des Dividends nicht theilen läßt, so wird der daher entstehende Quotient durch einen Bruch angezeigt. Also wann $a + b$ durch a getheilt werden soll, so bekommt man zum Quotient $1 + \frac{b}{a}$.
Ferner $(aa - ab + bb) : (aa) = 1 - \frac{b}{a} + \frac{bb}{aa}$.
Wann weiter $(2a + b)$ durch 2 getheilt werden soll, so bekommt man $a + \frac{b}{2}$; wobey zu merken, daß anstatt $\frac{b}{2}$ auch geschrieben werden kann $\frac{1}{2}b$, weil $\frac{1}{2}$ mal b so viel ist als $\frac{b}{2}$. Eben so ist $\frac{b}{3}$ so viel als $\frac{1}{3}b$, und $\frac{2b}{3}$ so viel als $\frac{2}{3}b$ u. s. f.

285.

Wann aber der Divisor selbst eine zusammengesetzte Größe ist, so hat die Division mehr Schwierigkeit, weil dieselbe öfters wirklich geschehen kann, wo es nicht zu vermuthen steht; denn wann die Division nicht angeht, so muß man sich begnügen, den

den Quotienten, wie oben gemeldet, durch einen Bruch anzudeuten; wir wollen daher hier nur solche Fälle betrachten, wo die Division wirklich angeht.

286.

Es soll demnach das Dividend $ac - bc$ durch den Divisor $a - b$ getheilt werden: der Quotient muß demnach also beschaffen seyn, daß, wann der Divisor $a - b$ damit multiplicirt wird, das Dividendum $ac - bc$ herauskomme. Man sieht nun leicht, daß in dem Quotus c stehen muß, weil sonst nicht ac herauskommen könnte. Um nun zu sehen, ob c der völlige Quotus ist, so darf man nur den Divisor damit multipliciren und sehen, ob das ganze Dividend herauskomme, oder nur ein Theil desselben. In unserm Fall aber, wann $a - b$ mit c multiplicirt wird, so bekommen wir $ac - bc$, welches das Dividend selbst ist: folglich ist c der völlige Quotus. Eben so ist klar, daß $(aa + ab) : (a + b) = a$, und $(3aa - 2ab) : (3a - 2b) = a$, ferner $(6aa - 9ab) : (2a - 3b) = 3a$.

287.

Auf solche Art findet man gewiß einen Theil des Quotienten. Denn wann derselbe mit dem Divisor multiplicirt noch nicht das Dividend erschöpft, so so muß man das übrige gleichfalls noch durch den Divisor theilen, da man dann wiederum einen Theil des Quotienten herausbringt. Solchergestalt verfährt man, bis man den ganzen Quotient erhalte.

Wir wollen z. E. $aa + 3ab + 2bb$ durch $a + b$ theilen; da ist nun sogleich klar, daß der Quotient das Glied a enthalten müsse, weil sonst nicht aa herauskommen könnte. Wann aber der Divisor $a + b$ mit a multiplicirt wird, so kommt $aa + ab$, welches vom Dividend abgezogen $2ab + 2bb$ nachläßt, welches also noch durch $a + b$ getheilt werden muß, wo sogleich in die Augen fällt, daß im Quotient $2b$ stehen müsse. Nun aber $2b$ mit $a + b$ multiplicirt, giebt just $2ab + 2bb$; folglich ist der gesuchte Quotient $a + 2b$, welcher mit dem Divisor $a + b$ multiplicirt das Dividend giebt. Diese ganze Operation wird folgender Gestalt vorgestellt:

$$
\begin{array}{l}
a + b)\; aa + 3ab + 2bb\; (a + 2b \\
\qquad\quad \underline{aa + ab} \\
\qquad\qquad\quad + 2ab + 2bb \\
\qquad\qquad\quad \underline{+ 2ab + 2bb} \\
\qquad\qquad\qquad\quad 0
\end{array}
$$

288.

288.

Um diese Operation zu erleichtern, so erwählt man einen Theil des Divisors, als wie hier geschehen, a, welchen man zuerst schreibt und nach diesem Buchstaben schreibt man auch das Dividend in solcher Ordnung, daß die höchsten Potestäten von eben demselben Buchstaben a zuerst gesetzt werden, wie aus folgenden Exempeln zu ersehen:

$$
\begin{array}{l}
a - b)\, a^3 - 3aab + 3abb - b^3\, (aa - 2ab + bb \\
\qquad\quad \underline{a^3 - aab} \\
\qquad\quad -2aab + 3abb \\
\qquad\quad \underline{-2aab + 2abb} \\
\qquad\qquad\qquad + abb - b^3 \\
\qquad\qquad\qquad \underline{+ abb - b^3} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
a + b)\, aa - bb\, (a - b \\
\qquad \underline{aa + ab} \\
\qquad\quad - ab - bb \\
\qquad\quad \underline{- ab - bb} \\
\qquad\qquad 0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
3a - 2b)\, 18aa - 8bb\, (6a + 4b \\
\qquad \underline{18aa - 12ab} \\
\qquad\quad + 12ab - 8bb \\
\qquad\quad \underline{+ 12ab - 8bb} \\
\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

 a + b

$$\begin{array}{l}
a+b)\,a^3+b^3\,(aa-ab+bb \\
\quad a^3+aab \\
\quad -aab+b^3 \\
\quad -aab-abb \\
\qquad +abb+b^3 \\
\qquad +abb+b^3 \\
\qquad\quad 0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
2a-b)\,8a^3-b^3\,(4aa+2ab+bb \\
\quad 8a^3-4aab \\
\quad +4aab-b^3 \\
\quad +4aab-2abb \\
\qquad +2abb-b^3 \\
\qquad +2abb-b^3 \\
\qquad\quad 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
aa-2ab+bb)\,a^4-4a^3b+6aabb-4ab^3+b^4\,(aa-2ab+bb \\
\quad a^4-2a^3b+aabb \\
\quad -2a^3b+5aabb-4ab^3 \\
\quad -2a^3b+4aabb-2ab^3 \\
\qquad +aabb-2ab^3+b^4 \\
\qquad +aabb-2ab^3+b^4 \\
\qquad\quad 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
aa-2ab+4bb)\,a^4+4aabb+16b^4\,(aa+2ab+4bb \\
\quad a^4-2a^3b+4aabb \\
\quad +2a^3b+16b^4 \\
\quad +2a^3b-4aabb+8ab^3 \\
\qquad +4aabb-8ab^3+16b^4 \\
\qquad +4aabb-8ab^3+16b^4 \\
\qquad\quad 0
\end{array}$$

aa−2ab

$$\begin{array}{l}
aa-2ab+2bb)\,a^4+4b^4\,(aa+2ab+2bb \\
\quad a^4-2a^3b+2aabb \\
\quad +2a^3b-2aabb+4b^4 \\
\quad +2a^3b-4aabb+4ab^3 \\
\qquad +2aabb-4ab^3+4b^4 \\
\qquad +2aabb-4ab^3+4b^4 \\
\qquad\quad 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
1-2x+xx)\,1-5x+10xx-10x^3+5x^4-x^5\,(1-3x+3xx-x^3 \\
\quad 1-2x+xx \\
\quad -3x+9xx-10x^3 \\
\quad -3x+6xx-3x^3 \\
\qquad +3xx-7x^3+5x^4 \\
\qquad +3xx-6x^3+3x^4 \\
\qquad -x^3+2x^4-x^5 \\
\qquad -x^3+2x^4-x^5 \\
\qquad\quad 0
\end{array}$$

Capitel 5.

Von der Auflösung der Brüche in unendlichen Reihen.

289.

Wann sich das Dividend durch den Divisor nicht theilen läßt, so wird der Quotient, wie schon oben gezeigt, durch einen Bruch ausgedruckt.

Also wann 1 durch $1-a$ getheilt werden soll, so bekommt man diesen Bruch $\frac{1}{1-a}$. Inzwischen kann doch die Division nach den vorhergehenden Regeln angestellt, und so weit man will, fortgesetzt werden, da dann immer der wahre Quotus, obgleich in verschiedenen Formen, herauskommen muß.

290.

Um dieses zu zeigen so laßt uns das Dividend 1, würcklich durch den Divisor $1-a$ theilen wie folget:

$$1-a)\ 1\ \left(1+\frac{a}{1-a}\right. \qquad \begin{array}{l} +1-a \\ \hline \text{Rest} +a \end{array}$$

oder

$$1-a)\ 1\ \left(1+a+\frac{a\cdot a}{1-a}\right. \qquad \begin{array}{l} +1-a \\ \hline +a \\ +a-aa \\ \hline \text{Rest} +aa \end{array}$$

Um-

Um noch mehr Formen zu finden, so theile man aa durch $1-a$ als

$$1-a)\ aa\ \left(aa+\frac{a^3}{1-a}\right. \qquad \begin{array}{l} aa - a^3 \\ \hline +a^3 \end{array}$$

ferner

$$1-a)\ a^3\ \left(a^3+\frac{a^4}{1-a}\right. \qquad \begin{array}{l} a^3-a^4 \\ \hline +a^4 \end{array}$$

ferner

$$1-a)\ a^4\ \left(a^4+\frac{a^5}{1-a}\right. \qquad \begin{array}{l} a^4-a^5 \\ \hline +a^5 \end{array} \text{ etc.}$$

291.

Hieraus ersehen wir, daß der Bruch $\frac{1}{1-a}$ durch alle folgende Formen ausgedruckt werden kann.

I.) $1+\frac{a}{1-a}$, II.) $1+a+\frac{aa}{1-a}$,
III.) $1+a+aa+\frac{a^3}{1-a}$, IV.) $1+a+aa+a^3+\frac{a^4}{1-a}$,
V.) $1+a+aa+a^3+a^4+\frac{a^5}{1-a}$ etc.

Man betrachte die erste Form $1+\frac{a}{1-a}$ so ist 1, so viel als $\frac{1-a}{1-a}$: folglich $1+\frac{a}{1-a}=\frac{1-a}{1-a}+\frac{a}{1-a}=\frac{1-a+a}{1-a}=\frac{1}{1-a}$.

Für die zweyte Form $1+a+\frac{aa}{1-a}$ bringe man den gantzen Theil $1+a$ auch zum Nenner $1-a$, so bekommt man $\frac{1-aa}{1-a}$, darzu $\frac{+aa}{1-a}$ giebt $\frac{1-aa+aa}{1-a}$, das ist $\frac{1}{1-a}$. Für die dritte Form $1+a+aa+\frac{a^3}{1-a}$, giebt der gantze Theil zum Nenner $1-a$ gebracht $\frac{1-a^3}{1-a}$

$\frac{1-a^3}{1-a}$, darzu der Bruch $\frac{a^3}{1-a}$ macht $\frac{1}{1-a}$; woraus erhellet, daß alle diese Formen in der That so viel sind als der vorgegebene Bruch $\frac{1}{1-a}$.

292.

Man kann daher solcher Gestalt so weit fortgehen als man will, ohne daß man weiter nöthig habe zu rechnen. Also wird seyn $\frac{1}{1-a} = 1 + a + aa + a^3 + a^4 + a^5 + a^6 + a^7 + \frac{a^8}{1-a}$. Man kann auch so gar immer weiter fortgehen, ohne jemals aufzuhören, und dadurch wird der vorgelegte Bruch $\frac{1}{1-a}$ in eine unendliche Reihe aufgelöst, welche ist:

$1 + a + aa + a^3 + a^4 + a^5 + a^6 + a^7 + a^8 + a^9 + a^{10} + a^{11} + a^{12}$ u. s. w. ins unendliche. Und von dieser unendlichen Reihe kann man mit recht behaupten, daß ihr Werth eben so viel sey, als der Bruch $\frac{1}{1-a}$.

293.

Dieses scheinet anfänglich sehr wunderbar; jedoch wird es durch die Betrachtung einiger Fälle begreiflich werden: Es sey erstlich $a = 1$, so wird unsere Reihe $1+1+1+1+1+1+1+1+1$ etc. bis ins unendliche, welche dem Bruch $\frac{1}{1-a}$ das $\frac{1}{0}$ gleich seyn soll. Wir haben aber schon oben bemercket,

daß

daß $\frac{1}{0}$ eine unendlich große Zahl sey, und dieses wird hier von neuem auf das schönste bestätiget.

Wann man aber setzt $a = 2$ so wird unsere Reihe $= 1+2+4+8+16+32+64$ etc. bis ins unendliche, deren Werth sein soll $\frac{1}{1-2}$, das ist $\frac{1}{-1} = -1$; welches dem ersten Anblick nach ungereimt scheint.

Es ist aber zu mercken, daß wann man irgendwo in obiger Reihe will stehen bleiben, darzu allezeit noch ein Bruch gesetzt werden muß.

Also wann wir z. E. bey 64 still stehen, so müßen wir zu $1+2+4+8+16+32+64$ noch diesen Bruch $\frac{128}{1-2}$, das ist $\frac{128}{-1} = -128$ hinzusetzen, woraus entsteht $127 - 128$, das ist -1.

Geht man aber ohne Ende fort, so fällt der Bruch zwar weg, man stehet aber hingegen auch niemals still.

294.

Dieses ist demnach zu beobachten, wann für a größere Zahlen als 1 angenommen werden. Nimmt mann aber für a kleinere Zahlen, so läßt sich alles leichter begreifen.

Es

Es sey z. E. $a = \frac{1}{2}$ so bekommt man $\frac{1}{1-a} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$, welches folgender Reihe gleich seyn wird: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128}$ etc. ohne Ende. Dann nimmt man nur zwey Glieder so hat man $1 + \frac{1}{2}$, und so fehlt noch $\frac{1}{2}$. Nimmt man drey Glieder so hat man $1\frac{3}{4}$, fehlt noch $\frac{1}{4}$: nimmt man vier Glieder so hat man $1\frac{7}{8}$, fehl noch $\frac{1}{8}$: woraus man siehet, daß immer weniger fehlt, folglich wann man unendlich weit fortgeht, so muß gar nichts fehlen.

295.

Man setze $a = \frac{1}{3}$ so wird unser Bruch $\frac{1}{1-a} = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$, welchem dahero folgende Reihe gleich ist $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \frac{1}{243}$ etc. bis ins unendliche. Nimmt man zwey Glieder so hat man $1\frac{1}{3}$, fehlt noch $\frac{1}{6}$. Nimmt man drey Glieder so hat man $1\frac{4}{9}$ fehlt noch $\frac{1}{18}$. Nimmt man vier Glieder so hat man $1\frac{13}{27}$, fehlt noch $\frac{1}{54}$. Da nun der Fehler immer dreymal kleiner wird, so muß derselbe endlich verschwinden.

296.

Laßt uns setzen $a = \frac{2}{3}$ so wird der Bruch $\frac{1}{1-a} = \frac{1}{1-\frac{2}{3}} = 3$, die Reihe aber wird: $1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{8}{27} + \frac{16}{81} + \frac{32}{243}$ etc. bis ins unendliche.

Nimmt

Nimmt man erstlich $1\frac{2}{3}$ so fehlt noch $1\frac{1}{3}$.
Nimmt man drey Glieder $2\frac{1}{9}$ so fehlt noch $\frac{3}{9}$.
Nimmt man vier Glieder $2\frac{11}{27}$ so fehlt noch $\frac{16}{27}$.

297.

Es sey $a = \frac{1}{4}$ so wird der Bruch $\frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{\frac{3}{4}} = 1\frac{1}{3}$, die Reihe aber wird $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256}$ ꝛc. Nimmt man zwey Glieder $1\frac{1}{4}$ so fehlt noch $\frac{1}{12}$; nimmt man drey Glieder so hat man $1\frac{5}{16}$ fehlt noch $\frac{1}{48}$ etc.

298.

Auf gleiche Weise kann auch dieser Bruch $\frac{1}{1+a}$ in eine unendliche Reihe aufgelöset werden, wann man den Zehler 1 durch den Nenner $1+a$ würcklich dividirt, wie folget:

$$
\begin{array}{l}
1+a)\ 1\ (1 - a + aa - a^3 + a^4 \\
\quad \underline{1+a} \\
\quad -a \\
\quad \underline{-a - aa} \\
\qquad\quad +aa \\
\qquad\quad \underline{+aa + a^3} \\
\qquad\qquad\quad -a^3 \\
\qquad\qquad\quad \underline{-a^3 - a^4} \\
\qquad\qquad\qquad\quad +a^4 \\
\qquad\qquad\qquad\quad \underline{+a^4 + a^5} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad -a^5 \text{ ꝛc.}
\end{array}
$$

Dahero

Dahero ist unser Bruch $\frac{1}{1+a}$ gleich dieser unendlichen Reihe:

$$1 - a + aa - a^3 + a^4 - a^5 + a^6 - a^7 \text{ etc.}$$

299.

Setzt man $a = 1$ so erhält man diese merkwürdige Vergleichung:
$\frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1$ etc. bis ins unendliche; welches widersinnig scheint: dann wann man irgendwo mit -1 aufhört, so giebt diese Reihe 0; hört man irgend aber mit $+1$ auf, so giebt dieselbe 1. Allein eben hieraus läßt sich die Sache begreiffen, weil wann man ohne Ende fort gehen und weder bey -1 noch $+1$ irgendwo aufhören muß, so kann weder 1 noch 0 herauskommen sondern etwas darzwischen welches $\frac{1}{2}$ ist.

300.

Es sey ferner $a = \frac{1}{2}$ so wird unser Bruch $\frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$, welchen folglich gleich seyn wird diese Reihe $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{32} + \frac{1}{64}$ etc. ohne Ende. Nimmt man zwey Glieder so hat man $\frac{1}{2}$ ist zu wenig um $\frac{1}{6}$. Nimmt man drey Glieder so hat man $\frac{3}{4}$, ist zu viel um $\frac{1}{12}$: nimmt man vier Glieder so hat man $\frac{5}{8}$, ist zu wenig um $\frac{1}{24}$ ꝛc.

301.

Setzt man $a = \frac{1}{3}$ so wird unser Bruch $\frac{1}{1+\frac{1}{3}} = \frac{3}{4}$, welchem folglich diese Reihe wird gleich seyn $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \frac{1}{81} - \frac{1}{243} + \frac{1}{729}$ etc. ohne Ende. Nimmt man zwey Glieder so hat man $\frac{2}{3}$, ist zu wenig um $\frac{1}{12}$. Nimmt man drey Glieder so hat man $\frac{7}{9}$ ist zu viel um $\frac{1}{36}$. Nimmt man vier Glieder so hat man $\frac{20}{27}$, ist zu wenig um $\frac{1}{108}$, u. s. f.

302.

Man kann den Bruch $\frac{1}{1+a}$ auf noch eine andre Art auflösen, indem man 1 durch $a+1$ theilt, nemlich:

$$a+1)\,1\,\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{aa} + \frac{1}{a^3} - \frac{1}{a^4} + \frac{1}{a^5} \text{ etc.}\right.$$

$$\begin{array}{l}
1 + \frac{1}{a} \\
\hline
-\frac{1}{a} \\
-\frac{1}{a} - \frac{1}{aa} \\
\hline
+\frac{1}{aa} \\
+\frac{1}{aa} + \frac{1}{a^3} \\
\hline
-\frac{1}{a^3} \\
-\frac{1}{a^3} - \frac{1}{a^4} \\
\hline
+\frac{1}{a^4} \\
+\frac{1}{a^4} + \frac{1}{a^5} \\
\hline
-\frac{1}{a^5} \text{ etc.}
\end{array}$$

Folglich ist unser Bruch $\frac{1}{a+1}$ dieser Reihe gleich $\frac{1}{a} - \frac{1}{aa} + \frac{1}{a^3} - \frac{1}{a^4} + \frac{1}{a^5} - \frac{1}{a^6}$ etc. ohne Ende:
Setzt man $a = 1$ so bekommt man diese Reihe $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1$ etc. $= \frac{1}{2}$ wie oben:
Setzt man $a = 2$ so bekommt man diese Reihe $\frac{1}{3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \frac{1}{32} - \frac{1}{64}$ etc.

303.

Auf gleiche Weise kann man auf eine allgemeine Art diesen Bruch $\frac{c}{a+b}$ in einer Reihe auflösen,

$$
\begin{array}{l}
a+b)\,c\,\left(\frac{c}{d} - \frac{bc}{aa} + \frac{bbc}{a^3} - \frac{b^3c}{a^4}\text{ etc.}\right. \\
\quad c + \frac{bc}{a} \\
\quad \overline{\quad - \frac{bc}{a}} \\
\quad - \frac{bc}{a} - \frac{bbc}{aa} \\
\quad \overline{\qquad + \frac{bbc}{aa}} \\
\qquad + \frac{bbc}{aa} + \frac{b^3c}{a^3} \\
\qquad \overline{\qquad\quad - \frac{b^3c}{a^3}}
\end{array}
$$

Woraus

Woraus wir diese Vergleichung erhalten $\frac{c}{a+b} = \frac{c}{a} - \frac{bc}{aa} + \frac{bbc}{a^3} - \frac{b^3c}{a^4}$ bis ins unendliche;
Es sey $a = 2$, $b = 4$, und $c = 3$ so haben wir $\frac{c}{a+b}$

$$\frac{3}{4+2} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = \frac{3}{2} - 3 + 6 - 12 \text{ etc.}$$

Es sey $a = 10$, $b = 1$ und $c = 11$ so haben wir

$$\frac{c}{a+b} = \frac{11}{10+1} = 1 = \frac{11}{10} - \frac{11}{100} + \frac{11}{1000} - \frac{11}{10000} \text{ etc.}$$

Nimmt man nur ein Glied, so hat man $\frac{11}{10}$ welches zu viel um $\frac{1}{10}$. Nimmt man zwey Glieder so hat man $\frac{99}{100}$, welches zu wenig um $\frac{1}{100}$. Nimmt man drey Glieder so hat man $\frac{1001}{1000}$, ist zu viel um $\frac{1}{1000}$ etc.

304.

Wann der Divisor aus mehr Theilen besteht, so kann die Division gleicher Gestalt ins unendliche fortgesetzt werden.

Als wann dieser Bruch $\frac{1}{1-a+aa}$ vorgegeben wäre, so wird die unendliche Reihe, so demselben gleich ist also gefunden:

$1 - a$

$$
\begin{array}{l}
1 - a + aa)\ 1\ (1 + a - a^3 - a^4 + a^6 + a^7 \text{ etc.} \\
\quad \underline{1 - a + aa} \\
\quad\quad + a - aa \\
\quad\quad \underline{+ a - aa + a^3} \\
\quad\quad\quad\quad - a^3 \\
\quad\quad\quad\quad \underline{- a^3 + a^4 - a^5} \\
\quad\quad\quad\quad\quad\quad - a^4 + a^5 \\
\quad\quad\quad\quad\quad\quad \underline{- a^4 + a^5 - a^6} \\
\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad + a^6 \\
\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad \underline{+ a^6 - a^7 + a^8} \\
\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad + a^7 - a^8 \\
\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad \underline{+ a^7 - a^8 + a^9} \\
\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad - a^9 \text{ ꝛc.}
\end{array}
$$

Dahero haben wir diese Vergleichung $\frac{1}{1-a+aa} = 1 + a - a^3 - a^4 + a^6 + a^7 - a^9 - a^{10}$ etc. ohne Ende. Nimmt man hier $a = 1$ so bekommt man diese Reihe $1 = 1 + 1 - 1 - 1 + 1 + 1 - 1 - 1 + 1 + 1$ etc. welche Reihe die schon oben gefundene $1 - 1 + 1 - 1 + 1$ etc. gedoppelt in sich enthält, da nun die obige Reihe dem $\frac{1}{2}$ gleich war, so ist kein Wunder daß diese $\frac{2}{2}$ das ist 1, ausmacht.

Setzt man $a = \frac{1}{2}$ so bekommt man diese Gleichung $\frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{8} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} - \frac{1}{512}$ etc. Setzt man

man

man $a = \frac{1}{3}$ so bekommt man diese Gleichung, als $\frac{1}{\frac{7}{9}}$ oder $\frac{9}{7} = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{27} - \frac{1}{81} + \frac{1}{729}$ etc. Nimmt man hier vier Glieder so bekommt man $\frac{104}{81}$ welches kleiner ist als $\frac{9}{7}$ um $\frac{1}{567}$.

Man setze ferner $a = \frac{2}{3}$ so bekommt man diese Gleichung $\frac{1}{\frac{7}{9}} = \frac{9}{7} = 1 + \frac{2}{3} - \frac{8}{27} - \frac{16}{81} + \frac{64}{729}$ etc. welche Reihe der vorigen gleich seyn muß; man subtrahire also die obere von dieser, so bekommt man:
$0 = \frac{1}{3} - \frac{7}{27} - \frac{15}{81} + \frac{63}{729}$ etc. welche vier Glieder machen $-\frac{2}{81}$.

305.

Solcher gestalt kann man alle Brüche in unendliche Reihen auflösen, welches nicht nur öfters sehr großen Nutzen schaft, sondern auch an sich selbst höchst merkwürdig ist, daß eine unendliche Reihe, ohngeacht dieselbe niemals aufhört, dennoch einen bestimmten Werth haben könne. Es sind auch die wichtigsten Erfindungen aus diesem Grunde hergeleitet worden, dahero diese Materie allerdings verdient mit der größten Aufmerksamkeit in Erwegung gezogen zu werden.

Capitel

Capitel 6.

Von den Quadraten der zusammengesetzten Größen.

306.

Wann das Quadrat von einer zusammengesetzten Größe gefunden werden soll, so darf man dieselbe nur mit sich selbsten multipliciren, und das Product wird das Quadrat davon seyn.

Also wird das Quadrat von $a+b$ gefunden, wie folget:

$$\begin{array}{r} a+b \\ a+b \\ \hline aa+ab \\ +ab+bb \\ \hline aa+2ab+bb \end{array}$$

307.

Wann dahero die Wurzel aus zwey Theilen besteht, die zusammen addirt sind, als $a+b$, so besteht das Quadrat I. aus den Quadraten eines jeden Theils nemlich aa und bb, II. kommt aber noch hinzu das doppelte

pelte

pelte Product der beyden Theile nemlich $2ab$, und die gantze Summa $aa+2ab+bb$ ist das Quadrat von $a+b$.

Es sey z. E. $a=10$ und $b=3$, also daß das Quadrat von 13 gefunden werden soll; solches wird demnach seyn $=100+60+9=169$.

308.

Durch Hülfe dieser Formel laßen sich nun leicht die Quadraten von ziemlich großen Zahlen finden, wann dieselben in zwey Theile zergliedert werden.

Also um das Quadrat von 57 zu finden so zertheile man diese Zahl in $50+7$; daher das Quadrat seyn wird:

$$2\,\cancel{1}500+700+49=3249.$$

309.

Hieraus sieht man, daß das Quadrat von $a+1$ seyn werde $aa+2a+1$; da nun das Quadrat von a ist aa, so wird das Quadrat von $a+1$ gefunden wann man zu jenem addirt $2a+1$, wobey zu merken daß $2a+1$ die Summa der beyden Wurzeln a und $a+1$ ist; da also das Quadrat von 10 ist 100, so wird das Quadrat von 11 seyn $=100+21$, und

da

da das Quadrat von 57 ist 3249, so wird das Quadrat von 58 seyn $= 3249 + 115 = 3364$. Und ferner das Quadrat von 59 $= 3364 + 117 = 1481$. Noch ferner das Quadrat von 60 $= 3481 + 119 = 3600$ etc.

310.

Das Quadrat einer zusammengesetzten Größe, als $a+b$, wird also angedeutet $(a+b)^2$; dahero haben wir $(a+b)^2 = aa + 2ab + bb$, woraus folgende Gleichungen hergeleitet worden:
$(a+1)^2 = aa + 2a + 1$, $(a+2)^2 = aa + 4a + 4$,
$(a+3)^2 = aa + 6a + 9$, $(a+4)^2 = aa + 8a + 16$
u. s. f.

311.

Wann die Wurzel ist $a-b$ so wird ihr Quadrat seyn $= aa - 2ab + bb$, welches dahero aus den Quadraten beider Theile besteht, wovon aber das doppelte Product muß weggenommen werden.

Es sey z. E. $a = 10$ und $b = 1$ so wird das Quadrat von 9 seyn $= 100 - 20 + 1 = 81$.

312.

Da wir nun diese Gleichung haben $(a-b)^2 = aa - 2ab + bb$, so wird seyn $(a-1)^2 = aa - 2a + 1$; das

Das Quadrat von $a-1$ wird also gefunden, wann man von aa subtrahirt $2a-1$, welches die Summe von beiden Wurzeln a und $a-1$ ist.

Es sey z. E. $a = 50$ so ist $aa = 2500$ und $a - 1 = 49$, dahero $49^2 = 2500 - 99 = 2401$.

313.

Dieses läßt sich auch durch Brüche erläutern, denn wenn man vor die Wurzel nimmt $\frac{3}{5} + \frac{2}{5}$ [welches 1 ausmacht] so wird das Quadrat seyn:
$\frac{9}{25} + \frac{4}{25} + \frac{12}{25} = \frac{25}{25}$ das ist 1.

Ferner das Quadrat von $\frac{1}{2} - \frac{1}{3}$ [welches $\frac{1}{6}$ ist] wird seyn $\frac{1}{4} - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} = \frac{1}{36}$.

314.

Wann die Wurzel aus mehr Gliedern besteht, so läßt sich das Quadrat auf gleiche Art bestimmen: also von $a+b+c$ wird das Quadrat gefunden, wie folget:

$$\begin{array}{l}
a + b + c \\
a + b + c \\
\hline
aa + ab + ac \qquad\quad + bc \\
\quad + ab + ac + bb + bc + cc \\
\hline
aa + 2ab + 2ac + bb + 2bc + cc
\end{array}$$

 woraus

woraus man sieht, daß dasselbe erstlich aus dem Quadrat eines jeden Theils der Wurzel und hernach aus dem doppelten Product von je zwey Theilen mit einander besteht.

315.

Um dies mit einem Exempel zu erläutern, so wollen wir die Zahl 256 in diese drey Theile zertheilen $200 + 50 + 6$; dahero das Quadrat davon aus folgenden Theilen zusammengesetzt seyn wird:

40000	256
2500	256
36	1536
20000	1280
2400	512
600	65536

65536 u. dies ist dem $256 \cdot 256$ offenbar gleich.

316.

Wann einige Glieder in der Wurzel negativ sind, so wird das Quadrat nach eben dieser Regel gefunden, wann man nur bey den doppelten Producten Acht giebt was für ein Zeichen einem jeden zukommt.

Also von $a - b - c$ wird das Quadrat seyn:

aa +

$aa + bb + cc - 2ab - 2ac + 2bc$. Wann also die Zahl 256 also vorgestellet wird $300 - 40 - 4$, so bekömmt man:

Positive Theile	Negative Theile
+ 90000	− 24000
1600	2400
320	− 26400
16	
+ 91936	
− 26400	

65536. Quadrat von 256, wie oben.

Capitel 7.

Von der Ausziehung der Quadratwurzel in zusammengesetzten Größen.

317.

Um hiervon eine sichere Regel zu geben, so müßen wir das Quadrat von der Wurzel $a + b$, welches ist $aa + 2ab + bb$ genau in Erwegung ziehen, und suchen wie man wiederum aus dem

gege-

gegebenen Quadrat die Wurzel herausbringen könne. Worüber folgende Betrachtungen anzustellen sind.

318.

Erstlich da das Quadrat $aa + 2ab + bb$ aus mehrern Gliedern besteht, so ist gewiß, daß auch die Wurzel aus mehr als einem Gliede bestehen müße: und wann das Quadrat so geschrieben wird, daß die Potestäten von einem Buchstaben, als a, immer abnehmen, so ist klar daß das erste Glied das Quadrat seyn werde von dem ersten Glied der Wurzel. Da nun in unserm Fall das erste Glied des Quadrats aa ist, so ist offenbar, daß das erste Glied der Wurzel seyn müsse a.

319.

Hat man nun das erste Glied der Wurzel, nemlich a gefunden, so bebrachte man das übrige im Quadrat, welches ist $2ab + bb$, um zu sehen wie man daraus den andern Theil der Wurzel welcher ist b, finden könne. Hiebei bemerken wir, daß jenes übrige oder jener Rest $2ab + bb$ also durch ein Product vorgestellet werden könne $(2a + b)b$. Da nun dieser Rest zwey Factores hat $2a + b$ und b so wird der letztere b, das ist der zweite Theil der Wurzel gefunden, wann man den Rest $2ab + bb$ durch $2a + b$ dividirt.

320.

Um also den zweiten Theil der Wurzel zu finden, so muß man den Rest durch $2a + b$ dividiren, da dann der Quotient der zweite Theil der Wurzel seyn wird. Bei dieser Division aber ist zu merken, daß $2a$ das doppelte ist von dem schon gefundenen ersten Theil der Wurzel a: das andre Glied b aber ist zwar noch unbekannt, und muß seine Stelle noch ledig gelassen werden; doch kann man gleichwohl die Division vornehmen, indem dabei nur auf das erste Glied $2a$ gesehen wird. Sobald man aber den Quotient gefunden, welcher hier b ist, so muß man denselben auch an die ledige Stelle setzen und die Division vollenden.

321.

Die Rechnung also wodurch aus obigem Quadrat $aa + 2ab + bb$ die Wurzel gefunden wird, kann also vorgestellt werden:

$$\begin{array}{r|l} & aa + 2ab + bb\ (a + b \\ & aa \\ \hline 2a + b & \quad + 2ab + bb \\ & \quad + 2ab + bb \\ \hline & \qquad 0 \end{array}$$

322.

Auf solche Art kann auch die Quadrat-Wurzel aus andern zusammengesetzten Formeln, wann dieselben

ben nur Quadrate sind, gefunden werden, wie aus folgenden Exempeln zu ersehen, als:

$$\begin{array}{r|l} & aa + 6ab + 9bb\,(a + 3b \\ & aa \\ \hline 2a + 3b & +6ab + 9bb \\ & +6ab + 9bb \\ \hline & \quad 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} & 4aa - 4ab + bb\,(2b - b \\ & 4aa \\ \hline 4a - b & -4ab + bb \\ & -4ab + bb \\ \hline & \quad 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} & 9pp + 24pq + 16qq\,)\,3p + 4q \\ & 9pp \\ \hline 6p + 4q & +24pq + 16qq \\ & +24pq + 16qq \\ \hline & \quad 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} & 25xx - 60x + 36)\,5x - 6 \\ & 25xx \\ \hline 10x - 6 & -60x + 36 \\ & -60x + 36 \\ \hline & \quad 0 \end{array}$$

323.

Wann bey der Division noch ein Rest übrig bleibt, so ist es ein Zeichen daß die Wurzel aus mehr als 2 Gliedern besteht. Alsdann werden die zwey schon gefundenen Glieder zusammen als der erste Theil betrachtet, und aus dem Rest auf gleiche Weise wie vorher das

das folgende Glied der Wurzel gefunden, wie aus folgenden Exempeln zu ersehen.

$$\begin{array}{r|l} & aa + 2ab - 2ac - 2bc + bb + cc\,(a + b - c \\ & aa \\ \hline 2a + b & +2ab - 2ac - 2bc + bb + cc \\ & +2ab \qquad\qquad\qquad\quad + bb \\ \hline 2a + 2b - b & -2ac - 2bc + cc \\ & -2ac - 2bc + cc \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} & a^4 + 2a^3 + 3aa + 2a + 1\,(aa + a + 1 \\ & a^4 \\ \hline 2aa + a & +2a^3 + 3aa \\ & +2a^3 + aa \\ \hline 2aa + 2a + 1 & +2aa + 2a + 1 \\ & +2aa + 2a + 1 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} & a^4 - 4a^3b + 8ab^3 + 4b^4\,(aa - 2ab - 2bb \\ & a^4 \\ \hline 2aa - 2ab & -4a^3b + 8ab^3 \\ & -4a^3b + 4aabb \\ \hline 2aa - 4ab - 2bb & -4aabb + 8ab^3 + 4b^4 \\ & -4aabb + 8ab^3 + 4b^4 \\ \hline \end{array}$$

a^6

$$a^6-6a^5b+15a^4bb-20a^3b^3+15aab^4-6ab^5+b^6\,(a^3-3aab+3abb-b^3$$
$$a^6$$
$$\begin{array}{l|l}
2a^3-3aab & -6a^5b+15a^4bb \\
 & -6a^5b+9a^4bb \\
2a^3-6aab+3abb & +6a^4bb-20a^3b^3+15aab^4 \\
 & +6a^4bb-18a^3b^3+9aab^4 \\
2a^3-6aab+6abb-b^3 & -2a^3b^3+6aab^4-6ab^5+b^6 \\
 & -2a^3b^3+6aab^4-6ab^5+b^6 \\
 & 0
\end{array}$$

324.

Aus dieser Regel folgt nun leicht diejenige, welche in den Rechen-Büchern für die Ausziehung der Quadrat-Wurzel gegeben wird, als:

```
  5| 9|23,        17|64|42,        23|04|48,
  4|               16|               16|
43|129          82|164           88|704
  |129            |164             |704
     0                0                0

        40|96|64,        96|04|98,
        36|              81|
     124|496          188|1504
        |496             |1504
          0                 0

        1|56|25|125,     99|80|01|999,
        1|               81|
      22|56           189|1880
        |44              |1701
     245|1225        1989|17901
        |1225            |17901
           0                 0
```

325.

Wann aber bey der Operation zuletzt etwas übrig bleibt, so ist solches ein Zeichen daß die vorgelegte

Zahl kein Quadrat ist und also die Wurzel davon nicht angegeben werden kann. In solchen Fällen bedient man sich des oben gebrauchten Wurzel-Zeichens welches vor die Formel geschrieben, die Formel selbst aber in Klammern eingeschlossen wird. Also wird die Quadrat-Wurzel von $aa+bb$ auf diese Weise angedeutet, $\sqrt{}(aa+bb$; und $\sqrt{}(1-xx)$ deutet an die Quadrat-Wurzel aus $1-xx$. Statt dieses Wurzel-Zeichens kann man auch den gebrochenen Exponenten $\frac{1}{2}$ gebrauchen. Also wird auch durch $(aa+bb)^{\frac{1}{2}}$ die Quadrat-Wurzel aus $aa+bb$ angedeutet.

Capitel 8.

Von der Rechnung mit Irrational-Zahlen.

326.

Wann zwey oder mehr Irrational-Formeln zusammen addirt werden sollen, so geschieht solches wie oben gelehret worden, indem man alle Glieder mit ihren Zeichen zusammenschreibt. Nur ist bei dem Abkürzen zu bemerken, daß anstatt $\sqrt{}a+\sqrt{}a$ geschrieben werde $2\sqrt{}a$, und daß $\sqrt{}a-\sqrt{}a$ einander aufhebe oder nichts gebe. Also diese Formel $3+\sqrt{}2$ und $1+\sqrt{}2$ zusammen addirt giebt $4+2\sqrt{}2$ oder $4+\sqrt{}8$: ferner $5+\sqrt{}3$ und $4-\sqrt{}3$ zusammen addirt, giebt 9: ferner $2\sqrt{}3+3\sqrt{}2$ und $\sqrt{}3-\sqrt{}2$ zusammen addirt, macht $3\sqrt{}3+2\sqrt{}2$.

327.

Eben so wenig Schwierigkeit hat die Subtraction indem nur die Zeichen der untern Zahl, welche subtrahirt werden soll, verkehrt gelesen werden müßen, wie aus folgendem Exempel zu ersehen.

$$\begin{array}{l} 4-\sqrt{}2+2\sqrt{}3-3\sqrt{}5+4\sqrt{}6 \\ 1+2\sqrt{}2-2\sqrt{}3-5\sqrt{}5+6\sqrt{}6 \\ \hline 3-3\sqrt{}2+4\sqrt{}3+2\sqrt{}5-2\sqrt{}6 \end{array}$$

328.

Bey der Multiplication ist nur zu merken, daß $\sqrt{}a$ mit $\sqrt{}a$ multiplicirt a giebt. Wann aber ungleiche Zahlen hinter dem $\sqrt{}$ Zeichen stehen, so giebt $\sqrt{}a$ mit $\sqrt{}b$ multiplicirt $\sqrt{}ab$, woraus folgende Exempel berechnet werden können:

1+

$$
\begin{array}{r}
1+\sqrt{2} \\
1+\sqrt{2} \\
\hline
1+\sqrt{2} \\
+\sqrt{2}+2 \\
\hline
1+2\sqrt{2}+2=3+2\sqrt{2}
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r}
4+2\sqrt{2} \\
2-\sqrt{2} \\
\hline
8+4\sqrt{2} \\
-4\sqrt{2}-4 \\
\hline
8-4=4.
\end{array}
$$

329.

Eben dieses gilt auch von den unmöglichen Größen; wobey nur zu merken daß $\sqrt{-a}$ mit $\sqrt{-a}$ multiplicirt $= a$ giebt.

Wann man den Cubus von $-1+\sqrt{-3}$ suchen sollte so geschähe solches wann man erstlich das Quadrat nimmt und dasselbe nochmahls mit der Zahl $-1+\sqrt{-3}$ multipliciret wie folgt

$$
\begin{array}{l}
-1+\sqrt{-3} \\
-1+\sqrt{-3} \\
\hline
+1-\sqrt{-3} \\
\quad -\sqrt{-3}-3 \\
\hline
+1-2\sqrt{-3}-3=-2-2\sqrt{-3} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad -1+\sqrt{-3} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \overline{+2+2\sqrt{-3}} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad -2\sqrt{-3}+6 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \overline{\quad 2+6=8}
\end{array}
$$

330.

Bey der Division hat man nur nöthig schlechtweg einen Bruch zu setzen und alsdann kann man denselben in eine andere Form verwandeln, so daß der Nenner rational wird. Dann wann der Nenner ist $a+\sqrt{b}$ und man oben und unten mit $a-\sqrt{b}$ multiplicirt, so wird der neue Nenner seyn $aa-b$ und hat also kein Wurzel-Zeichen mehr. Man dividire z. E. $3+2\sqrt{2}$ durch $1+\sqrt{2}$ so hat man $\frac{3+2\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$. Jetzt multiplicire man oben und unten mit $1-\sqrt{2}$ so bekommt man für den Zehler

$$
\begin{array}{l}
3+2\sqrt{2} \\
1-\sqrt{2} \\
\hline
3+2\sqrt{2} \\
\quad -3\sqrt{2}-4 \\
\hline
3-\sqrt{2}-4=-\sqrt{2}-1
\end{array}
$$

für den Nenner

$$
\begin{array}{l}
1+\sqrt{2} \\
1-\sqrt{2} \\
\hline
1+\sqrt{2} \\
\quad -\sqrt{2}-2 \\
\hline
1-2=-1
\end{array}
$$

Also ist unser neuer Bruch $\frac{-\sqrt{2}-1}{-1}$. Man multiplicire ferner oben und unten mit -1 so bekommt man vor den Zehler $+\sqrt{2}+1$ und vor den Nenner $+1$.

Es ist $+\sqrt{2}+1$ aber eben so viel als $\frac{3+2\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$; dann $\sqrt{2}+1$ mit dem Divisor $1+\sqrt{2}$ multiplicirt

$$\begin{array}{l} 1+\sqrt{2} \\ \underline{1+\sqrt{2}} \\ 1+\sqrt{2} \\ \underline{\quad +\sqrt{2}+2} \\ \text{giebt } 1+2\sqrt{2}+2=3+2\sqrt{2}. \end{array}$$

Ferner $8-5\sqrt{2}$ durch $3-2\sqrt{2}$ dividirt giebt $\frac{8-5\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}}$. Man multiplicire oben und unten mit $3+2\sqrt{2}$ so bekommt man für den Zehler

$$\begin{array}{l} 8-5\sqrt{2} \\ \underline{3+2\sqrt{2}} \\ 24-15\sqrt{2} \\ \underline{\quad +16\sqrt{2}-20} \\ 24+\sqrt{2}-20=4+\sqrt{2} \end{array}$$

und für den Nenner $3-2\sqrt{2}$

$$\begin{array}{l} \underline{3+2\sqrt{2}} \\ 9-6\sqrt{2} \\ \underline{\quad +6\sqrt{2}-4.2} \\ 9-8=+1 \end{array}$$

Folg-

Folglich ist der Quotient $4+\sqrt{2}$. Die Probe stehet also:

$$\begin{array}{l} 4+\sqrt{2} \\ \underline{3-2\sqrt{2}} \\ 12+3\sqrt{2} \\ \underline{\quad -8\sqrt{2}-4} \\ 12-5\sqrt{2}-4=8-5\sqrt{2}. \end{array}$$

331.

Auf solche Weise können dergleichen Brüche immer in andre verwandelt werden, wo der Nenner rational ist. Also dieser Bruch $\frac{1}{5+2\sqrt{6}}$, wann man oben und unten mit $5-2\sqrt{6}$ multiplicirt, so wird solcher in diesen verwandelt $\frac{5-2\sqrt{6}}{1}=5-2\sqrt{6}$.

Ferner dieser Bruch $\frac{2}{-1+\sqrt{-3}}$ wird verwandelt in diesen $\frac{2+2\sqrt{-3}}{-4}=\frac{1+\sqrt{-3}}{-2}$ ferner $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{5}}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}=\frac{11+2\sqrt{30}}{1}=11+2\sqrt{30}$.

332.

Wann in dem Nenner auch mehr Glieder vorkommen, so wird auf eben diese Art nach und nach die Irrationalität aus dem Nenner weggebracht.

 Also

Also bey diesem Bruch $\frac{1}{\sqrt{10}-\sqrt{2}-\sqrt{3}}$ multiplicirt man erstlich oben und unten mit $\sqrt{10}+\sqrt{2}+\sqrt{3}$, so hat man $\frac{\sqrt{10}+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{5-2\sqrt{6}}$; man multipliciret ferner oben und unten mit $5+2\sqrt{6}$, so hat man $5\sqrt{10}+11\sqrt{2}+9\sqrt{3}+2\sqrt{60}$.

Capitel 9.

Von den Cubis und von der Ausziehung der Cubik-Wurzel.

233.

Um den Cubus von der Wurzel $a+b$ zu finden, muß man das Quadrat davon, welches ist $aa+2ab+bb$, nochmahls mit $a+b$ multipliciren, da dann der Cubus seyn wird

$$\begin{array}{l} aa+2ab+bb \\ \quad a+b \\ \hline a^3+2aab+abb \\ \quad\;\; +aab+2abb+b^3 \\ \hline a^3+3aab+3abb+b^3. \end{array}$$

Derselbe

Derselbe besteht also aus den Cubis beider Theile der Wurzel, hernach noch aus $3aab+3abb$ welches so viel ist als $(3ab).(a+b)$; und dieses ist das dreyfache Product der beyden Theile mit der Summa derselben multiplicirt.

334.

Wann also die Wurzel aus zwey Theilen besteht, so läßt sich der Cubus nach dieser Regul leicht finden: als z.E. da die Zahl $5=3+2$, so ist der Cubus davon $=27+8+18.5$ ist also $=125$.

Es sey ferner die Wurzel $7+3=10$, so wird der Cubus seyn $343+27+63.10=1000$.

Um den Cubus von 36 zu finden, so setze man die Wurzel $36=30+6$ und der Cubus wird seyn:

$$27000+216+540.36=46656.$$

335.

Wann aber umgekehrt der Cubus gegeben ist, nemlich $a^3+3aab+3abb+b^3$, und man soll davon die Wurzel finden, so ist folgendes zu bemerken.

Erstlich wann der Cubus nach der Potestät eines Buchstaben ordentlich geschrieben wird, so erkennt man aus dem ersten Glied a^3 sogleich das erste Glied der Wurzel a, dessen Cubus jenem gleich ist, und wann man denselben wegnimmt, so behält man diesen Rest: $3aab + 3abb + b^3$, aus welchen das zweyte Glied der Wurzel gefunden werden muß.

336.

Da wir nun schon wissen, daß das zweyte Glied $+ b$ ist, so kommt es hier nur darauf an, wie dasselbe aus dem obigen Rest gefunden werden könne. Es läßt sich aber derselbe Rest also durch zwey Factores ausdrucken $(3aa + 3ab + bb) \cdot (b)$; wann man also den Rest durch $3aa + 3ab + bb$ dividirt, so erhält man das verlangte zweyte Glied der Wurzel nemlich $+ b$.

337.

Weil aber das zweyte Glied noch nicht bekannt ist, so ist auch der Theiler noch unbekannt: Allein es ist genug, daß wir den ersten Theil dieses Theilers haben, welcher ist $3aa$ oder das dreyfache Quadrat des ersten schon gefundenen Theils der Wurzel, und daraus läßt sich schon der andre Theil b finden, woraus

aus hernach der Divisor vollständig gemacht werden muß, ehe man die Division vollendet. Man muß dahero alsdann zu $3aa$ noch hinzufügen $3ab$, das ist das dreyfache Product des ersten Theils mit dem andern, und hernach bb, das ist das Quadrat des andern Theils der Wurzel.

338.

Es sey z. E. gegeben dieser Cubus

$$\begin{array}{r|l}
 & a^3 + 12aa + 48a + 64 \,(a + 4 \\
 & a^3 \\
\hline
3aa + 12a + 16 & + 12aa + 48a + 64 \\
 & + 12aa + 48a + 64 \\
\hline
 & 0
\end{array}$$

Es sey ferner gegeben dieser Cubus

$$\begin{array}{r|l}
 & a^6 - 6a^5 + 15a^4 - 20a^3 + 15a^2 - 6a + 1 \,(aa - 2a + 1 \\
 & a^6 \\
\hline
3a^4 - 6a^3 + 4aa & - 6a^5 + 15a^4 - 20a^3 \\
 & - 6a^5 + 12a^4 - 8a^3 \\
\hline
3a^4 - 12a^3 + 12aa + 3aa - 6a + 1 & 3a^4 - 12a^3 + 15a^2 - 6a + 1 \\
 & 3a^4 - 12a^3 + 15a^2 - 6a + 1 \\
\hline
 & 0
\end{array}$$

339.

339.

Hierauf gründet sich auch die gemeine Regul die Cubic-Wurzeln aus Zahlen zu finden. Als mit der Zahl 2197 wird die Rechnung also angestellet:

	2197 (10 + 3 = 13
	1000
300	1197
90	
9	
399	1197
	0

Es sey ferner gegeben der Cubus 34965783 woraus die Cubic-Wurzel gefunden werden soll:

	34 965 783 (300 + 20 + 7 = 327
	28 000 000
270000	7 965 783
18000	
400	
288400	5768000
307200	2197783
6720	
49	
313969	2197783
	0

Capi-

Capitel 10.

Von den höhern Potestäten zusammengesetzter Größen.

340.

Nach den Quadraten und Cubis folgen die höhern Potestäten, welche durch Exponente wie schon oben gemeldet worden, pflegen angezeigt zu werden: nur muß man die Wurzel wann sie zusammengesetzt ist in Klammern einschließen. Also $(a+b)^5$ deutet die fünfte Potestät von $a+b$ an, und $(a-b)^6$ deutet die sechste Potestät an von $a-b$. Wie aber diese Potestäten entwickelt werden können, soll in diesem Capitel gezeigt werden.

341.

Es sey demnach $a+b$ die Wurzel, oder die erste Potestät, so werden die höhern Potestäten durch die Multiplication folgender Gestalt gefunden.

$a + b$

$$(a+b)^1 = a+b$$
$$a+b$$
$$aa+ab$$
$$+ab+ab$$
$$(a+b)^2 = aa+2ab+bb$$
$$a+b$$
$$a^3+2aab+abb$$
$$+aab+2abb+b^3$$
$$(a+b)^3 = a^3+3aab+3abb+b^3$$
$$a+b$$
$$a^4+3a^3b+3aabb+ab^3$$
$$+a^3b+3aabb+3ab^3+b^4$$
$$(a+b)^4 = a^4+4a^3b+6aabb+4ab^3+b^4$$
$$a+b$$
$$a^5+4a^4b+6a^3bb+4aab^3+ab^4$$
$$+a^4b+4a^3bb+6aab^3+4ab^4+b^5$$
$$(a+b)^5 = a^5+5a^4b+10a^3bb+10aab^3+5ab^4+b^5$$
$$a+b$$
$$a^6+5a^5b+10a^4bb+10a^3b^3+5aab^4+ab^5$$
$$+a^5b+5a^4bb+10a^3b^3+10aab^4+5ab^5+b^6$$
$$(a+b)^6 = a^6+6a^5b+15a^4bb+20a^3b^3+15aab^4+6ab^5+b^6$$

etc.

342.

342.

Eben so werden auch die Potestäten von der Wurzel a—b gefunden, welche von den vorigen nur darinn unterschieden sind, daß das 2te, 4te, 6te etc. Glied das Zeichen minus bekommt, wie aus folgendem zu ersehen.

$$(a-b)^1 = a-b$$
$$a-b$$
$$aa-ab$$
$$-ab+bb$$
$$(a-b)^2 = aa-2ab+bb$$
$$a-b$$
$$a^3-2aab+abb$$
$$-aab+2abb-b^3$$
$$(a-)^3 = a^3-3aab+3aab-b^3$$
$$a-b$$
$$a^4-3a^3b+3aabb-ab^3$$
$$-a^3b+3aabb-3ab^3+b^4$$
$$(a-b)^4 = a^4-4a^3b+6aabb-4ab^3+b^4$$
$$a-b$$
$$a^5-4a^4b+6a^3bb-4aab^3+ab^4$$
$$-a^4b+4a^3bb-6aab^3+4ab^4-b^5$$
$$(a-b)^5 = a^5-5a^4b+10a^3bb-10aab^3+5ab^4-b^5$$

$(a-b)^5$

$$(a-b)^5 = a^5 - 5a^4b + 10a^3bb - 10aab^3 + 5ab^4 - b^5$$
$$a - b$$
$$a^6 - 5a^5b + 10a^4bb - 10a^3b^3 + 5aab^4 - ab^5$$
$$-a^5b + 5a^4bb - 10a^3b^3 + 10aab^4 - 5ab^5 + b^6$$
$$(a-b)^6 = a^6 - 6a^5b + 15a^4bb - 20a^3b^3 + 15aab^4 - 6ab^5 + b^6$$
etc.

Hier bekommen nemlich alle ungerade Potestäten von b das Zeichen — die geraden aber behalten das Zeichen +, wovon der Grund offenbar ist: dann da in der Wurzel — b steht, so gehen die Potestäten davon folgender Gestalt fort: $-b$, $+bb$, $-b^3$, $+b^4$, $-b^5$, $+b^6$ etc. wo die geraden Potestäten alle das Zeichen + die ungeraden aber alle das Zeichen — haben.

343.

Hier kommt aber die wichtige Frage vor, wie ohne diese Rechnung würklich fortzusetzen, alle Potestäten sowohl von $a+b$ als von $a-b$ gefunden werden können? wobey vor allen Dingen zu merken, daß wann man die Potestäten von $a+b$ anzugeben im Stande ist, daraus von selbsten die Potestäten von $a-b$ entstehen, denn man darf nur die Zeichen der geraden Glieder, nemlich des 2ten, 4ten 6ten, 8ten etc. verändern. Es kommt demnach hier darauf an, eine Regul festzusetzen, nach welche eine jegliche Potestät von $a+b$, so hoch dieselbe auch seyn mag, gefunden werden könne, ohne daß man nöthig habe die Rechnung durch alle vorhergehenden anzustellen.

344.

Wann man bey den oben gefundenen Potestäten die Zahlen so einem jeden Gliede vorgesetzt sind, wegläßt, welche Zahlen die Coefficienten genant werden; so bemerkt man in den Gliedern eine schöne Ordnung: indem erstlich eben die Potestät von a vorkommt welche verlangt wird; in den folgenden Gliedern aber werden die Potestäten von a immer um eins niedriger, die Potestäten von b hingegen steigen immer um eins, so daß die Summa der Exponenten von a und b in allen Gliedern gleich viel beträgt. Wann man also die zehnte Potestät von $a+b$ verlangt, so werden die Glieder ohne Coefficienten also fortgehen:

$$a^{10}, a^9b, a^8bb, a^7b^3, a^6b^4, a^5b^5, a^4b^6, a^3b^7, a^2b^8, a^1b^9, b^{10}.$$

345.

Es muß also nur noch gezeigt werden, wie man die darzu gehörigen Coefficienten finde, oder mit was für Zahlen ein jegliches Glied multiplicirt werden soll. Was

Was nun das erste Glied anbetrifft, so ist sein Coefficient immer 1, und bey dem zweyten Gliede ist der Coefficient allemal der Exponent der Potestät selber. Allein für die folgenden läßt sich nicht so leicht eine Ordnung bemerken, inzwischen wann diese Coefficienten nach und nach weiter fortgesetzt werden, so kann man leicht so weit gehen als man will, wie aus folgender Tabelle zu ersehen.

Potest.	I. - - -	Coefficienten 1, 1.
	II. - - - - - -	1, 2, 1,
	III. - - - -	1, 3, 3, 1.
	IV. - - - - -	1, 4, 6, 4, 1.
	V. - - - -	1, 5, 10, 10, 5, 1.
	VI. - - -	1, 6, 15, 20, 15, 6, 1.
	VII. - -	1, 7, 21, 35, 35, 21, 7, 1.
	VIII -	1, 8, 28, 56, 70, 56, 28, 8, 1.
	IX. -	1, 9, 36, 84, 126, 126, 84, 36, 9, 1.
	X. -	1, 10, 45, 120, 210, 252, 210, 120, 45, 10, 1.

etc.

Also wird von $a+b$ die zehnte Potestät seyn:

$$a^{10} + 10a^9b + 45a^8bb + 120a^7b^3 + 210a^6b^4 + 252a^5b^5 + 210a^4b^6 + 120a^3b^7 + 45a^2b^8 + 10ab^9 + b^{10}.$$

346.

Bey diesen Coefficienten ist zu bemerken daß die Summe derselben für jede Potestät die gleiche Potestät von 2 geben müße. Dann man setze $a = 1$, und $b = 1$, so wird ein jedes Glied außer dem Coefficienten $= 1$, so daß nur die Coefficienten zusammen genommen werden müßen. Daher dann die zehnte Potestät seyn wird $(1+1)^{10} = 2^{10} = 1024$.

Eben so verhält es sich auch mit allen übrigen. Also ist für die

Iste $1 + 1 = 2 = 2^1$

IIte $1 + 2 + 1 = 4 = 2^2$

IIIte $1 + 3 + 3 + 1 = 8 = 2^3$

IVte $1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16 = 2^4$

Vte $1 + 5 + 10 + 10 + 5 + 1 = 32 = 2^5$

VIte $1+6+15+20+15+6+1 = 64 = 2^6$

VIIte $1+7+21+35+35+21+7+1 = 128 = 2^7$

etc.

347.

Bey diesen Coefficienten ist noch zu merken daß dieselben von Anfang bis in die Mitte steigen, hernach aber nach eben der Ordnung wieder abnehmen. Bey den geraden steht der größte in der Mitte, bey den ungeraden aber sind zwey mittlere welche die größten und einander gleich sind.

Die Ordnung selbst aber verdient noch genauer in Erwegung gezogen zu werden, damit man dieselben für eine jegliche Potestät finden könne, ohne die vorhergehenden erst zu suchen, wozu hier die Regul gegeben werden soll; der Beweiß aber davon wird in das folgende Capitel ersparet werden.

348.

Um nun die Coefficienten für eine gegebene Potestät als z. E. die siebente zu finden, so schreibe man folgende Brüche der Ordnung nach hinter einander:

$$\frac{7}{1},\ \frac{6}{2},\ \frac{5}{3},\ \frac{4}{4},\ \frac{3}{5},\ \frac{2}{6},\ \frac{1}{7}.$$

wo nemlich die Zehler von dem Exponenten der verlangten Potestät anfangen und immer um eines vermindert werden, die Nenner aber nach der Ordnung der Zahlen 1, 2, 3, 4 etc. fortschreiten. Da nun der erste Coefficient immer eins ist, so giebt der erste Bruch den zweyten Coefficienten; die zwey ersten Brüche mit einander multiplicirt, den dritten, die drey ersten mit einander multiplicirt den vierten, und so fort.

Also

Also ist der erste Coefficient $= 1$, der 2te $= \frac{7}{1} = 7$, der 3te $= \frac{7}{1} \cdot \frac{6}{2} = 21$, der 4te $= \frac{7}{1} \cdot \frac{6}{2} \cdot \frac{5}{3} = 35$, der 5te $= \frac{7}{1} \cdot \frac{6}{2} \cdot \frac{5}{3} \cdot \frac{3}{4} = 35$, der 6te $= \frac{7}{1} \cdot \frac{6}{2} \cdot \frac{5}{3} \cdot \frac{4}{4} \cdot \frac{3}{5} = 21$, der 7te $= 21 \cdot \frac{1}{6} = 7$, der 8te $= 7 \cdot \frac{1}{7} = 1$.

349.

Also für die zweyte Potestät hat man diese Brüche $\frac{2}{1} \cdot \frac{1}{2}$, daher der erste Coefficient $= 1$, der 2te $\frac{2}{1} = 2$ der 3te: $2 \cdot \frac{1}{2} = 1$.

Vor die dritte Potestät hat man diese Brüche, $\frac{3}{1}$; $\frac{2}{2}$; $\frac{1}{3}$; daher der erste Coefficient $= 1$, der 2te $\frac{3}{1} = 3$, der dritte $3 \cdot \frac{2}{2} = 3$, der 4te $\frac{3}{1} \cdot \frac{2}{2} \cdot \frac{1}{3} = 1$.

Vor die vierte Potestät hat man diese Brüche $\frac{4}{1}$; $\frac{3}{2}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{1}{4}$; dahero der erste Coefficient $= 1$, der 2te $\frac{4}{1} = 4$, der 3te $\frac{4}{1} \cdot \frac{3}{2} = 6$, der 4te $\frac{4}{3} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} = 4$, der 5te $\frac{4}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} = 1$.

350.

Diese Regul schaft uns also den Vortheil, daß man nicht nöthig hat die vorhergehenden Coefficienten zu wissen, sondern sogleich für eine jede Potestät die dahin gehörigen Coefficienten finden kann.

Also für die zehnte Potestät schreibt man diese Brüche $\frac{10}{1}, \frac{9}{2}, \frac{8}{3}, \frac{7}{4}, \frac{6}{5}, \frac{5}{6}, \frac{4}{7}, \frac{3}{8}, \frac{2}{9}, \frac{1}{10}$. Dahero bekommt man den ersten Coefficienten $= 1$, den 2ten $= \frac{10}{1} = 10$,

den

den 3ten $= 10 \cdot \frac{9}{2} = 45$, den 4ten $= 45 \cdot \frac{8}{3} = 120$, den 5ten $= 120 \cdot \frac{6}{4} = 210$, den 6ten $= 210 \cdot \frac{6}{5} = 252$, den 7ten $= 252 \cdot \frac{5}{6} = 210$, den 8ten $= 210 \cdot \frac{4}{7} = 120$, den 9ten $= 120 \cdot \frac{3}{8} = 45$, den 10ten $= 45 \cdot \frac{2}{9} = 10$, den 11ten $= 10 \cdot \frac{1}{10} = 1$.

351.

Man kann auch diese Brüche so schlecht weg hinschreiben ohne den Werth derselben zu berechnen, und solcher Gestalt wird es leicht seyn, eine jegliche Potestät von $a + b$, so hoch dieselbe auch seyn mag, hinzuschreiben.

Also wird die 100te Potestät seyn $(a+b)^{100} = a^{100} + \frac{100}{1} a^{99} b + \frac{100}{1} \cdot \frac{99}{2} a^{98} bb + \frac{100}{1} \cdot \frac{99}{2} \cdot \frac{98}{3} a^{97} b^{8} + \frac{100}{1} \cdot \frac{99}{2} \cdot \frac{98}{3} \cdot \frac{97}{4} a^{96} b^{4}$ etc. woraus die Ordnung der folgenden Glieder offenbar zu ersehen.

Capitel

Capitel II.

Von der Versetzung der Buchstaben, als worauf der Beweis der vorigen Regul beruhet.

352.

Wann man auf den Ursprung der obigen Coefficienten zurück gehet, so wird man finden, daß ein jegliches Glied so viel mal vorkommt, als sich die Buchstaben, daraus dasselbe besteht, versetzen laßen: als bey der zweyten Potestät kommt das Glied ab zweymal vor, indem man schreiben kann ab und ba: hingegen kommt daselbst aa nur einmal vor, weil die Ordnung der Buchstaben keine Veränderung leidet. Bey der dritten Potestät kann das Glied aab auf dreyerley Weise geschrieben werden, als aab, aba, baa, und deswegen ist der Coefficient auch 3. Eben so bey der vierten Potestät kann das Glied a^3b, oder aaab auf viererley Weise versetzt werden, als aaab, aaba, abaa, baaa, deswegen ist auch sein Coefficient 4, und das Glied aabb hat 6 zum Coefficienten, weil sechs Versetzungen statt finden, als aabb, abba, baba, abab, bbaa, baab. Und so verhält es sich auch mit allen übrigen.

353.

In der That wann man erweget, daß z. E. die vierte Potestät von einer jeglichen Wurzel, wann dieselbe auch aus mehr als zwey Gliedern besteht, als $(a+b+c+d)^4$ gefunden wird, wann diese vier Factores mit einander multiplicirt werden: I. $a+b+c+d$, II. $a+b+c+d$, III. $a+b+c+d$, und IV. $a+b+c+d$, so muß ein jeder Buchstabe des ersten mit einem jeglichen des andern, und ferner mit einem jeglichen des dritten, und endlich noch mit einem jeglichen des vierten multiplicirt werden, dahero ein jegliches Glied aus 4 Buchstaben bestehen und so viel mal vorkommen wird, als sich desselben Buchstaben unter einander versetzen lassen, woraus sodann sein Coefficient bestimmt wird.

354.

Hier kommt es also darauf an zu wissen, wie viel mal eine gewiße Anzahl Buchstaben unter sich versetzt werden kann, wobey insonderheit darauf zu sehen, ob dieselben Buchstaben unter sich gleich oder ungleich sind. Dann wann alle gleich sind, so findet keine Veränderung statt, weswegen auch die einfache Potestäten als a^2, a^3, a^4 etc. alle 1 zum Coefficienten haben.

355.

Wir wollen erstlich alle Buchstaben ungleich annehmen, und bey zweyen, nemlich ab anfangen, wo offenbar zwey Versetzungen statt finden, als ab, ba.

Hat man drey Buchstaben abc, so ist zu merken, daß ein jeder die erste Stelle haben könne, da dann die zwey übrigen zweymal versetzt werden können. Wann also a zuerst steht, so hat man zwey Versetzungen abc, acb; steht b zuerst so hat man wieder zwey, bac, bca: und eben so viel wann c zuerst steht cab, cba. Dahero in allem die Anzahl der Versetzungen seyn wird $3 \cdot 2 = 6$.

Hat man vier Buchstaben abcd, so kann ein jeder die erste Stelle einnehmen, und in jedem Fall geben die drey übrigen, sechs Versetzungen. Daher in allem die Anzahl der Versetzungen seyn wird $4 \cdot 6 = 24 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$.

Hat man fünf Buchstaben abcde, so kann ein jeder die erste Stelle haben und für jede lassen sich die vier übrigen 24 mal versetzen. Dahero die Anzahl aller Versetzungen seyn wird $5 \cdot 24 = 120 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$.

356.

So groß demnach auch immer die Anzahl der Buchstaben seyn mag, wann dieselben nur alle unter sich sind, so läßt sich die Anzahl aller Versetzungen gantz leicht bestimmen, wie aus folgender Tabelle zu sehen.

Anzahl der Buchst.	Anzahl der Versetz.
I.	1 = 1
II.	2.1 = 2
III.	3.2.1 = 6
IV.	4.3.2.1 = 24
V.	5.4.3.2.1 = 120
VI.	6.5.4.3.2.1 = 720
VII.	7.6.5.4.3.2.1 = 5040
VIII.	8.7.6.5.4.3.2.1 = 40320
IX.	9.8.7.6.5.4.3.2.1 = 362880
X.	10.9.8.7.6.5.4.3.2.1 = 3628800.

357.

Es ist aber wohl zu mercken, daß diese Zahlen nur alsdann statt finden, wann alle Buchstaben unter sich ungleich sind, dann wann zwey oder mehr einander gleich sind, so wird die Anzahl der Versetzungen weit geringer: und wann gar alle einander gleich sind, so hat man nur eine einzige. Wir wollen also sehen wie nach der Anzahl der

glei-

gleichen Buchstaben die obigen Zahlen vermindert werden müßen.

358.

Sind zwey Buchstaben einander gleich so werden die zwey Versetzungen nur auf eine gerechnet. Dahero die obige Zahl auf die Hälfte gebracht oder durch 2 dividirt werden muß. Sind drey Buchstaben einander gleich so werden 6 Versetzungen nur für eine gerechnet: dahero die obigen Zahlen durch 6 = 3.2.1 getheilt werden müssen. Eben so wann vier Buchstaben einander gleich sind, so müssen die obigen Zahlen durch 24 das ist durch 4.3.2.1 getheilt werden u. s. f.

Hieraus kann man nun bestimmen, wie viel mal diese Buchstaben aaa bbc versetzt werden können. Die Anzahl derselben ist sechs, welche, wann sie ungleich wären 6.5.4.3.2.1 Versetzungen zulaßen würden. Weil aber hier a drey mal vorkommt, so muß diese Zahl durch 3.2.1, und weil b zwey mal vorkommt noch ferner durch 2.1 getheilt werden, dahero die Anzahl der Versetzungen seyn wird $= \frac{6.5.4.3.2.1}{3.2.1.2.1} = 5.4.3 = 60$.

359.

359.

Hieraus können wir nun die Coefficienten eines jeden Glieds für eine jede Potestät bestimmen, welches wir z. E. für die siebente Potestät $(a+b)^7$ zeigen wollen. Das erste Glied ist a^7 welches nur einmahl vorkommt, und da in allen übrigen sieben Buchstaben vorkommen, so wäre die Anzahl aller Versetzungen 7. 6. 5. 4. 3. 2. 1 wann sie alle ungleich wären. Da aber im zweyten Glied a^6b, sechs gleiche Buchstaben vorhanden sind, so muß jene Zahl durch 6. 5. 4. 3. 2. 1 getheilt werden, woraus der Coefficient seyn wird $= \frac{7.6.5.4.3.2.1}{6.5.4.3.2.1} = \frac{7}{1}$.

Im dritten Glied a^5bb kommt a fünfmal und b zweymal vor, dahero die obige Zahl erstlich durch 5. 4. 3. 2. 1. und noch durch 2. 1 getheilt werden muß, woraus der Coefficient seyn wird $= \frac{7.6.5.4.3.2.1}{5.4.3.2.1.1.2} = \frac{7.6}{1.2}$.

Im vierten Glied a^4b^3 steht a vier mal und b drey mal; dahero die obige Zahl erstlich durch 4. 3. 2. 1 und hernach noch durch 1. 2. 3 getheilt werden muß: da dann der Coefficient seyn wird $= \frac{7.6.5.4.3.2.1}{4.3.2.1.1.2.3} = \frac{7.6.5}{1.2.3}$.

Eben

Eben so wird für das fünfte Glied a^3b^4 der Coefficient $= \frac{7.6.5.4}{1.2.3.4}$ und so weiter, wodurch die oben gegebene Regul erwiesen wird.

360.

Diese Betrachtung führt uns aber noch weiter und lehret wie man auch von solchen Wurzeln die aus mehr als zwey Theilen bestehen, alle Potestäten finden soll. Wir wollen dies nur mit der dritten Potestät von $a+b+c$ erläutern, worinnen alle mögliche Zusammensetzungen von dreyen Buchstaben als Glieder vorkommen müssen, und ein jedes die Anzahl aller seiner Versetzungen zum Coefficient haben wird: also wird diese dritte Potestät oder $(a+b+c)^3$ seyn.

$$a^3+3aab+3aac+3abb+6abc+3acc+b^3+3bbc+3bcc+c^3.$$

Laßt uns setzen es sey $a=1$, $b=1$, $c=1$, so wird der Cubus von $1+1+1+1$, das ist von 3 seyn:

$$1+3+3+3+6+3+1+3+3+1=27.$$

Setzt man $a=1$, $b=1$ und $c=-1$, so wird der Cubus von $1+1-1$ das ist von 1 seyn:

$$1+3-3+3-6+3+1-3+3-1=1.$$

Capi-

Capitel 12.

Von der Entwickelung der Irrational-Potestäten durch unendliche Reihen.

361.

Da wir gezeigt haben, wie von der Wurzel $a+b$ eine jegliche Potestät gefunden werden soll, der Exponent mag so groß seyn als er nur immer will, so sind wir im Stande auf eine allgemeine Art die Potestät von $a+b$ auszudrucken, wann der Exponent auch unbestimmt, und durch einen Buchstaben n ausgedruckt ist.

Also werden wir nach der oben gegebenen Regul finden

$$(a+b)^n = a^n + \frac{n}{1} a^{n-1}b + \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2} a^{n-2} b^2 + \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3} a^{n-3}b^3 + \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3}\cdot\frac{n-3}{4} a^{n-4} b^4 \text{ ꝛc.}$$

362.

Wollte man die gleiche Potestät von der Wurzel $a-b$ nehmen, so darf man nur die Zeichen des 2ten, 4ten, 6ten, etc. Gliedes verändern, woher man haben wird

$(a-b)^n$

$$(a-b)^n = a^n - \frac{n}{1} a^{n-1}b + \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2} a^{n-2}b^2 - \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3} a^{n-3}b^3 + \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3}\cdot\frac{n-3}{4} a^{n-4}b^4 \text{ etc.}$$

363.

Diese Formeln dienen uns um alle Arten von Wurzeln auszudrücken. Dann da wir gezeigt haben wie die Wurzeln auf gebrochene Exponenten gebracht werden können, und daß $\sqrt[2]{a} = a^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{3}}$ und $\sqrt[4]{a} = a^{\frac{1}{4}}$ u. s. f. so wird auch seyn

$\sqrt[2]{(a+b)} = (a+b)^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt[3]{(a+b)} = (a+b)^{\frac{1}{3}}$ und $\sqrt[4]{(a+b)} = (a+b)^{\frac{1}{4}}$ u. s. f.

dahero um die Quadratwurzel von $a+b$ zu finden haben wir nur nöthig in der obigen allgemeinen Formel für den Exponenten n den Bruch $\frac{1}{2}$ zu setzen, daher wir erstlich für die Coefficienten bekommen werden $\frac{n}{1} = \frac{1}{2}$, $\frac{n-1}{2} = -\frac{1}{4}$, $\frac{n-2}{3} = -\frac{3}{6}$, $\frac{n-3}{4} = -\frac{5}{8}$, $\frac{n-4}{5} = -\frac{7}{10}$, $\frac{n-5}{6} = -\frac{9}{12}$. Hernach ist $a^n = a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$ und $a^{n-1} = \frac{1}{\sqrt{a}}$, $a^{n-2} = \frac{1}{a\sqrt{a}}$, $a^{n-3} = \frac{1}{aa\sqrt{a}}$ etc.

Oder

Oder man kann diese Potestäten von a auch also ausdrücken

$$a^n = \sqrt{a},\ a^{n-1} = \frac{\sqrt{a}}{a},\ a^{n-2} = \frac{a^n}{a^2} = \frac{\sqrt{a}}{a^2},$$

$$a^{n-3} = \frac{a^n}{a^3} = \frac{\sqrt{a}}{a^3},\ a^{n-4} = \frac{a^n}{a^4} = \frac{\sqrt{a}}{a^4}\ \text{etc.}$$

364.

Dieses vorausgesetzt, wird die Quadrat-Wurzel aus $a + b$ folgender gestalt ausgedruckt werden: $\sqrt{(a+b)} =$

$$\sqrt{a} + \frac{1}{2}b\frac{\sqrt{a}}{a} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}bb\frac{a}{aa} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{6}b^3\frac{\sqrt{a}}{a3} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{5}{8}b^4\frac{\sqrt{a}}{a}$$

etc.

365.

Wann nun a eine Quadrat-Zahl ist, so kann $\sqrt{a}$ angegeben, und also die Quadrat-Wurzel aus $a + b$, ohne Wurzel-Zeichen durch eine unendliche Reihe ausgedruckt werden.

Also wann $a = cc$ so ist $\sqrt{a} = c$, und man wird haben $\sqrt{(cc + b)} = c + \frac{1}{2}\cdot\frac{b}{c} - \frac{1}{8}\cdot\frac{b^2}{c7} + \frac{1}{16}\cdot\frac{b3}{c5} - \frac{5}{128}\cdot\frac{b4}{c7}$ etc.

Hierdurch kann man aus einer jeglichen Zahl die Quadrat-Wurzel ausziehen, weil sich eine jede Zahl in zwey Theile zertheilen läßt, davon einer

einer ein Quadrat ist welcher durch cc angedeutet wird. Will man z. E. die Quadrat-Wurzel von 6 haben, so setzt man $6 = 4 + 2$, und da wird $cc = 4$ $c = 2$ und $b = 2$, dahero bekommt man $\sqrt{6} = 2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{16} + \frac{1}{64} - \frac{5}{1024}$ etc. Nimmt man hiervon nur die zwey ersten Glieder, so bekommt man $2\frac{1}{2} = \frac{5}{2}$, wovon das Quadrat $\frac{25}{4}$ nur um $\frac{1}{4}$ grösser ist als 6. Nimmt man drey Glieder so hat man $2\frac{7}{16} = \frac{39}{16}$, wovon das Quadrat $\frac{1521}{256}$ nur um $\frac{15}{256}$ zu klein ist.

366.

Bey eben diesem Exempel, weil $\frac{5}{2}$ der Wahrheit schon sehr nahe kommt, so kann man setzen $6 = \frac{25}{4} - \frac{1}{4}$.

Also wird $cc = \frac{25}{4}$, $c = \frac{5}{2}$, $b = -\frac{1}{4}$. Woraus wir nur die zwey ersten Glieder berechnen wollen, da dann kommt:

$$\sqrt{6} = \frac{5}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{-\frac{1}{4}}{\frac{5}{2}} = \frac{5}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{1}{4}}{\frac{5}{2}} = \frac{5}{2} - \frac{1}{20} = \frac{49}{20},$$ wovon das Quadrat $\frac{2401}{400}$ nur um $\frac{1}{400}$ größer ist als 6.

Setzen wir nun $6 = \frac{2401}{400} - \frac{1}{400}$ so wird $c = \frac{49}{20}$ und $b = -\frac{1}{400}$. Woraus wiederum nur die zwey ersten Glieder genommen geben $\sqrt{6} = \frac{49}{20} + \frac{1}{2}\cdot -\frac{\frac{1}{400}}{\frac{49}{20}} =$

$\frac{49}{20}$

$\frac{49}{20} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{1}{400}}{\frac{49}{20}} = \frac{49}{20} - \frac{1}{1960} = \frac{4801}{1960}$ wovon das Quadrat $= \frac{23049601}{3841600}$. Nun aber ist $6 = \frac{23049600}{3841600}$, also ist der Fehler nur $\frac{1}{3841600}$.

367.

Eben so kann man auch die Cubic-Wurzel aus $a + b$ durch eine unendliche Reihe ausdrücken. Dann da $\sqrt[3]{(a+b)} = (a+b)^{\frac{1}{3}}$ so wird in unserer allgemeinen Formel $n = \frac{1}{3}$, und daher für die Coefficienten $\frac{n}{1} = \frac{1}{3}$, $\frac{n-1}{2} = -\frac{1}{3}$, $\frac{n-2}{3} = -\frac{5}{9}$, $\frac{n-3}{4} = -\frac{2}{3}$, $\frac{n-4}{5} = -\frac{11}{15}$ etc.

Für die Potestäten von a aber ist $a^n = \sqrt[3]{a}$, $a^{n-1} = \frac{\sqrt[3]{a}}{a}$, $a^{n-2} = \frac{\sqrt[3]{a}}{aa}$, $a^{n-3} = \frac{\sqrt[3]{a}}{a^3}$ etc. dahero erhalten wir

$$\sqrt[3]{(a+b)} = \sqrt[3]{a} + \frac{1}{3}.b\frac{\sqrt[3]{a}}{a} - \frac{1}{9}.bb\frac{\sqrt[3]{a}}{aa} + \frac{5}{81}.b^3\frac{\sqrt[3]{a}}{a^3} - \frac{10}{243}.b^4\frac{\sqrt[3]{a}}{a^4}$$ etc.

368.

Wann also a ein Cubus nemlich $a = c^3$ so wird $\sqrt[3]{a} = c$, und also fallen die Wurzel-Zeichen weg. Dahero man haben wird

$$\sqrt[3]{(c^3+b)} = c + \frac{1}{3}.\frac{b}{cc} - \frac{1}{9}.\frac{bb}{c^5} + \frac{5}{81}.\frac{b^3}{c^8} - \frac{10}{243}.\frac{b^4}{c^{11}}$$ etc.

369.

Durch Hülfe dieser Formel kann man nun die Cubic-Wurzel von einer jeglichen Zahl durch die Näherung finden, weil sich eine jede Zahl in zwey Theile zertheilen läßt, wie $c^3 + b$, davon der erste ein Cubus ist.

Also wann man die Cubic-Wurzel von 2 verlangt, so setze man $2 = 1 + 1$, da wird $c = 1$ und $b = 1$, folglich $\sqrt[3]{2} = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{9} + \frac{5}{81}$ etc. wovon die zwey ersten Glieder geben $1\frac{1}{3} = \frac{4}{3}$, dessen Cubus $\frac{64}{27}$ um $\frac{10}{27}$ zu groß ist. Man setze demnach $2 = \frac{64}{27} - \frac{10}{27}$ so wird $c = \frac{4}{3}$ und $b = -\frac{10}{27}$, und dahero

$\sqrt[3]{2} = \frac{4}{3} + \frac{1}{3}.\frac{-\frac{10}{27}}{\frac{16}{9}}$. Diese zwey Glieder geben $\frac{4}{5} - \frac{5}{72} = \frac{91}{72}$, wovon der Cubus ist $\frac{753571}{373248}$. Nun aber ist $2 = \frac{746496}{373248}$ also ist der Fehler $\frac{7075}{373248}$. Und solcher Gestalt kann man, wann man will, immer näher kommen, insonderheit wann man mehr Glieder nehmen will.

Capitel 13.

Von der Entwickelung der negativen Potestäten.

370.

Es ist oben gezeigt worden, daß $\frac{1}{a}$ durch a^{-1} könne ausgedruckt werden, dahero wird auch $\frac{1}{a+b}$ durch $(a+b)^{-1}$ ausgedruckt, also daß der Bruch $\frac{1}{a+b}$ als eine Potestät von $a+b$, deren Exponent -1 ist, kann angesehen werden: woher sich die oben gefundene Reihe für $(a+b)^n$ auch auf diesen Fall erstrecket.

371.

Da nun $\frac{1}{a+b}$ so viel ist als $(a+b)^{-1}$, so setze man in der oben gefundenen Formel $n=-1$, so wird man erstlich für die Coefficienten haben: $\frac{n}{1}=-1$, $\frac{n-1}{2}=-1$, $\frac{n-2}{3}=-1$, $\frac{n-3}{4}=-1$, $\frac{n-4}{5}=-1$ rc.

Hernach für die Potestäten von a

$a^n=a^{-1}=\frac{1}{a}$, $a^{n-1}=\frac{1}{a^2}$, $a^{n-2}=\frac{1}{a^3}$, $a^{n-3}=\frac{1}{a^4}$ etc.

Dahero erhalten wir

$(a+b)^{-1}=\frac{1}{a+b}=\frac{1}{a}-\frac{b}{a^2}+\frac{b^2}{a^3}-\frac{b^3}{a^4}+\frac{b^4}{a^5}-\frac{b}{a^6}$ etc. welche eben diejenige Reihe ist, die schon oben durch die Division gefunden worden.

372.

Da ferner $\frac{1}{(a+b)^2}$ so viel ist als $(a+b)^{-2}$ so kann auch die Formel in eine unendliche Reihe aufgelößt werden.

Man setze nemlich $n=-2$ so hat man erstlich für die Coefficienten $\frac{n}{1}=-\frac{2}{1}$, $\frac{n-1}{2}=-\frac{3}{2}$, $\frac{n-2}{3}=-\frac{4}{3}$, $\frac{n-3}{4}=-\frac{5}{4}$ etc. Und für die Potestäten von a hat man: $a^n=\frac{1}{a^2}$, $a^{n-1}=\frac{1}{a^3}$, $a^{n-2}=\frac{1}{a^4}$, $a^{n-3}=\frac{1}{a^5}$ etc. daher erhalten wir $(a+b)^{-2}=\frac{1}{(a+b)^2}=\frac{1}{a^2}-\frac{2}{1}\cdot\frac{b}{a^3}+\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\frac{b^2}{a^4}$, $-\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\frac{b^3}{a^5}+\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{4}\frac{b^4}{a^6}$ etc. Nun aber ist $\frac{2}{1}=2$, $\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}=3$, $\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}=4$, $\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{4}=5$ rc. Also werden wir haben: $\frac{1}{(a+b)^2}=\frac{1}{a^2}-2\frac{b}{a^3}-3\frac{b^2}{a^4}-4\frac{b^3}{a^5}+5\frac{b^4}{a^6}-6\frac{b^5}{a^7}+7\frac{b^6}{a^8}$ rc.

373.

Setzen wir weiter $n=-3$, so bekommen wir eine Reihe für $(a+b)^{-3}$ das ist für $\frac{1}{(a+b)^3}$. Für die Coefficienten wird also seyn: $\frac{n}{1}=-\frac{3}{1}$, $\frac{n-1}{2}=-\frac{4}{2}$, $\frac{n-2}{3}=-\frac{5}{3}$, $\frac{n-3}{4}=-\frac{6}{4}$ etc. Für die Potestäten von a aber $a^n=\frac{1}{a^5}$,

a^{n-1}

$a^{n-1} = \frac{1}{a^4}$, $a^{n-2} = \frac{1}{a^5}$ etc. Woraus wir erhalten:

$$\frac{1}{(a+b)^3} = \frac{1}{a^3} - \frac{3}{1}\frac{b}{a^4} + \frac{3}{1}\cdot\frac{4}{2}\cdot\frac{b^2}{a^5} - \frac{3}{1}\cdot\frac{4}{2}\cdot\frac{5}{3}\frac{b^3}{a^6} + \frac{3}{1}\cdot\frac{4}{2}\cdot\frac{5}{3}\cdot\frac{6}{4}\frac{b^4}{a^7} \text{ rc.}$$

$$= \frac{1}{a^3} - 3\frac{b}{a^4} + 6\frac{b^2}{a^5} - 10\frac{b^3}{a^6} + 15\frac{b^4}{a^7} - 21\frac{b^5}{a^8} + 28\frac{b^6}{a^9} - 36\frac{b^7}{a^{10}}$$

$+ 45\frac{b^8}{a^{11}}$ etc. Laßt uns ferner setzen $n = -4$ so haben wir für die Coefficienten $\frac{n}{1} = -\frac{4}{1}$, $\frac{n-1}{2} = -\frac{5}{2}$, $\frac{n-2}{3} = -\frac{6}{3}$, $\frac{n-3}{4} = -\frac{7}{4}$ etc.; für die Potestäten von a aber $a^n = \frac{1}{a^4}$, $a^{n-1} = \frac{1}{a^5}$, $a^{n-2} = \frac{1}{a^6}$, $a^{n-3} = \frac{1}{a^7}$, $a^{n-4} = \frac{1}{a^8}$ etc. Woraus gefunden wird:

$$\frac{1}{(a+b)^4} = \frac{1}{a^4} - \frac{4}{1}\frac{b}{a^5} + \frac{4}{1}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{b^2}{a^6} - \frac{4}{1}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{6}{3}\frac{b^3}{a^7} + \frac{4}{1}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{6}{3}\cdot\frac{7}{4}\frac{b^4}{a^8} \text{ rc.}$$

$$= \frac{1}{a^4} - 4\frac{b}{a^5} + 10\frac{b^2}{a^6} - 20\frac{b^3}{a^7} + 35\frac{b^4}{a^8} - 56\frac{b^5}{a^9} \text{ rc.}$$

374.

Hieraus können wir nun sicher schließen, daß man für eine jegliche dergleichen negative Potestät auf eine allgemeine Art haben werde:

$$\frac{1}{(a+b)^m} = \frac{1}{a^m} - \frac{m}{1}\cdot\frac{b}{a^{m+1}} + \frac{m}{1}\cdot\frac{m+1}{2}\frac{b^2}{a^{m+2}}$$

$$- \frac{m}{1}\cdot\frac{m+1}{2}\cdot\frac{m+2}{3}\frac{b^3}{a^{m+3}} \text{ etc.}$$

Aus welcher Formel nun alle dergleichen Brüche in unendliche Reihen verwandelt werden, wo

wo man auch sogar für m Brüche annehmen kann um irrationale Formeln auszudrücken.

375.

Zu mehrerer Erläuterung wollen wir noch folgendes anführen: Da wir gefunden haben, daß

$$\frac{1}{a+b} = \frac{1}{a} - \frac{b}{a^2} + \frac{b^2}{a^3} - \frac{b^3}{a^4} + \frac{b^4}{a^5} - \frac{b^5}{a^6} \text{ etc.}$$

so wollen wir diese Reihe mit $a+b$ multipliciren, weil alsdann die Zahl herauskommen muß 1. Die Multiplication wird aber also zu stehen kommen:

$$\begin{array}{l}
\frac{1}{a} - \frac{b}{a^2} + \frac{b^2}{a^3} - \frac{b^3}{a^4} + \frac{b^4}{a^5} - \frac{b^5}{a^6} \text{ etc.} \\
a + b \\
1 - \frac{b}{a} + \frac{b^2}{aa} - \frac{b^3}{a^3} + \frac{b^4}{a^4} - \frac{b^5}{a^5} \text{ etc.} \\
+ \frac{b}{a} - \frac{b^2}{aa} + \frac{b^3}{a^3} - \frac{b^4}{a^4} + \frac{b^5}{a^5} \text{ etc.} \\
\hline
\end{array}$$

Product 1, wie nothwendig folgen muß.

376.

Da wir ferner gefunden haben $\frac{1}{(a+b)^2} = \frac{1}{aa} - \frac{2b}{a^3} + \frac{3bb}{a^4} - \frac{4b^3}{a^5} + \frac{5b^4}{a^6} - \frac{6b^5}{a^7}$ etc. wann man diese Reihe mit $(a+b)^2$ multiplicirt, so muß ebenfalls 1 herauskommen. Es ist aber $(a+b)^2 = aa + 2ab + bb$ und die Multiplication wird also zu stehen kommen

$$\frac{1}{aa} - \frac{2b}{a^3} + \frac{3bb}{a^4} - \frac{4b^3}{a^5} + \frac{5b^4}{a^6} - \frac{6b^5}{a^7} \text{ etc.}$$

$$aa + 2ab + bb$$

$$1 - \frac{2b}{a} + \frac{3bb}{a^2} - \frac{4b^3}{a^3} + \frac{5b^4}{a^4} - \frac{6b^5}{a^4} \text{ etc.}$$

$$+ \frac{2b}{a} - \frac{2bb}{a^2} + \frac{6b^3}{a^3} - \frac{8b^4}{a^4} + \frac{10b^5}{a^5} \text{ etc.}$$

$$+ \frac{bb}{a^2} - \frac{2b^3}{a^3} + \frac{3b^4}{a^4} - \frac{4b^5}{a^5} \text{ etc.}$$

Product 1, wie die Natur der Sache erfordert.

377.

Sollte man aber diese für $\frac{1}{(a+b)^2}$ gefundene Reihe nur mit $a+b$ multipliciren, so müste $\frac{1}{a+b}$ herauskommen, oder die für diesen Bruch oben gefundene Reihe $\frac{1}{a} - \frac{b}{a^2} + \frac{b^2}{a^3} - \frac{b^3}{a^4} + \frac{b^4}{a^5} - \frac{b^5}{a^6}$ etc. welches auch die folgende Multiplication bestätigen wird.

$$\frac{1}{aa} - \frac{2b}{a^3} + \frac{3bb}{a^4} - \frac{4b^3}{a^5} + \frac{5b^4}{a^6} \text{ etc.}$$

$$a + b$$

$$\frac{1}{a} - \frac{2b}{a^2} + \frac{3bb}{a^3} - \frac{4b^3}{a^4} + \frac{5b^4}{a^5} \text{ etc.}$$

$$+ \frac{b}{a^2} - \frac{2bb}{a^3} + \frac{3b^3}{a^4} - \frac{4b^4}{a^5} \text{ etc.}$$

$$\frac{1}{a} - \frac{b}{a^2} + \frac{b^2}{a^3} - \frac{b^3}{a^4} + \frac{b^4}{a^5} \text{ etc.}$$

Ende des zweyten Abschnitts.

Des

Ersten Theils

dritter Abschnitt.

Von den Verhältnissen und Proportionen.

Capitel 1.
Von der Arithmetischen Verhältniß, oder dem Unterschied zwischen zweyen Zahlen.

378.

Entweder sind zwey Größen einander gleich, oder einander ungleich. Im letztern Fall ist eine größer als die andere, und wann man nach ihrer Ungleichheit frägt, so kann dies auf zweyerley Weise geschehen, denn entweder frägt man, um wie viel die eine größer sey als die andere; oder man frägt wie viel mal die eine größer sey als die andere; beyderley Bestimmung wird ein Verhältniß genannt, und das erste pflegt ein Arithmetisches Verhältniß, das letztere aber ein Geometrisches genannt zu werden. Welche Benennungen aber mit der Sache selbst keine Gemeinschaft haben, sondern willkührlich eingeführt worden sind.

379.

Es versteht sich hier von selbsten, daß die Größen einerley Art seyn müßen, weil sonsten nichts

von

von ihrer Gleichheit oder Ungleichheit bestimmt werden kann. Dann es würde ungereimt seyn, wenn einer z. E. fragen wollte, ob 2 Pfund und 3 Ellen einander gleich oder ungleich wären? Dahero ist hier allenthalben von Größen einerley Art die Rede, und da sich dieselbe immer durch Zahlen anzeigen lassen, so wird, wie schon anfänglich gemeldet worden, hier nur von bloßen Zahlen gehandelt.

380.

Wann also von zwey Zahlen gefragt wird um wie viel die eine größer sey, als die andere, so wird durch die Antwort ihr Arithmetisches Verhältniß bestimmt. Da nun solches geschiehet, wann man den Unterschied zwischen den beyden Zahlen anzeigt, so ist ein Arithmetisches Verhältniß nichts anders als der Unterschied zwischen zweyen Zahlen. Welches letztere Wort (Unterschied) füglicher gebraucht wird, so daß das Wort Verhältniß nur allein bey den so genannten Geometrischen Verhältnissen beybehalten wird.

381.

Der Unterschied zwischen zweyen Zahlen wird aber gefunden, wann man die kleinere von der grö-

größern subtrahirt, und dadurch erhält man die Antwort auf die Frage: um wie viel die eine größer sey als die andere. Wann also die beyden Zahlen einander gleich sind, so ist der Unterschied nichts oder Null; und wann man frägt um wie viel die eine größer sey als die andere: so muß man antworten, um nichts. Da z. E. $6 = 2.3$, so ist der Unterschied zwischen 6 und 2.3 nichts.

382.

Sind aber die beyden Zahlen ungleich als 5 und 3 und man frägt: um wie viel 5 größer sey als 3, so ist die Antwort, um 2; welche gefunden wird, wann man 3 von 5 subtrahiret. Eben so ist 15 um 5 größer als 10, und 20 ist um 8 größer als 12.

383.

Hier kommen also drey Sachen zu betrachten vor; erstlich die größere Zahl, zweytens die kleinere, und drittens der Unterschied, welche unter sich eine solche Verbindung haben, daß man immer aus zwey derselben die dritte finden kann. Es sey die größere $= a$ die kleinere $= b$ und der

Unter-

Unterschied, welcher auch die Differenz genannt wird, $= d$: so wird der Unterschied d gefunden, wann man b von a subtrahirt, also daß $d = a - b$; woraus erhellet, wie man, wann a und b gegeben sind, d finden soll.

384.

Wann aber die kleinere Zahl b nebst dem Unterschied d gegeben ist, so wird die grössere daraus gefunden, wann man den Unterschied zu der kleinern Zahl addirt, daher bekommt man die grössere $a = b + d$. Dann wann man von $b + d$ die kleinere b abzieht, so bleibt übrig d, welches der vorgegebene Unterschied ist. Gesetzt die kleinere Zahl sey 12 und der Unterschied 8, so wird die grössere seyn $= 20$.

385.

Wann aber die grössere Zahl a nebst dem Unterschied d gegeben ist, so wird die kleinere b gefunden, wann man den Unterschied von der grösseren Zahl subtrahirt. Dahero bekommt man $b = a - d$. Dann wann ich diese Zahl $a - d$ von der grösseren a subtrahire, so bleibt übrig d, welches der gegebene Unterschied ist.

386.

386.

Diese drey Zahlen a, b, d sind also dergestalt mit einander verbunden, daß man daraus die drey folgenden Bestimmungen erhält: 1stens hat man $d = a - b$, 2tens $a = b + d$ und 3tens $b = a - d$, und wann von diesen drey Vergleichungen eine wahr ist, so sind auch die beyden andern nothwendig wahr. Wann dahero überhaupt $z = x + y$, so ist nothwendig $y = z - x$ und $x = z - y$.

387.

Bey einem solchen Arithmetischen Verhältniß ist zu mercken, daß wann zu den beyden Zahlen a und b eine beliebige Zahl c entweder addirt, oder davon subtrahirt wird, der Unterschied eben derselbe bleibet. Also wann d der Unterschied ist zwischen a und b so ist auch d der Unterschied zwischen den beyden Zahlen $a + c$ und $b + c$, und auch zwischen $a - c$ und $b - c$. Da zum Exempel zwischen diesen Zahlen 20 und 12 der Unterschied 8 ist, so bleibt auch dieser Unterschied, wann man zu denselben Zahlen 20 und 12 eine Zahl nach Belieben entweder addirt oder subtrahirt.

388.

388.

Der Beweis hievon ist offenbar. Dann wann $a - b = d$ so ist auch $(a+c) - (b+c) = d$. Eben so wird auch seyn $(a-c) - (b-c) = d$.

389.

Wann die beyden Zahlen a und b verdop-doppelt werden, so wird auch der Unterschied zweymal so groß. Wann also $a - b = d$ so wird seyn $2a - 2b = 2d$; und allgemein wird man haben $na - nb = nd$, was man auch immer vor eine Zahl für n annimmt.

Capitel 2.

Von den Arithmetischen Proportionen.

390.

Wann zwey Arithmetische Verhältnisse einander gleich sind, so wird die Gleichheit derselben eine Arithmetische Proportion genannt.

Also wann $a - b = d$ und auch $p - q = d$, so daß der Unterschied zwischen den Zahlen p und q eben so groß ist, als zwischen den Zahlen a und b; so machen diese vier Zahlen eine Arithmetische Proportion aus, welche also geschrieben wird $a-b = p-q$, als wodurch deutlich angezeigt wird, daß der Unterschied zwischen a und b eben so groß sey als zwischen p und q.

391.

Eine Arithmetische Proportion besteht demnach aus vier Gliedern, welche so beschaffen seyn müssen, daß wann man das zweyte von dem ersten subtrahirt, eben so viel übrig bleibt, als wann man das vierte von dem dritten subtrahirt. Also machen diese Zahlen 12, 7, 9, 4, eine Arithmetische Proportion aus, weil $12 - 7 = 9 - 4$.

392.

Wann man eine Arithmetische Proportion hat, als $a - b = p - q$, so laßen sich darinn das 2te und 3te Glied verwechseln und es wird auch seyn $a-p = b-q$. Dann da $a-b = p-q$ so addire man erstlich beiderseits b und da hat man $a = b+p-q$. Hernach subtrahire man beiderseits p, so bekommt man $a-p = b-q$. Da also $12 - 7 = 9 - 4$ so ist auch $12 - 9 = 7 - 4$.

393.

393.

In einer jeglichlichen Arithmetischen Proportion kann man auch das erste Glied mit dem zweyten und zugleich das dritte mit dem vierten verwechseln. Dann wann $a-b=p-q$ so ist auch $b-a=q-p$. Dann $b-a$ ist das Negative von $a-b$ und eben so ist auch $q-p$ das Negative von $p-q$. Da nun $12-7=9-4$ so ist auch $7-12=4-9$.

394.

Insonderheit aber ist bey einer jeglichen Arithmetischen Proportion diese Haupt-Eigenschaft wohl zu bemerken, daß die Summa des zweyten und dritten Glieds immer eben so groß sey, als die Summa des ersten und vierten Glieds. Welches auch also ausgesprochen wird daß die Summa der mittlern Glieder so groß sey als die Summa der äußern. Also da $12-7=9-4$ so ist $7+9=12+4$, dann jedes macht 16.

395.

Um diese Haupt-Eigenschaft zu beweisen, so sey $a-b \;\; p-q$: man addire beiderseits $b+q$ so bekommt man $a+q=b+p$, das ist, die Summa des ersten und vierten ist gleich der Summa des zweyten und

und dritten. Hinwiederum auch wann vier Zahlen als a, b, p, q, so beschaffen sind, daß die Summa der zweyten und dritten so groß ist als die Summa der ersten und vierten, nemlich daß $b+p=a+q$, so sind dieselben Zahlen gewiß in einer Arithmetischen Proportion und es wird seyn $a-b=p-q$. Dann da $a+q=b+p$, so subtrahire man beiderseits $b+q$, und da bekommt man $a-b=p-q$.

Da nun die Zahlen 18, 13, 15, 10, so beschaffen sind, daß die Summa der mittlern $13+15=28$ der Summe der äußern $18+10=28$ gleich sind, so sind dieselben auch gewiß in einer Arithmetischen Proportion und folglich $18-13=15-10$.

396.

Aus dieser Eigenschaft kann man leicht folgende Frage auflösen: Wann von einer Arithmetischen Proportion die drey ersten Glieder gegeben sind, wie man daraus das vierte finden soll. Es seyn die drey ersten Glieder a, b, p und für das vierte, so gefunden werden soll, schreibe man q, so wird man haben $a+q=b+p$. Nun subtrahire man beiderseits a, so bekommt man $q=b+p-a$. Also wird das vierte Glied gefunden, wann man das zweite und dritte zusammen addirt und von der Summa ma das erste subtrahirt. Es seyn z. E. 19, 28, 13 die drey ersten Glieder, so ist die Summa des zweyten und dritten = 41 davon das erste 19 subtrahirt, bleibt 22 für das vierte Glied, und die Arithmetische Porportion wird seyn 19 − 28 = 13 − 22, oder 28 − 19 = 22 − 13, oder 28 − 22 = 19 − 13.

397.

Wann in einer Arithmetischen Proportion das zweyte Glied dem dritten gleich ist, so hat man nur drey Zahlen, welche also beschaffen sind, daß die erste weniger der andern so groß ist als die andre weniger der dritten, oder daß der Unterschied zwischen der ersten und andern so groß ist, als der Unterschied zwischen der andern und dritten. Solche drey Zahlen sind 19, 15, 11, weil 19 − 15 = 15 − 11.

39 .

Solche drey Zahlen schreiten in einer Arithmetischen Progression fort, welche entweder steigt, wann die zweite um so viel die erste übersteigt, als die dritte die andere, wie in diesem Exempel 4, 7, 10, oder fällt wann die Zahlen um gleich viel kleiner werden als 9, 5, 1.

399.

Es seyn die Zahlen a, b, c in einer Arithmetischen Progression, so muß seyn a − b = b − c woraus folget, nach der Gleichheit der mittlern und der äußern Summa 2b = a + c. Nimmt man beiderseits a weg so bekommt man c = 2b − a.

400.

Wann also von einer Arithmetischen Progression die zwey ersten Glieder gegeben sind als a, b so wird daraus das dritte gefunden, wann man das zweyte verdoppelt und davon das erste subtrahirt. Es seyn 1 und 3 die zwey ersten Glieder in einer Arithmetischen Progression, so wird das dritte seyn = 2. 3 − 1 = 5, und aus den Zahlen 1, 3, 5 hat man diese Proportion 1 − 3 = 3 − 5.

401.

Man kann nach dieser Regul weiter fortschreiten und wie man aus dem ersten und zweiten das dritte gefunden hat, so kann man aus dem zweyten und dritten das vierte u. s. f. finden, und solcher Gestalt die Arithmetische Progression fortsetzen so weit man will. Es sey a das erste Glied und b das zweite, so wird das dritte = 2b − a; das vierte = 4b − 2a − b = 3b − 2a; das fünfte 6b − 4a − 2b + a = 4b − 3a; das sechste = 8b − 6a − 3b + 2a = 5b − 4a; das siebente = 10b − 8a − 4b + 3a = 6b − 5a etc.

Capi=

Capitel 3.

Von den Arithmetischen Progressionen.

402.

Eine Reihe Zahlen, welche immer um gleich viel wachsen oder abnehmen, aus so viel Gliedern dieselbe auch immer bestehen mag, wird eine Arithmetische Progression genannt.

Also machen die natürlichen Zahlen der Ordnung nach geschrieben, als 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 etc. eine Arithmetische Progression weil dieselben immer um eins steigen und diese Reihe als 25, 22, 19, 16, 13, 10, 7, 4, 1 etc. ist auch eine Arithmetische Progression, weil diese Zahlen immer um 3 abnehmen.

403.

Die Zahl um welche die Glieder einer Arithmetischen Progression größer oder kleiner werden, wird die Differenz oder der Unterschied genannt. Wann also das erste Glied nebst der Differenz gegeben ist, so kann man die Arithmetische Progression so weit man will fortsetzen. Es sey z. E. das

das erste Glied $= 2$ und die Differenz $= 3$ so wird die steigende Progression seyn:

2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29 etc.

wo ein jedes Glied gefunden wird, wann man zu dem vorhergehenden die Differenz addirt.

404.

Man pflegt über die Glieder einer solchen Arithmetischen Progression die natürlichen Zahlen 1, 2, 3, 4 etc. zu schreiben, damit man sogleich sehen könne das wie vielte Glied ein jegliches sey, und die also darüber geschriebene Zahlen werden die Zeiger genannt; das obige Exempel kommt daher also zu stehen:

Zeiger	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10.
Arith. Prog.	2,	5,	8,	11,	14,	17,	20,	23,	26,	29 etc.

woraus man sieht das 29 das zehnte Glied sey.

405.

Es sey a das erste Glied und d die Differenz, so wird die Arithmetische Progression also zu stehen kommen:

$$\begin{array}{cccccccc} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8, \\ a, & a+d, & a+2d, & a+3d, & a+4d, & a+5d, & a+6d, & a+7d \text{ etc.} \end{array}$$

woraus sogleich ein jegliches Glied gefunden werden kann, ohne daß man nöthig habe alle vorhergehende zu wissen, und dieses bloß allein aus dem ersten Gliede a und der Differenz d. Also wird z. E. das 10te Glied seyn $= a + 9d$, das 100te $= a + 99d$, und auf eine allgemeine Art wird das nte Glied seyn $a + (n-1)d$.

406.

Wann die Arithmetische Progression irgendwo abgebrochen wird, so hat man insonderheit das erste Glied und das letzte zu bemercken, und der Zeiger des letzten wird die Anzahl der Glieder anzeigen. Wenn also das erste Glied $= a$, die Differenz $= d$ und die Anzahl der Glieder $= n$, so ist das letzte Glied $= a + (n-1)d$. Dasselbe wird also gefunden wann man die Differenz mit 1 weniger als die Anzahl der Glieder multiplicirt, und dazu das erste Glied addirt. Man habe z. E. eine Arithmetische Progression von 100 Gliedern, wovon das erste $= 4$ und die Differenz $= 3$, so wird das letzte Glied seyn $99 \cdot 3 + 4 = 301$.

407.

Hat man das erste Glied $= a$ und das letzte $= z$ nebst der Anzahl der Glieder $= n$ so kann man daraus die Differenz $= d$ finden. Dann das letzte Glied ist

ist $z = a + (n-1)d$, so subtrahire man beiderseits a so hat man $z - a = (n-1)d$. Wann man also von dem letzten Glied das erste subtrahirt, so hat man die Differenz mit 1 weniger als die Anzahl der Glieder multiplicirt; oder $z - a$ ist das Product von $(n-1)$ in d. Man darf also nur $z - a$ durch $n - 1$ dividiren, so bekommt man die Differenz $d = \frac{z-a}{n-1}$, woraus diese Regul entspringt. Man subtrahirt vom letzten Glied das erste, den Rest theilt man durch die Anzahl der Glieder weniger eins, so bekommt man die Differenz: woraus man hernach die ganze Progression hinsetzen kann.

408.

Es hat z. E. einer eine Arithmetische Progression von 9 Gliedern, wovon das erste Glied 2 und das letzte 26, von welcher die Differenz gesucht werden soll. Man muß also das erste Glied 2 von dem letzten 26 subtrahiren und den Rest 24 durch $9 - 1$, das ist durch 8 dividiren, so bekommt man die Differenz $= 3$, und die Progression selbst wird seyn:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.
2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26.

 Um

Um ein ander Exempel zu geben; so sey das erste Glied 1, das letzte 2, und die Anzahl der Glieder 10, wovon die Arithmetische Progression verlangt wird. Hier bekommt man also zur Differenz $\frac{2-1}{10-1} = \frac{1}{9}$; woraus die verlangte Progression seyn wird:

1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10.
1,	$1\frac{1}{9}$,	$1\frac{2}{9}$,	$1\frac{3}{9}$,	$1\frac{4}{9}$,	$1\frac{5}{9}$,	$1\frac{6}{9}$,	$1\frac{7}{9}$,	$1\frac{8}{9}$,	2.

Noch ein Exempel. Es sey das erste Glied $2\frac{1}{3}$, das letzte $12\frac{1}{2}$ und die Anzahl der Glieder 7. Hieraus erhält man die Differenz $\frac{12\frac{1}{2} - 2\frac{1}{3}}{7-1} = \frac{10\frac{1}{6}}{6} = \frac{61}{36} = 1\frac{25}{36}$; folglich wird die Progression seyn:

1,	2,	3,	4,	5,	6,	7.
$2\frac{1}{3}$,	$4\frac{1}{36}$,	$5\frac{13}{18}$,	$7\frac{5}{12}$,	$9\frac{1}{9}$,	$10\frac{29}{36}$,	$12\frac{1}{2}$.

409.

Wann ferner das erste Glied a und das letzte z, sammt der Differenz d gegeben ist, so kann man daraus die Anzahl der Glieder n finden. Dann da $z-a = (n-1)d$, so dividire man beiderseits mit d, und da bekommt man $\frac{z-a}{d} = n-1$. Da nun n um 1 größer ist als $n-1$, so wird $n = \frac{z-a}{d} + 1$; folglich findet man die Anzahl der Glieder, wann man den Unterschied zwischen dem ersten und letzten

Glied

Glied $z - a$ durch die Differenz dividiret und zum Quotient $\frac{z-a}{d}$ noch eins addirt.

Es sey z. E. das erste Glied $= 4$, das letzte $= 100$, und die Differenz $= 12$, so wird die Anzahl der Glieder seyn $\frac{100-4}{12} + 1 = 9$, und diese neun Glieder sind folgende:

1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9.
4,	16,	28,	40,	52,	64,	76,	88,	100.

Es sey das erste Glied $= 2$, das letzte $= 6$, und die Differenz $= 1\frac{1}{3}$ so wird die Anzahl der Glieder seyn $\frac{4}{1\frac{1}{3}} + 1 = 4$, und diese vier Glieder sind:

1,	2,	3,	4.
2,	$3\frac{1}{3}$,	$4\frac{2}{3}$,	6.

Es sey ferner das erste Glied $= 3\frac{1}{3}$, das letzte $= 7\frac{2}{3}$, und die Differenz $= 1\frac{4}{9}$, so wird die Anzahl der Glieder $= \frac{7\frac{2}{3} - 3\frac{1}{3}}{1\frac{4}{9}} + 1 = 4$, und diese vier Glieder sind:

1,	2,	3,	4.
$3\frac{1}{3}$,	$4\frac{7}{9}$,	$6\frac{2}{9}$,	$7\frac{2}{3}$.

410.

Es ist aber hier wohl zu mercken, daß die Anzahl der Glieder nothwendig eine gantze Zahl

seyn

seyn muß. Wann man also bey obigem Exempel für n einen Bruch gefunden hätte, so wäre die Frage ungereimt gewesen.

Wann folglich für $\frac{z-a}{d}$ keine ganze Zahl gefunden würde so lies sich diese Frage nicht auflösen, und man müßte antworten, daß die Frage unmöglich wäre. Dahero muß sich bei dergleichen Fragen die Zahl $z - a$ durch d theilen lassen.

411.

Bei einer jeden Arithmetischen Progression kommen also folgende vier Stücke zu betrachten vor:
I. das erste Glied a, II. das letzte Glied z,
III. die Differenz d, IV. die Anzahl der Glieder n,
welche so beschaffen sind, daß wann drey derselben bekannt, das vierte daraus bestimmt werden kann, als:
I. Wann a, d u. n bekannt sind, so hat man $z = a + (n-1)d$.
II. Wann z, d u. n bekannt sind, so hat man $a = z - (n-1)d$.
III. Wann a, z u. n bekannt sind, so hat man $d = \frac{z-a}{n-1}$.
IV. Wann a, z u. d bekannt sind, so hat man $n = \frac{z-a}{d} + 1$.

Capi-

Capitel 4.
Von der Summation der Arithmetischen Progressionen.

412.

Wann eine Arithmetische Progression vorgelegt ist, so pflegt man auch die Summa derselben zu suchen, welche gefunden wird, wann man alle Glieder zusammen addirt. Da nun diese Addition sehr weitläuftig seyn würde wann die Progression aus sehr viel Gliedern besteht, so kann eine Regul gegeben werden, durch deren Hülfe diese Summa ganz leicht gefunden wird.

413.

Wir wollen erstlich eine solche bestimmte Progression betrachten, wo das erste Glied $= 2$, die Differenz $= 3$, das letzte Glied $= 29$, und die Anzahl der Glieder $= 10$ ist

1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10.
2,	5,	8,	11,	14,	17,	20,	23,	26,	29.

Hier ist nun die Summa des ersten und letzten Gliedes $= 31$, die Summa des zweyten und

letzten

letzten ohne eins $= 31$, die Summa des dritten und letzten ohne zwey $= 31$, die Summa des vierten und letzten ohne drey $= 31$, u. s. f., woraus man sieht, daß immer zwey Glieder die von dem ersten und letzten gleich weit entfernt sind, zusammen genommen, eben so viel ausmachen, als das erste und letzte zusammen.

414.

Der Grund davon fällt auch sogleich in die Augen. Dann wann das erste Glied gesetzt wird $= a$ und das letzte $= z$, die Differenz aber $= d$, so ist die Summa des ersten und letzten $= a + z$. Hernach ist das zweyte Glied $a + d$ und das letzte ohne eins $= z - d$, welche zusammen genommen machen $a + z$. Ferner ist das dritte Glied $a + 2d$ und das letzte ohne zwey $= z - 2d$, welche zusammen betragen $a + z$. Woraus die Wahrheit des obigen Satzes erhellet.

415.

Um nun die Summa der obigen Progression zu finden, nemlich von $2 + 5 + 8 + 11 + 14 + 17 + 20 + 23 + 26 + 29$, so schreibe man darunter eben diese Progression rückwärts, und addire Glied vor Glied wie folget:

$$\begin{array}{l} 2 + 5 + 8 + 11 + 14 + 17 + 20 + 23 + 26 + 29 \\ 29 + 26 + 23 + 20 + 17 + 14 + 11 + 8 + 5 + 2 \\ \hline 31 + 31 + 31 + 31 + 31 + 31 + 31 + 31 + 31 + 31 \end{array}$$

welche gefundene und aus lauter gleichen Gliedern bestehende Reihe offenbar zweymal so groß ist als die Summa unserer Progression. Die Anzahl dieser gleichen Glieder ist 10, eben wie in der Progression, und also ist derselben Summa $= 10.31 = 310$. Da nun diese Summa zweymal so groß ist, als die Summa der Arithmetischen Progression, so wird die rechte Summa seyn $= 155$.

416.

Wann man auf diese Art mit einer jeglichen Arithmetischen Progression verfährt, wovon das erste Glied $= a$, das letzte $= z$, und die Anzahl der Glieder $= n$, indem man eben dieselbe Progression rückwärts darunter schreibt und Glied vor Glied addirt, so bekommt man für jedes Glied $a + z$, deren Anzahl $= n$, folglich ist die Summa derselben $= n(a + z)$ welche zweymal so groß ist, als die Summa der Progression; dahero ist die Summa der Arithmetischen Progression selbst $= \frac{n(a+z)}{2}$.

417.

Hieraus erlangen wir nun diese leichte Regul um die Summa einer jeglichen Arithmetischen Progression zu finden:

Man multiplcire die Summa des ersten und letzten Gliedes mit der Anzahl der Glieder, so wird die Hälfte dieses Products die Summa der ganzen Progression anzeigen.

Oder welches dem gleich ist: man multiplicire die Summa des ersten und letzten Gliedes mit der halben Anzahl der Glieder.

Oder auch man multiplicire die halbe Summa des ersten und letzten Gliedes mit der ganzen Anzahl der Glieder, so bekommt man die Summa der ganzen Progression.

418.

Es ist nöthig diese Regul mit einigen Exempeln zu erläutern. Es sey demnach gegen die Progression der natürlichen Zahlen 1, 2, 3, bis 100, von welchen die Summa gesucht werden soll. Diese wird nach der ersten Regul seyn $\frac{100 \cdot 101}{2} = 50 \cdot 101 = 5050$.

Es wird ferner gefragt, wie viel Schläge eine Schlag-Uhr in 12 Stunden thue? zu diesem Ende müßen die Zahlen 1, 2, 3 bis 12 zusammen addirt werden, die Summa wird also seyn $\frac{12 \cdot 13}{2} = 6 \cdot 13 = 78$.

Wollte man die Summa von eben dieser Reihe bis 1000 fortgesetzt wissen, so würde dieselbe herauskommen 500500; bis 10000 fortgesetzt, wird dieselbe seyn $= 50005000$.

419.

Frage. Einer kauft ein Pferd mit dieser Bedingung: für den ersten Hufnagel zahlt er 5 Copeken, für den zweyten 8, für den dritten 11, und immer 3 Copeken mehr für einen jeden folgenden. Es sind aber in allem 32 Nägel, wie theuer kommt ihm das Pferd zu stehen?

Hier wird also die Summa von einer Arithmetischen Progression, deren erstes Glied 5, die Differenz $= 3$, und die Anzahl der Glieder $= 32$ ist, gesuchet.

Hier muß nun zuförderst das letzte Glied gesucht werden, welches nach obiger Regul gefunden wird $= 5 + 31 \cdot 3 = 98$, und hieraus ergiebt sich die gesuchte

suchte Summa $\frac{103 \cdot 32}{2} = 103 \cdot 16$; also kommt das Pferd 1648 Copeken, oder 16 Rbl. 48 Cop. zu stehen.

420.

Es sey auf eine allgemeine Art das erste Glied $= a$, die Differenz $= d$, und die Anzahl der Glieder $= n$, woraus die Summa der ganzen Progression gefunden werden soll: da nun das letzte Glied seyn muß $= a + (n-1)d$, so ist die Summa des ersten und letzten Gliedes $= 2a + (n-1)d$, welches mit der Anzahl der Glieder n multiplicirt, giebt $2na + n(n-1)d$, daher die gesuchte Summa seyn wird $= na + \frac{n(n-1)}{2}d$.

Nach dieser Formul, weil in dem obigen Exempel $a=5$, $d=3$, und $n=32$ war, so erhält man die Summa $5 \cdot 32 + \frac{31 \cdot 32 \cdot 3}{2} = 160 + 1488 = 1648$ wie vorher.

421.

Wann die Reihe der natürlichen Zahlen 1, 2, 3 und so fort bis n zusammen addirt werden soll, so hat man um diese Summa zu finden, das erste Glied $= 1$, das letzte $= n$ und die Anzahl der Glieder $= n$, woraus die Summa gefunden wird $\frac{nn+n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$.

Setzt man $n = 1766$, so wird die Summa aller Zahlen von 1 bis 1766 seyn $= 883 \cdot 1767 = 1560261$.

422.

Es sey gegeben die Progression der ungeraden Zahlen 1, 3, 5, 7 rc. welche bis auf n Glieder fortgesetzt sind, wovon die Summa verlangt wird:

Hier ist nun das erste Glied $= 1$, die Differenz $= 2$, die Anzahl der Glieder $= n$; daraus wird das letzte Glied seyn $1 + (n-1)2 = 2n - 1$, daraus erhält man die gesuchte Summa $= nn$.

Folglich darf man nur die Anzahl der Glieder mit sich selbst multiplieiren. Man mag also von dieser Progression so viel Glieder zusammen addiren als man will, so ist die Summa immer ein Quadrat, nemlich das Quadrat der Anzahl der Glieder, wie aus folgendem zu ersehen.

Glied.	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10	etc.
Progr.	1,	3,	5,	7,	9,	11,	13,	15,	17,	19	etc.
Sum.	1,	4,	9,	16,	25,	36,	49,	64,	81,	100	etc.

423.

Es sey ferner das erste Glied $= 1$, die Differenz $= 3$ und die Anzahl der Glieder $= n$, so hat man diese

diese Progression 1, 4, 7, 10 ꝛc. wovon das letzte Glied seyn wird: $1 + (n-1)3 = 3n - 2$; daher die Summa des ersten und letzten Gliedes $= 3n - 1$; folglich die Summa der Progression $\frac{n(3n-1)}{2} = \frac{3nn-n}{2}$. Nimmt man $n = 20$, so ist die Summa $= 10 . 59 = 590$.

424.

Es sey das erste Glied $= 1$, die Differenz $= d$, und die Anzahl der Glieder $= n$, so wird das letzte Glied seyn $1 + (n-1)d$. Hierzu das erste addirt, giebt $2 + (n-1)d$, mit der Anzahl der Glieder multiplicirt $2n + n(n-1)d$, woher die Summa der Progression seyn wird $n + \frac{n(n-1)d}{2}$.

Hier wollen wir folgendes Täfelchen anhängen:

wann $d = 1$, so ist die Summa $n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{nn+n}{2}$

$d = 2$ - - - - $n + \frac{2n(n-1)}{2} = nn$

$d = 3$ - - - - $n + \frac{3n(n-1)}{2} = \frac{3nn-n}{2}$

$d = 4$ - - - - $n + \frac{4n(n-1)}{2} = 2nn-n$

$d = 5$ - - - - $n + \frac{5n(n-1)}{2} = \frac{5nn-3n}{2}$

$d = 6$ - - - - $n + \frac{6n(n-1)}{2} = 3nn-2n$

$d = 7$ - - - - $n + \frac{7n(n-1)}{2} = \frac{7nn-5n}{2}$

wann

wann $d = 8$ so ist die Summa $n + \frac{8n(n-1)}{2} = 4nn - 3n$

$d = 9$ - - - - $n + \frac{9n(n-1)}{2} = \frac{9nn-7n}{2}$

$d = 10$ - - - $n + \frac{10n(n-1)}{2} = 5nn-4n$

etc.

Capitel 5.

Von den figurirten oder vieleckigten Zahlen.

425.

Die Summation der Arithmetischen Progressionen, welche von 1 anfangen und deren Differenz entweder 1, 2 oder 3, oder eine andere beliebige ganze Zahl ist, leitet uns auf die Lehre von den vieleckigten Zahlen, welche entstehen, wann man einige Glieder von solchen Progressionen zusammen addirt.

426.

Setzt man die Differenz $= 1$, indem das erste Glied beständig 1 ist, so entsteht daher diese Arithmetische Progression $= 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12$ ꝛc.

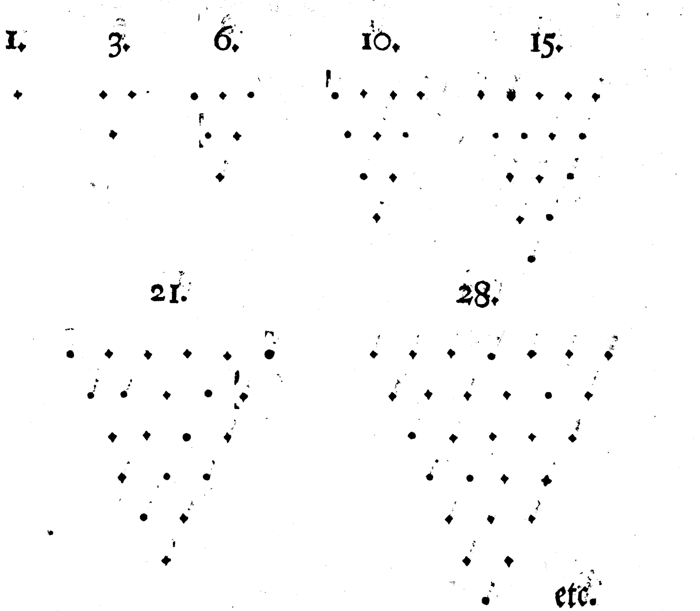
Nimmt

Nimmt man nun in derselben die Summa von einem, zweyen, dreyen, vieren etc. Gliedern, so entsteht daraus diese Reihe von Zahlen

1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, 66, 78 rc.

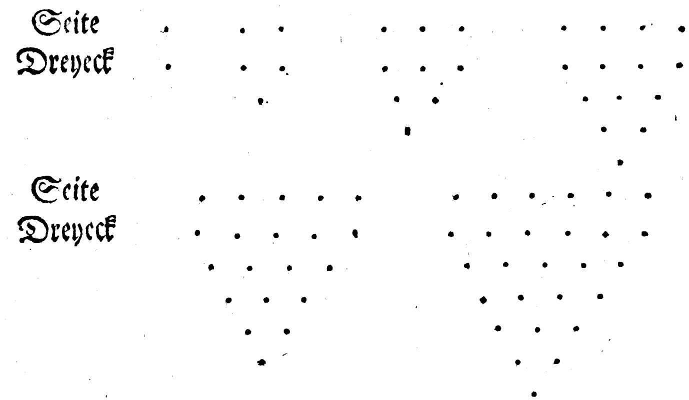
Also daß $1=1$, $3=1+2$, $6=1+2+3$, $10=1+2+3+4$ rc.

Und es werden diese Zahlen dreyeckigte Zahlen genennet, weil sich so viel Puncte als eine solche Zahl anzeigt, durch ein Dreyeck vorstellen lassen, wie aus folgendem zu ersehen.



427.

Bey einem jeden dieser Dreyecke sieht man wie viel Puncte in einer jeden Seite sind: bey dem ersten ist nur ein, bey dem zweyten 2, bey dem dritten 3, bey dem vierten 4, u. s. f. Also nach der Anzahl der Puncte in einer Seite, welche schlechtweg die Seite genannt wird, verhalten sich die dreyeckigten Zahlen, oder die Anzahl aller Puncte, welche schlechtweg ein Dreyeck genannt wird, folgendergestalt



428.

Hier kommt also die Frage vor, wie aus der gegebenen Seite das Dreyeck gefunden werden soll? welches aus dem obigen leicht geschehen kann:

Dann es sey die Seite $= n$, so wird das Dreyeck seyn $1 + 2 + 3 + 4 + \ldots\ n$, deren Summe $= \frac{nn+n}{2}$, folglich wird das Dreyeck $\frac{nn+n}{2}$. Ist also $n = 1$, so wird das Dreyeck $= 1$.

Ist $n = 2$ so ist das Dreieck $= 3$.
$n = 3$ - - - - $= 6$.
$n = 4$ - - - - $= 10$ und so fort.

Nimmt man $n = 100$, so wird das Dreyeck $= 5050$ etc.

429.

Diese Formel $\frac{nn+n}{2}$ wird nun die General-Formel für alle dreyeckigte Zahlen genannt: weil sich aus derselben für eine jede Seite, die durch n angedeutet wird, die dreyeckigte Zahl finden läßt.

Dieselbe Formel kann auch also vorgestellet werden $\frac{n(n+1)}{2}$, welche zur Erleichterung der Rechnung dienet, weil allezeit entweder n oder $n+1$, eine gerade Zahl ist und sich durch 2 theilen läßt.

Also wann $n = 12$, so ist das Dreyeck $= \frac{12 \cdot 13}{2} = 6 \cdot 13 = 78$. Ist $n = 15$, so ist das Dreyeck $= \frac{15 \cdot 16}{2} = 15 \cdot 8 = 120$. etc.

430.

Setzt man die Differenz $= 2$, so hat man diese Arithmetische Progression

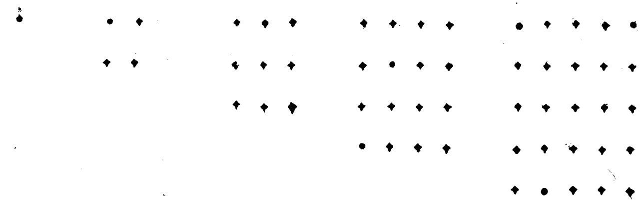
1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21 etc.

wovon die Summen diese Reihe ausmachen

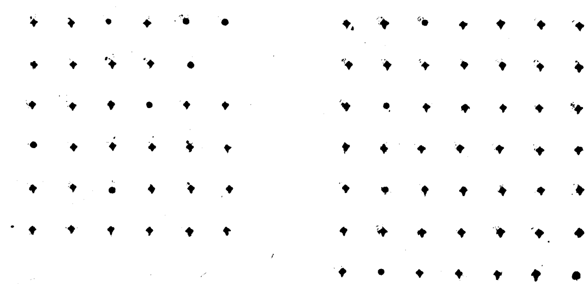
1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121 etc.

welche Zahlen viereckigte Zahlen genannt werden, und eben diejenigen sind, welche oben Quadrate genannt worden. Es lassen sich nämlich so viel Puncte als eine solche Zahl anzeigt, in ein Viereck setzen:

1, 4, 9, 16, 25,



36, 49,



431.

Hier sieht man, daß die Seite eines solchen Vierecks eben so viel Puncte enthält, als die Quadrat-Wurzel davon anzeigt, also ist von der Seite 5 das Viereck 25, und von der Seite 6 das Viereck 36; überhaupt aber wann die Seite n ist, wodurch die Anzahl der Glieder dieser Progression 1, 3, 5, 7 etc. bis n angedeutet wird, so ist das Viereck die Summe derselben Glieder, welche oben gefunden worden $= nn$. Von diesem Viereck oder Quadrat aber ist schon oben ausführlich gehandelt worden.

432.

Setzt man die Differenz $= 3$ und nimmt gleicher Gestalt die Summen, so werden dieselben fünfeckigte Zahlen genannt, obgleich sich dieselben nicht mehr so gut durch Puncte vorstellen lassen. Dieselben schreiten demnach folgendermaßen fort.

Zeiger	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10,	11
Arith. Prog.	1,	4,	7,	10,	13,	16,	19,	22,	25,	28,	31
Fünfeck	1,	5,	12,	22,	35,	51,	70,	92,	117,	145,	176 rc.

und der Zeiger weist die Seite einer jeglichen.

433.

Wenn also die Seite n gesetzt wird, so ist die fünfeckigte Zahl $= \frac{3nn - n}{2} = \frac{n(3n-1)}{2}$. Wann z. E. $n = 7$, so ist das Fünfeck 70. Will man die fünfeckigte Zahl von der Seite 100 wissen, so setzt man $n = 100$ und bekommt 14950.

434.

Setzt man die Differenz $= 4$, so erhält man auf diese Art die sechseckigte Zahlen, welche also fortschreiten.

Zeiger	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10.
Arith. Prog.	1,	5,	9,	13,	17,	21,	25,	29,	33,	37.
Sechseck	1,	6,	15,	28,	45,	66,	91,	120,	153,	190.

Wo der Zeiger wiederum die Seite eines jeden giebt.

435.

Wann also die Seite n ist, so wird die sechseckigte Zahl $= 2nn - n = n(2n - 1)$, wobey zu mercken, daß alle diese sechseckigte Zahlen zugleich dreyeckigte Zahlen sind. Dann wann man in diese immer eine überspringt, so erhält man die sechseckigte.

436.

Auf gleiche Weise findet man die siebeneckigte, achteckigte, neuneckigte Zahlen, und so fort. Von welchen wir die General-Formeln hier insgesammt hersetzen wollen. Wann also die Seite n ist, so wird seyn

das Dreyeck $= \frac{nn+n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$

Viereck $= \frac{2nn+0n}{2} = nn$

Veck $= \frac{3nn-n}{2} = \frac{n(3n-1)}{2}$

VIeck $= \frac{4nn-2n}{2} = 2nn-n = n(2n-1)$

VIIeck $= \frac{5nn-3n}{2} = \frac{n(5n-3)}{2}$

VIIIeck $= \frac{6nn-4n}{2} = 3nn-2n = n(3n-2)$

IXeck $= \frac{7nn-5n}{2} = \frac{n(7n-5)}{2}$

Xeck $= \frac{8nn-6n}{2} = 4nn-3n = n(4n-3)$

XIeck $= \frac{9nn-7n}{2} = \frac{n(9n-7)}{2}$

XIIeck

XIIeck $= \frac{10nn-8n}{2} = 5nn-4n = n(5n-4)$

XXeck $= \frac{18nn-16n}{2} = 9nn-8n = n(9n-8)$

XXVeck $= \frac{23nn-21n}{2} = \frac{n(23n-21)}{2}$

meck $= \frac{(m-2)nn-(m-4)n}{2}$

407.

Wann also die Seite n ist, so hat man auf eine allgemeine Art die m eckigte Zahl $= \frac{(m-2)nn-(m-4)n}{2}$

woraus man alle nur mögliche vieleckigte Zahlen finden kann, deren Seite $= n$. Wollte man daraus die zweyeckigten Zahlen finden, so würde $m = 2$ und dieselbe $= n$ seyn.

Setzt man $m=3$ so wird die IIIeckigte Zahl $= \frac{nn+n}{2}$

Setzt man $m=4$ so wird die IVeckigte Zahl $= nn$ etc.

438.

Um diese Regul mit einigen Exempeln zu erläutern, so suche man die XXVeckigte Zahl, deren Seite 36 ist. Man suche erstlich für die Seite n die

die

die XXVeckigte Zahl, so wird dieselbe $= \frac{23nn - 21n}{2}$. Nun setze man $n = 36$, so bekommt man die gesuchte Zahl $= 14526$.

439.

Frage. Einer hat ein Haus gekauft und wird gefragt wie theuer? darauf antwortet er, die Zahl der Rubel die er dafür bezahlet, sey die 365 eckigte Zahl von 12.

Um nun diese Zahl zu finden so wird $m = 365$ und also das 365 eck von $n = \frac{363\,nn - 361\,n}{2}$. Nun ist $n = 12$, woraus der gesuchte Preis des Hauses seyn wird 23970 Rubel.

Capitel 6.

Von dem Geometrischen Verhältniße.

440.

Das Geometrische Verhältniß zwischen zweyen Zahlen enthält die Antwort auf die Frage, wie viel mal die eine Zahl größer sey als die andere? und wird gefunden, wann man die eine durch die andere dividirt, da dann der Quotient die Benennung des Verhältnisses anzeigt.

441.

Es kommen demnach bey einem Geometrischen Verhältniße drey Sachen zu betrachten vor. Erstlich, die erste der beyden vorgegebenen Zahlen, welche der Vorsatz genennet wird. Zweytens, die andere derselben, welche der Nachsatz genennet wird. Drittens, die Benennung des Verhältnisses, welche gefunden wird, wann man den Vorsatz durch den Nachsatz dividirt: als wann zwischen den Zahlen 18 und 12 das Verhältniß angezeigt werden soll, so ist 18 der Vorsatz, 12 der Nachsatz und die Benennung wird seyn $\frac{18}{12} = 1\frac{1}{2}$; woraus

aus man erkennt, daß der Vorsatz 18 den Nachsatz 12, einmal und noch $\frac{1}{2}$ mal in sich begreiffe.

442.

Um das Geometrische Verhältniß zwischen zweyen Zahlen anzuzeigen, bedient man sich zweyer über einandergesetzten Puncte, welche zwischen dem Vorsatz und Nachsatz gesetzt werden.

Also a : b zeigt das Verhältniß zwischen a und b an, welches Zeichen, wie schon oben bemerckt worden, auch Division anzuzeigen pflegt, und eben deswegen hier gebraucht wird, weil um dieses Verhältniß zu erkennen, die Zahl a und b getheilt werden muß: dieses Zeichen wird also mit Worten ausgesprochen: a verhält sich zu b, oder schlechtweg a zu b.

443.

Die Benennung eines solchen Verhältnisses wird demnach durch einen Bruch vorgestellt, dessen Zähler der Vorsatz, der Nenner aber der Nachsatz ist. Um der Deutlichkeit willen aber muß man diesen Bruch immer in seine kleinste Form bringen, welches geschieht, wann man den Zähler und Nenner durch ihren größten gemeinen Theiler

ler theilet, wie oben geschehen, da der Bruch $\frac{18}{12}$ auf $\frac{3}{2}$ ist gebracht worden, indem man den Zähler und Nenner durch 6 getheilt hat.

444.

Die Verhältnisse sind also nur in so fern unterschieden, als ihre Benennung verschieden ist, und es giebt daher so viel verschiedene Arten von Verhältnisse, als verschiedene Benennungen gefunden werden können.

Die erste Art ist nun ohnstreitig, wann die Benennung 1 wird; und dieses geschieht, wann die beyden Zahlen gleich sind, als: 3 : 3, 4 : 4, a : a wovon die Benennung 1 wird, und deswegen das Verhältniß der Gleichheit genannt wird.

Hierauf folgen diejenigen deren Benennung eine ganze Zahl wird, als 4 : 2 wo die Benennung 2 ist. Ferner 12 : 4 wo die Benennung 3 ist, und 24 : 6 wo die Benennung 4 ist etc.

Hernach kommen solche vor, deren Benennung durch Brüche ausgedrückt werden. Als 12 : 9 dessen Benennung $\frac{4}{3}$ oder $1\frac{1}{3}$ ist: 18 : 27 dessen Benennung $\frac{2}{3}$ ist etc.

445.

445.

Es sey nun a der Vorsatz, b der Nachsatz und die Benennung d, so haben wir schon gesehen, daß wann a und b gegeben, daraus gefunden werde $d = \frac{a}{b}$.

Ist aber der Nachsatz b nebst der Benennung d gegeben, so findet man daraus den Vorsatz $a = bd$, weil bd durch b dividirt d giebt, endlich wann der Vorsatz a nebst der Benennung d gegeben ist, so findet man daraus den Nachsatz $b = \frac{a}{d}$. Dann wann man den Vorsatz a durch diesen Nachsatz $\frac{a}{b}$ dividiret, so ist der Quotus d, das ist die Benennung.

446.

Ein jedes Verhältniß a : b bleibt unverändert, wann man den Vorsatz und Nachsatz mit einerley Zahl entweder multiplicirt oder dividirt, weil die Benennung einerley bleibt. Dann wann d die Benennung von a : b ist, also daß $d = \frac{a}{b}$, so ist auch von diesem Verhältniß na : nb die Benennung $\frac{a}{b} = d$; und von diesem Verhältniß $\frac{a}{n} : \frac{b}{n}$ ist die Benennung gleichfalls $\frac{a}{b} = d$.

447.

Wann die Benennung in die kleinste Form gebracht worden, so läßt sich daraus das Verhältniß deutlich erkennen und mit Worten ausdrücken. Nemlich wann die Benennung auf diesen Bruch $\frac{p}{q}$ gebracht worden, so sagt man; $a : b = p : q$ das ist mit Worten a zu b wie p zu q. Also da von diesem Verhältniße 6 : 3 die Benennung $\frac{2}{1}$ ist, oder 2, so hat man $6 : 3 = 2 : 1$. Eben so sagt man $18 : 12 = 3 : 2$ und $24 : 18 = 4 : 3$ und ferner $30 : 45 = 2 : 3$. Läßt sich aber die Benennung nicht abkürzen, so wird auch das Verhältniß nicht deutlicher: dann wann man sagt $9 : 7 = 9 : 7$ so wird es nicht begreiflicher.

448.

Wann sich aber die Benennung auf sehr kleine Zahlen bringen läßt, so erhält man eine deutliche Erkenntniß von einem Verhältniße zwischen zwey sehr großen Zahlen. Also wann man sagt $288 : 144 = 2 : 1$, so ist die Sache ganz deutlich; und wann man frägt wie sich 105 : 70 verhalte, so antwortet man: wie 3 : 2. Frägt man weiter wie sich 576 : 252 verhalte, so antwortet man: wie 16 : 7.

449.

Um also ein jedes Verhältniß auf das Deutlichste vorzustellen, so muß man die Benennung desselben auf

auf die geringsten Zahlen zu bringen suchen, welches auf einmal geschehen kann, wann die beiden Glieder des Verhältnisses durch ihren größten gemeinen Theiler dividiret werden. Also das Verhältniß 576 : 252 wird auf einmal zu diesem 16 : 7 gebracht, wann man die beiden Zahlen 576 und 252 durch 36, welches ihr größter gemeiner Theil ist, dividiret.

450.

Weil nun die Sache darauf ankommt, daß man von zwey gegebenen Zahlen ihren größten gemeinen Theiler zu finden wisse, so soll dazu in dem folgenden Capitel die nöthige Anleitung gegeben werden.

Capitel 7.

Von dem größten gemeinen Theiler zweyer gegebenen Zahlen.

451.

Es giebt Zahlen, welche außer 1 keinen andern gemeinschaftlichen Theiler haben, und wann Zähler und Nenner eines Bruchs so beschaffen sind, so läßt sich derselbe auch in keine leichtere Form bringen.

Also sieht man, daß diese beyden Zahlen 48 und 35 keinen gemeinschaftlichen Theiler haben, ohngeachtet eine jede vor sich ihre besondere Theiler hat. Deswegen kann auch das Verhältniß 48:35 nicht leichter ausgedrückt werden, dann ob gleich sich beyde durch 1 theilen lassen, so werden doch dadurch die Zahlen nicht kleiner.

452.

Wann aber die Zahlen einen gemeinen Theiler haben, so wird derselbe, und sogar der größte gemeine Theiler durch folgende Regul gefunden.

Man dividire die größere Zahl durch die kleinere; durch den überbleibenden Rest dividire man ferner den vorhergehenden Divisor, durch den hier überbleibenden Rest dividire man wieder den letzt vorhergehenden Divisor, und auf solche Art verfahre man so lange bis die Division aufgeht; da dann der letzte Divisor der größte gemeine Theiler der beyden gegebenen Zahlen seyn wird.

Diese Untersuchung wird für die vorgesetzten Zahlen 576 und 252 also zu stehen kommen.

```
252|576|2
   |504|
     72|252|3
       |216|
         36|72|2
           |72|
             0
```

Hier ist also der größte gemeine Theiler 36.

453.

Es wird dienlich seyn diese Regul durch einige Exempel zu erläutern. Man suche demnach den größten gemeinen Theiler zwischen den Zahlen 504 und 312.


```
312|504|1
   |312|
     192|312|1
        |192|
          120|192|1
             |120|
               72|120|1
                 |72|
                   48|72|1
                     |48|
                       24|48|2
                         |48|
                           0
```

Also ist 24 der größte gemeine Theiler, und deswegen läßt sich das Verhältniß 504 : 312 auf diese Form 24 : 13 bringen.

454.

Es seyen ferner diese zwey Zahlen gegeben 625 : 529, für welche der größte gemeine Theiler gesucht werden soll:

```
529|625|1
   |529|
     96|529|5
       |480|
         49|96|1
           |49|
           47|49|1
              |47|
                2|47|23
                 |46|
                   1| 2 |2
                    | 2 |
                      0
```

Hier ist also der größte gemeine Theiler 1, und deswegen läßt sich das Verhältniß 625 : 529 auf keine leichtere Form bringen: oder dasselbe läßt sich durch keine kleinere Zahlen ausdrücken.

455.

Es ist nun noch nöthig den Beweis von dieser Regul zu geben. Es sey a die größere und b die kleinere von den gegebenen Zahlen, d aber ein gemeiner Theiler derselben. Da sich nun sowohl a als

a als b durch d theilen lassen, so wird sich auch a — b dadurch theilen lassen, auch a — 2b und a — 3b, und überhaupt a — nb.

456.

Dies verhält sich auch rückwärts so, wann sich die Zahlen b und a — nb durch d theilen lassen, so muß sich auch die Zahl a dadurch theilen lassen. Dann da sich nb theilen läßt, so würde sich a — nb nicht theilen lassen, wann sich nicht auch a theilen liesse.

457.

Ferner ist zu bemercken, daß wann d der größte gemeine Theiler von den beyden Zahlen b und a — nb ist, derselbe auch der größte gemeine Theiler von den Zahlen a und b seyn werde. Dann wann für diese Zahlen a und b noch ein größerer gemeiner Theiler als d statt fände, so würde derselbe auch ein gemeiner Theiler von b und a — nb, folglich d nicht der größte seyn. Nun aber ist d der größte gemeine Theiler von b und a — nb also muß auch d der größte gemeine Theiler von a und b seyn.

458.

Diese drey Sätze voraus gesetzt, so laßt uns die größere Zahl a durch die kleinere b, wie die Regul befiehlt, theilen, und für den Quotus n annehmen, so erhält man den Rest $a - nb$, welcher immer kleiner ist als b. Da nun dieser Rest $a - nb$ mit dem Divisor b eben denselben größten gemeinen Theiler hat als die gegebene Zahlen a und b, so theile man den vorigen Divisor b durch diesen Rest $a - nb$, und da wird wiederum der herauskommende Rest mit dem nächst vorhergehenden Divisor eben denselben größten gemeinen Theiler haben, und so immer weiter.

459.

Man fährt aber solchergestalt fort, bis man auf eine solche Division kommt, welche aufgeht oder wo kein Rest übrig bleibt. Es sey demnach p der letzte Divisor, welcher just etliche mahl in seinem Dividend enthalten ist, dahero das Dividend durch p theilbar, und folglich diese Form mp haben wird; diese Zahlen nun p und mp lassen sich beyde durch p theilen, und haben ganz gewiß keinen größern gemeinen Theiler, weil sich keine Zahl durch eine größere, als sie selbst ist, theilen läßt. Dahero ist auch der letzte Divisor der größte gemeine Theiler der beyden im Anfang gegebenen Zahlen a und b, welches der Beweis der vorgeschriebenen Regul ist.

461.

Laßt uns noch ein Exempel hersetzen und von diesen Zahlen 1728 und 2304 den größten gemeinen Theiler suchen, da dann die Rechnung wie folget zu stehen kommen wird.

1728	2304	1	
	1728		
	576	1728	3
		1728	
		0	

Also ist 576 der größte gemeine Theiler, und das Verhältniß 1728 : 2304 wird auf dieses gebracht 3 : 4; folglich verhält sich 1728 : 2304 eben so wie 3 : 4.

Capi-

Capitel 8.

Von den Geometrischen Proportionen.

461.

Zwey Geometrische Verhältnisse sind einander gleich, wann ihre Benennungen einander gleich sind: und die Gleichheit zweyer solchen Verhältnisse wird eine Geometrische Proportion genannt, welche also geschrieben wird, $a:b = c:d$, mit Worten aber wird dieselbe also ausgesprochen: a verhält sich zu b wie sich c verhält zu d, oder a zu b wie c zu d. Ein Exempel einer solchen Proportion ist nun $8:4 = 12:6$. Dann von dem Verhältniß $8:4$ ist die Benennung $\frac{2}{1}$, und ebenfalls ist sie es auch von dem Verhältniß $12:6$.

462.

Wann also $a:b = c:d$ eine Geometrische Proportion ist so muß beyderseits eine gleiche Benennung statt finden und folglich $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ seyn; und hinwiederum wann die Brüche $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ einander gleich sind, so ist $a:b = c:d$.

463.

463.

Eine Geometrische Proportion besteht demnach aus vier Gliedern welche also beschaffen sind, daß das erste durch das zweyte dividirt, eben so viel ist, als das dritte durch das vierte dividirt. Hieraus folget eine sehr wichtige Haupt-Eigenschaft aller Geometrischen Proportionen, welche darinn besteht, daß das Product aus dem ersten und vierten Gliede immer eben so groß ist, als das Product aus dem zweyten und dritten. Oder kürzer: daß das Product der äußern gleich ist dem Product der mittlern Glieder.

464.

Um diese Eigenschaft zu beweisen, so sey $a:b$ $c:d$ eine Geometrische Proportion, und also $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Man multiplicire einen jeden dieser Brüche mit b so bekommt man $a = \frac{bc}{d}$, diese multiplicirt man ferner beyderseits mit d, so bekommt man $ad = bc$. Nun aber ist ad das Product der äußern Glieder und bc das Product der mittlern, welche beyde Producte folglich einander gleich sind.

465.

Wann hinwiederum vier Zahlen a, b c. d. so beschaffen sind, daß das Product der äußern ad gleich

ist

ist dem Product der mittlern bc, so stehen dieselben in einer Geometrischen Proportion. Dann da $ad = bc$ so dividirt man beyderseits durch bd, da bekommt man $\frac{ad}{bd} = \frac{bc}{bd}$ oder $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$; dahero wird $a:b = c:d$.

466.

Die vier Glieder einer Geometrischen Proportion als $a:b = c:d$ können auf verschiedene Arten versetzt werden, so daß die Proportion bleibt. Es kommt nehmlich nur darauf an, daß das Product der äussern Glieder dem Product der mittlern gleich bleibe, oder daß $ad = bc$. Also wird man haben, erstlich $b:a = d:c$, 2tens $a:c = b:d$, 3tens $d:b = c:a$, 4tens $d:c = b:a$.

467.

Außer diesen lassen sich auch noch viele andere Geometrische Proportionen herleiten. Dann wann $a:b = c:d$, so ist erstlich $a+b:a$ oder das erste + dem andern zum ersten, wie $c+d:c$ oder das dritte + dem vierten zum dritten: nemlich $a+b:a = c+d:c$.

Hernach ist auch das erste — dem andern zum ersten, wie das dritte — dem vierten zum dritten; oder $a-b:a = c-d:c$.

Dann nimmt man die Producte der äußern und mittlern Glieder, so ist offenbar $ac - bc = ac - ad$, weil

weil $ad = bc$. Ferner wird auch $a-b:b = c-d:d$, weil $ad - bd = bc - bd$ und $ad = bc$ ist.

468.

Alle hergeleitete Proportionen die aus $a:b = c:d$ entstehen, können auf eine allgemeine Art also vorgestellt werden $ma+nb:pa+qb = mc+nd:pc+qd$. Dann das Product der äussern Glieder ist $mpac + npbc + mqad + nqbd$, oder weil $ad = bc$, so wird dasselbe $mpac + npbc + mqbc + nqbd$; das Product der mittlern Glieder aber ist $mpac + mqbc + npad + nqbd$, oder weil $ad = bc$ so wird dasselbe $mpac + mqbc + npbc + nqbd$, welches mit jenem einerley ist.

469.

Also kann man aus einer gegebenen Proportion als z. E. $6:3 = 10:5$, unendlich viel andere herleiten, wovon wir einige hersetzen wollen.

$3:6 = 5:10$, $6:10 = 3:5$, $9:6 = 15:10$,
$3:3 = 5:5$, $9:15 = 3:5$, $9:3 = 15:5$,

470.

Da in einer Geometrischen Proportion das Product der äussern Glieder, dem Product der mittlern

gleich

gleich ist, so kann man, wann die drey ersten Glieder bekannt sind, aus derselben das vierte finden. Es seyen die drey ersten Glieder 24:15 = 40 zu.... Dann da hier das Product der mittlern 600 ist, so muß das vierte Glied mit dem ersten das ist mit 24 multiplicirt, auch 600 machen, folglich muß man 600 durch 24 dividiren, und da wird der Quotus das gesuchte vierte Glied 25 geben. Dahero ist die Proportion 24:15 = 40:25. Und wann allgemein die 3 ersten Glieder a:b = c:... sind, so setze man für das unbekannte vierte Glied den Buchstaben d, und da ad = bc seyn muß, so dividire man beyderseits durch a und man wird bekommen $d = \frac{bc}{a}$; folglich ist das vierte Glied $= \frac{bc}{a}$, und wird gefunden wann man das zweyte Glied mit dem dritten multiplicirt und das Product durch das erste Glied dividiret.

471.

Hierauf beruhet nun der Grund der in allen Rechen-Büchern so berühmten Regula de Tri, weil darinn aus drey gegebenen Zahlen allezeit eine solche vierte gesucht wird, welche mit jenen in einer Geometrischen Proportion stehet, daß sich also die erste verhalte zur zweyten, wie die dritte zur vierten.

472.

Hierbey kommen noch einige besondere Umstände zu bemerken vor: wann zwey Proportionen einerley erstes und drittes Glied haben, wie in diesen a:b = c:d und a:f = c:g so werden auch die zweyten den vierten proportional seyn, es wird sich nemlich verhalten b:d = f:g; dann da aus der ersten folgt a:c = b:d, und aus der andern a:c = f:g, so sind die Verhältnisse b:d und f:g einander gleich, weil ein jedes dem Verhältnisse a:c gleich ist. Also da 5:100 = 2:40 und 5:15 = 2:6, so folgt daraus daß 100:40 = 15:6.

473.

Wann aber zwey Proportionen so beschaffen sind daß sich einerley mittlere Glieder darinn befinden, so werden sich die ersten Glieder umgekehrt verhalten wie die vierten. Wann nemlich a:b = c:d und f:b = c:g, so wird daraus folgen a:f = g:d. Es sey z. E. diese Proportion gegeben 24:8 = 9:3 und 6:8 = 9:12, so wird daraus folgen 24:6 = 12:3. Der Grund davon ist offenbar: weil die erste giebt ad = bc und die zweyte fg = bc folglich wird ad = fg, und a:f = g:d, oder a:g = f:d.

474.

Aus zwey gegebenen Proportionen aber kann immer eine neue gemacht werden, wann man besonders die ersten, zweyten, dritten und die vierten Glieder mit einander multiplicirt. Also aus diesen Proportionen $a:b = c:d$ und $e:f = g:h$ entstehet durch die Zusammensetzung diese $ae:bf = cg:dh$. Dann da erstlich $ad = bc$ und aus der zweyten $eh = fg$, so wird auch seyn $adeh = bcfg$. Nun aber ist $adeh$ das Product der äußern und $bcfg$ das Product der mittlern Glieder in der neuen Proportion, welche folglich einander gleich sind.

475.

Es seyn z. E diese zwey Proportionen gegeben $6:4 = 15:10$ und $9:12 = 15:20$ so giebt uns derselben Zusammensetzung folgende Proportion

$$6 \cdot 9 : 4 \cdot 12 = 15 \cdot 15 : 10 \cdot 20$$

das ist $54 : 48 = 225 : 200$

oder $9 : 8 = 9 : 8$.

476.

Zuletzt ist hier noch zu bemercken, daß wann zwey Producte einander gleich sind, als $ad = bc$, daraus hinwiederum eine Geometrische Proportion formiret

formiret werden kann. Es ist nemlich immer der eine Factor des ersten Products zu einem des zweyten, wie der andere Factor des zweyten zum andern des ersten. Es wird nemlich seyn $a:c = b:d$. Da z. E. $3 \cdot 8 = 4 \cdot 6$, so folgt daraus diese Proportion $8:4 = 6:3$ oder $3:4 = 6:8$; und da $3 \cdot 5 = 1 \cdot 15$, so bekommt man $3:15 = 1:5$ oder $5:1 = 15:3$ oder $3:1 = 15:5$.

Capitel 9.

Anmerkungen über die Proportionen und ihren Nutzen.

477.

Diese Lehre ist in dem allgemeinen Handel und Wandel von solcher Nothwendigkeit, daß fast niemand dieselbe entbehren kann. Die Preise und Waaren sind einander immer proportional und bey den verschiedenen Geld-Sorten kommt alles darauf an, die Verhältnisse darzwischen zu bestimmen. Dieses wird sehr dienlich seyn um die vorgetragene Lehre besser zu erläutern und zum Nutzen anzuwenden.

478.

478.

Will man das Verhältniß zwischen zweyen Münz-Sorten z. E. einem Louis d'or und einem Ducaten erforschen, so muß man sehen wie viel diese Stücke nach einerley Münz-Sorten gelten. Da also in Berlin ein Louis d'or 5 Rthlr. 8 Gr., ein Ducaten aber 3 Rthlr. gilt, so darf man diese beyden Werthe nur auf einerley Münze bringen, entweder auf Thaler und da bekommt man diese Proportion 1 L.:1 D. $= 5\frac{1}{3}$ Rthlr.:3 Rthlr. d. i. wie 16:9. Oder in Groschen hat man diese Proportion 1 L.:D. = 128:72 = 16:9, und aus einer solchen Proportion erhält man die Vergleichung zwischen Louis d'or und Ducaten, indem die Gleichheit der Producte der äußern und mittlern Glieder 9 Louis d'or = 16 Ducaten giebt; durch Hülfe dieser Vergleichung kann man also eine jede Summe Louis d'or in Ducaten verwandeln. Also wann man gefragt wird, wie viel 1000 Louis d'ors in Ducaten betragen so macht man diese Regula-Detri 9 Louis d'or thun 16 Ducaten, was machen 1000 Louis d'or? Antwor: $1777\frac{7}{9}$ Ducaten.

Frägt man aber wie viel 1000 Ducaten in Louis d'or betragen, so setzt man diese Regula-Detri: 16 Ducaten thun 9 Louis d'or, was thun 1000? Antwort: $562\frac{1}{2}$ Louis d'or.

479.

479.

Hier in St. Petersburg ist der Werth eines Ducaten veränderlich und beruhet auf den Wechsel-Cours, wodurch der Werth eines Rubels in Holländ. Stüber bestimmet wird, deren 105 einen Ducaten ausmachen.

Wann also der Cours 45 Stüber ist, so hat man diese Proportion 1 Rub.:1 D. = 45:105 = 3:7, und daher diese Vergleichung 7 Rbl. = 3 Duc. Hieraus kann man finden wie viel ein Ducaten in Rubel betrage; dann 3 D.:7 Rbl. = 1 D.:.. Antwort $2\frac{1}{3}$ Rubel. Ist aber der Cours 50 Stüber, so hat man diese Proportion 1 Rbl.:1 D. = 50:105 = 10:21, und daher diese Vergleichung 21 Rbl. = 10 Ducaten. Hieraus wird 1 Duc. = $2\frac{1}{10}$ Rubel. Ist aber der Cours nur 44 Stüber, so hat man 1 Rbl.:1 Duc. = 44:105, und also 1 Duc. = $2\frac{17}{44}$ Rbl. = 2 Rbl. $38\frac{7}{11}$ Cop.

480.

Hieraus kann man auch mehr als zwey verschiedene Münz-Sorten unter sich vergleichen, welches insonderheit bey Wechseln häufig geschieht. Um davon ein Exempel zu geben, so soll jemand von hier 1000 Rbl. nach Berlin übermachen, und will wissen, wie viel solches in Berlin in Ducaten betragen

tragen werde. Es ist aber der hiesige Cours $47\frac{1}{2}$ Stüber (nemlich 1 Rbl. macht $47\frac{1}{2}$ Stüber Holländisch). Hernach in Holland machen 20 Stüber einen Fl. Holl. Ferner $2\frac{1}{2}$ Fl. Holl. machen einen Species Rthl. Holl. Ferner ist der Cours von Holland nach Berlin 142, d. i. für 100 Spec. Rthl. zahlt man in Berlin 142 Rthlr. Endlich gilt ein Duc. in Berlin 3 Rthlr.

481.

Um diese Frage aufzulösen, wollen wir erstlich Schritt vor Schritt gehen. Wir fangen also bey den Stübern an, und da 1 Rbl. = $47\frac{1}{2}$ Stüber, oder 2 Rbl. = 95 Stb. so setzt man 2 Rbl. : 95 Stb. = 1000 ... Antwort 47500 Stüb. Ferner gehen wir weiter und setzen 20 Stüb. : 1 Fl. = 47500 Stüber : .... Antwort 2375 Fl.

Ferner da $2\frac{1}{2}$ Fl. = 1 Spec. Rthlr., das ist, da 5 Fl. = 2 Spec. Rthlr. so setzt man 5 Fl. : 2 Spec. Rthl. = 2375 Fl. zu .... Antwort 950 Spec. Rthlr.

Ferner gehen wir auf Berliner Rthlr. nach dem Cours zu 142: Also 100 Spec. Rthlr. : 142 Rthl. = 950: Antwort 1349 Rthlr.

Nun gehen wir endlich zu den Ducaten und setzen also 3 Rthlr. : 1 Duc. = 1349 Rthlr. zu ... Antwort $449\frac{2}{3}$ Ducaten.

482.

482.

Um solche Rechnungen noch mehr zu erläutern, so wollen wir setzen der Banquier zu Berlin mache Schwierigkeit diese Summe zu bezahlen, unter einem oder andern Vorwande was es auch für einer seyn mag, und wolle diesen Wechsel nicht anders als mit 5 Procent Abzug bezahlen. Dieses ist aber also zu verstehen, daß er anstatt 105 nur 100 bezahlt, daher muß noch diese Regula de tri hinzugefügt werden, 105 : 100 = $449\frac{2}{3}$ zu ... Giebt also $428\frac{16}{63}$ Ducaten.

483.

Hierzu wurden nun sechs Rechnungen nach der Regula de tri erfordert: man hat aber Mittel gefunden diese Rechnungen ungemein abzukürzen durch Hülfe der sogenannten Kettenregel. Um dieselbe zu erklären, so laßt uns von den sechs obigen Rechnungen die zwey Vordersätze in Betrachtung ziehen und hier vor Augen legen:

I.) 2 Rbl. : 95 Stüb.	II.) 20 Stüb. : 1 Fl. Holl.
III.) 5 Fl. Holl. : 2 Sp. Rthl.	IV.) 100 Sp. Rthl. : 142 Rthl.
V.) 3 Rthl. : 1 Sp. Ducaten	VI.) 105 Duc. : 100 Duc.

Wenn wir nun die obigen Rechnungen betrachten so finden wir, daß wir die vorgegebene Summe immer durch die zweyten Sätze multiplicirt und durch

 die

die ersten dividirt haben; daraus ist klar, daß man eben dieses finden werde, wenn man die vorgegebene Summe auf einmahl mit dem Product aller zweyten multiplicirt und durch das Product aller ersten Sätze dividirt; oder wenn man diese einzige Regeldetri macht: wie sich das Product aller ersten Sätze verhält zu dem Producte aller zweyten Sätze, also verhält sich die gegebene Anzahl Rubel zu der Anzahl Ducaten die in Berlin bezahlt wird.

484.

Diese Rechnung wird noch mehr abgekürzt, wenn sich irgend ein erster Satz gegen irgend einen zweyten Satz aufheben läßt, da man denn dieselben Sätze ausstreicht und an ihrer Stelle die Quotus setzt, welche man durch die Aufhebung erhält: Auf diese Art wird obiges Exempel also zu stehen kommen

Rbl.	$\cancel{2}$.	19	$\cancel{9}\cancel{8}$	St. Holl. Cur.	1000 Rbl.
	$\cancel{2}\cancel{0}$.		1	Hol. Fl.	
	$\cancel{5}$.		$\cancel{2}$	Sp. Rthl.	
	100.		142	Rthl.	
	3.		1	Duc.	
	$\cancel{1}0\cancel{5}$. 21. $\cancel{5}$,		$\cancel{1}\cancel{0}\cancel{0}$	Duc.	

$63\cancel{0}\cancel{0} : 2698 = 10\cancel{0}\cancel{0}$ zu ...

7) 26980

9) 3854 (2

428 (2 Antwort $428 \frac{25}{63}$ Ducaten.

485.

Um die Ketten-Regel zu gebrauchen, so muß man folgende Ordnung beobachten; man fängt mit eben der Münz-Sorte an von welcher die Frage ist und vergleicht dieselbe mit einer andern, mit welcher das folgende Verhältniß wieder angefangen, und dieselbe mit einer dritten verglichen wird, so daß ein jedes Verhältniß mit eben der Münz-Sorte anfängt, mit welcher das vorige aufgehört, und so fährt man fort bis man auf diejenige Sorte kommt, in welcher die Antwort stehen soll, und zuletzt werden noch die Spesen oder Unkosten berechnet.

486.

Zu mehrerer Erläuterung wollen wir noch etliche Fragen beysetzen.

Wann die Ducaten in Hamburg 1 p. C, besser sind als 2 Rthl. B° (das ist, wenn 50 Duc. nicht 100, sondern 101 Rthl. B° machen) und der Cours zwischen Hamburg und Königsberg 119 Gr. Poln. ist (das ist, 1 Rthl. B° macht 119 Gr. Poln.) wie viel betragen 1000 Duc. in Fl. Poln. (30 Gr. Pol. machen 1 Fl. Pol.)

Duc. 1	:	$\cancel{2}$ Rthl. B°	1000 Duc.
$\cancel{100}$, 50	:	101 Rthl. B°	
$\cancel{4}$1	:	119 Gr. Pol.	
30	:	1 Fl. Pol.	
$\cancel{1500}$		12019 — $\cancel{1000}$ Duc. zu	

3) 120190

5) 40063 (1

8012 (3 Antwort $8012\frac{2}{3}$ Fl. Poln.

487.

Noch zu mehrerer Abkürzung kann die Frag-Zahl über die zweyte Reihe gesetzt werden, da denn das Product der zweyten Reihe, durch das Product der ersten dividirt die verlangte Antwort giebt.

Frage: Leipzig läßt aus Amsterdam Ducaten kommen, welche daselbst 5 Fl. 4 St. Courant gelten (das ist, ein Duc. gilt 104 St. oder 5 Duc. machen 26 Fl. Hol.) Wenn nun Agio di B° in Amsterdam 5 p. C. (das ist 105 Cour. macht 100 B°) und der Wechsel-Cours von Leipzig nach Amsterdam in B°. $133\frac{1}{4}$ p. C. (das ist für 100 Rthl. zahlt man in Leipzig $133\frac{1}{4}$ Thl.) endlich 2 Rthl. Hol. 5 Fl. Hol. thun, wie viel sind nach diesen Coursen vor solche 1000 Ducaten in Leipzig an Thalern zu bezahlen.

Duc.

		$\cancel{5}$, $\cancel{1000}$ Duc.
Duc. $\cancel{5}$	:	26 Fl. Holl. Cour.
$\cancel{105}$, 21	:	4, $\cancel{20}$, $\cancel{100}$ Fl. Holl. B°
$\cancel{5}$	:	$\cancel{2}$ Rthl. Hol. B°
$\cancel{400}$, $\cancel{2}$	:	533 Thl. in Leipzig
21	:	3) 55432 (1
		7) 18477 (6
		2639

Antwort $2639\frac{13}{21}$ Thl.
oder 2639 Thl. 15 gut. Grsch.

Capitel 10.

Von den zusammengesetzten Verhältnissen.

488.

Zwey oder mehr Verhältnisse werden zusammengesetzt, wenn man so wohl die Vordersätze als die Hintersätze besonders mit einander multiplicirt; und alsdann sagt man, daß das Verhältniß zwischen diesen beyden Producten zusammengesetzt sey aus den zwey oder mehr gegebenen Verhältnißen.

Also aus diesen Verhältnissen $a:b$, $c:d$, $e:f$ entsteht durch die Zusammensetzung dieses Verhältniß $ace : bdf$.

 489.

489.

Da ein Verhältniß einerley bleibt, wenn man seine beyden Glieder durch einerley Zahl dividirt oder abkürzt, so kann man die obige Zusammensetzung ungemein erleichtern, wenn man die Vordersätze gegen die Hintersätze aufhebt oder abkürzt, wie schon im vorigen Capitel geschehen.

Also aus folgenden gegebenen Verhältnissen wird das daraus zusammengesetzte solchergestalt gefunden.

Die gegebenen Verhältnisse sind:

12 : 25, 28 : 33 und 55 : 56

$$\begin{array}{lcl} \cancel{12},\ \cancel{4},\ 2 & : & 5\ \cancel{25} \\ \cancel{28} & : & \cancel{3}, \cancel{33} \\ \cancel{55},\ \cancel{5} & : & \cancel{7}, \cancel{56} \\ \hline 2 & : & 5 \end{array}$$

Also erhält man durch die Zusammensetzung, dieses Verhältniß 2 : 5.

490.

Eben dieses geht auch auf eine allgemeine Art bey den Buchstaben an; und ist insonderheit dieser Fall merkwürdig, wo immer ein Vordersatz dem vorigen Hintersatze gleich ist. Also wenn die gegebenen Verhältnisse sind.

a : b

$$\begin{array}{ccc} a & : & b \\ b & : & c \\ c & : & d \\ d & : & e \\ e & : & a \\ \hline \end{array}$$

so ist das zusammengesetzte Verhältniß wie 1 : 1

491.

Um den Nutzen dieser Lehre zu zeigen, so bemerke man, daß zwey viereckigte Felder unter sich ein solches Verhältniß haben, welches zusammengesetzt ist aus den Verhältnissen ihrer Längen und ihrer Breiten.

Es seyn z. E. zwey solche Felder A und B. Von jenem sey die Länge 500 Fuß, die Breite aber 60 Fuß. Von diesem sey die Länge 360 Fuß und die Breite 100 Fuß; so ist das Verhältniß der Länge wie 500 : 360 und der Breite wie 60 : 100. Also stehet es

$$\begin{array}{lcl} \cancel{500},\ 5 & : & 6,\ \cancel{360} \\ \cancel{60} & : & \cancel{100} \\ \hline 5 & : & 6 \end{array}$$

Also verhält sich das Feld A zu dem Felde B wie 5 zu 6.

492.

Ein anderes Exempel. Das Feld A sey 720 Fuß lang und 88 Fuß breit: das Feld B aber sey

 660

660 Fuß lang und 90 Fuß breit, so muß man folgende zwey Verhältnisse zusammensetzen

Verhältniß der Längen	$\cancel{720}$, $\cancel{8}$,	:	15, $\cancel{60}$, $\cancel{660}$
Verhältniß der Breiten	$\cancel{80}$, $\cancel{8}$, 2	:	$\cancel{00}$
	16	:	15

Und dieses ist das Verhältniß der Felder A und B.

493.

Um ferner den Raum oder Inhalt zweyer Zimmer gegen einander zu vergleichen, so ist zu wissen daß ihr Verhältniß aus dreyen zusammengesetzt ist; nemlich aus dem Verhältnisse der Länge, der Breite und der Höhe. Es sey z. E. ein Zimmer A, dessen Länge = 36 Fuß, die Breite = 16 Fuß und die Höhe = 14 Fuß. Von einem andern Zimmer B aber sey die Länge = 42 Fuß, die Breite = 24 Fuß und die Höhe = 10 Fuß, so sind die drey Verhältnisse.

der Länge	$\cancel{36}$, $\cancel{6}$, $\cancel{3}$	:	$\cancel{42}$, $\cancel{6}$
der Breite	$\cancel{16}$, 2,	:	$\cancel{24}$, $\cancel{3}$
der Höhe	$\cancel{14}$, 2,	:	$\cancel{10}$, 5
	4	:	5

Also ist der Inhalt des Zimmers A zu dem Inhalte des Zimmers B wie 4 zu 5.

494.

Wenn die Verhältnisse, welche man solchergestalt zusammensetzt, einander gleich sind, so entstehen daher vervielfältigte Verhältnisse. Nemlich aus zwey gleichen entsteht ein verdoppeltes oder quadratisches Verhältniß; aus drey gleichen ein dreyfältiges oder cubisches, und so fort. Also aus den Verhältnissen $a : b$ und $a : b$ ist das zusammengesetzte Verhältniß $aa : bb$; dahero sagt man die Quadraten stehen in einem doppelten Verhältnisse ihrer Wurzel. Und aus dem Verhältnisse $a : b$ dreymal gesetzt, entsteht das Verhältniß $a^3 : b^3$, dahero sagt man daß die Cubi ein dreyfaches Verhältniß ihrer Wurzel haben.

495.

In der Geometrie wird gezeigt, daß sich zwey Cirkelrunde Plätze in den doppelten Verhältnissen ihrer Durchmesser verhalten, daß will so viel sagen, daß sie sich verhalten wie die Quadrate ihrer Durchmesser.

Es ist ein solcher Platz A dessen Durchmesser = 45 Fuß, eines andern Cirkelrunden Platzes B Durchmesser sey = 30 Fuß, so wird sich jener

Platz zu diesem verhalten wie 45. 45 zu 30. 30, oder ihr Verhältniß ist aus diesen zwey gleichen Verhältnissen zusammengesetzt

$$\begin{array}{rcl} \cancel{45},\ \cancel{5},\ 3 & : & \cancel{30},\ \cancel{6},\ 2 \\ \cancel{45},\ \cancel{9},\ 3 & : & \cancel{30},\ \cancel{6},\ 2 \\ \hline 9 & : & 4 \end{array}$$

Folglich verhalten sich diese Plätze wie 9 zu 4.

469.

Ferner wird auch bewiesen, daß sich die Inhalte runder Kugeln, wie die Cubi ihrer Durchmesser verhalten. Wenn also der Durchmesser einer Kugel A ein Fuß ist, und einer andern Kugel B zwey Fuß ist, so wird der Inhalt der Kugel A sich zum Inhalt der Kugel B verhalten wie $1^3 : 2^3$ oder wie $1 : 8$.

Wenn also die Kugeln aus einerley Materie bestehen, so wird die Kugel B achtmal schwerer seyn als die Kugel A.

497.

Hieraus kann man das Gewicht der Kanonen-Kugeln aus ihren Durchmessern finden, wenn man nur von einer das Gewicht hat. Es sey zum Exempel eine Kugel A, deren Durchmesser = 2 Zoll, und die fünf ℔ schwer ist, man fragt nach dem Gewicht einer andern Kugel B, deren Durchmesser = 8 Zoll ist. Hier hat man nun diese Proportion $2^3 : 8^3 = 5 :$ giebt 320 ℔, und dieses ist das Gewicht der Kugel B. Von einer andern Kugel C aber, deren Durchmesser = 15 Zoll, wird das Gewicht gefunden

$2^3 : 15^3 = 5 : \ldots$ Antwort $2109\frac{3}{8}$ ℔.

498.

Sucht man das Verhältniß zweyer Brüche, als $\frac{a}{b} : \frac{c}{d}$ so kann dasselbe immer durch ganze Zahlen ausgedrückt werden: denn man darf nur beyde Brüche mit bd multipliciren, so kommt dieses Verhältniß $ad : bc$ heraus welches jenem gleich ist, dahero diese Proportion entsteht $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = ad : bc$. Läßt sich nun ad gegen bc noch abkürzen, so wird das Verhältniß noch leichter. Also $\frac{15}{24} : \frac{25}{36} = 15.36 : 24.25 = 9 : 10$.

499.

Es wird ferner gefragt wie sich diese Brüche $\frac{1}{a}$ und $\frac{1}{b}$ gegen einander verhalten, da ist denn so gleich klar daß seyn werde $\frac{1}{a} : \frac{1}{b} = b : a$, welches also mit Worten ausgesprochen wird; das sich zwey Brüche deren Zähler 1 sind unter sich verhalten umgekehrt wie ihre Nenner. Dieses gilt auch von zwey Brüchen, welche gleiche Zähler haben. Denn da $\frac{c}{a} : \frac{c}{b} = b : a$, so sind sie gleich-

gleichfalls umgekehrt wie ihre Nenner. Haben aber zwey Brüche gleiche Nenner, als $\frac{a}{c}:\frac{b}{c}$, so verhalten sie sich wie die Zähler nemlich wie a:b. Also ist $\frac{3}{8}:\frac{3}{16}=\frac{6}{16}:\frac{3}{16}=6:3=2:1$ und $\frac{10}{7}:\frac{15}{7}=10:15$ oder $2:3$.

500.

Bey dem freyen Fallen der Cörper hat man bemerket, daß in einer Secunde ein Cörper 15 Fuß tief herab falle, in zwey Secunden aber falle er durch eine Höhe von 60 Fuß, und in drey Secunden 135 Fuß, daraus hat man nun geschlossen, daß sich die Höhen verhalten wie die Quadraten der Zeiten; und also auch rückwärts die Zeiten wie die Quadrat-Wurzeln aus den Höhen.

Fragt man nun wie viel Zeit ein Stein brauche um aus einer Höhe von 2160 Fuß herunter zu fallen: so ist $15:2160=1:$ das Quadrat der gesuchten Zeit.

Also ist das Quadrat der gesuchten Zeit 144, die Zeit aber selbst 12 Secunden.

501.

Man fragt, wie tief ein Stein in einer Stunde herunter fallen könne, das ist in 3600 Secunden?

Man sagt also: wie die Quadraten der Zeiten, das

das ist wie $1^2:3600^2$ also verhält sich die gegebene Höhe $=15$ Fuß, zu der gesuchten Höhe.

$$\begin{array}{r} 1:12960000=15 \text{ zu} \ldots \\ 15 \\ \hline 64800000 \\ 1296 \\ \hline 194400000 \end{array}$$

Antwort 194400000 Fuß.

Rechnen wir nun 24000 Fuß auf eine teutsche Meile, so wird diese Höhe seyn 8100 Meilen, welche Höhe größer ist als die ganze Erde dick ist.

502.

Eine gleiche Bewandniß hat es mit dem Preise der Edelsteine, welche sich nicht nach ihrem Gewichte selbst, sondern nach einem größern Verhältnisse richten. Bey den Diamanten gilt diese Regul, daß sich der Preis wie das Quadrat des Gewichts verhalte, oder das Verhältniß der Preise ist gleich dem gedoppelten Verhältnisse des Gewichts. Dieselben werden nun nach einem Gewichte, welches ein Karath genennt wird, und vier Gran hält, gewogen. Wenn nun ein Diamant von einem Karath zwey Rubel gilt, so wird ein Diamant von 100 Karath so viel mal mehr gelten, als das Quadrat

drat von 100 größer ist wie das Quadrat von 1. Also muß die Regeldetrie so gesetzt werden

$1^2 : 100^2 = 2$ Rubel:

oder $1 : 10000, = 2$ Rbl. zu ... Antwort 20000 Rbl.

In Portugal befindet sich ein Diamant von 1680 Karath dessen Preis demnach also gefunden wird.

$1^2 : 1680^2 = 2$ Rubel, : — oder

$1 : 2822400 = 2 : \ldots$ Antwort 5644800 Rubel.

503.

Von zusammengesetzten Verhältnissen geben die Posten ein merkwürdiges Exempel, weil das Postgeld nach einem zusammengesetzten Verhältnisse der Zahl der Pferde, und der Zahl der Meilen bezahlt werden muß. Wenn also für ein Pferd auf eine Meile 8 Gr. oder $\frac{1}{3}$ Rthl. bezahlt wird, und man wissen will wie viel vor 28 Pferde auf $4\frac{1}{2}$ Meilen bezahlt werden soll? so setzt man erstlich das Verhältniß der Pferde, das ist 1 : 28 darunter schreibt man das Verhältniß der Meilen 2 : 9 und setzt die zwey Verhältnisse zusammen

2 : 252 oder kürzer $1 : 126 = \frac{1}{3}$ zu ... Antwort 42 Rthl.

Wenn man für 8 Pferde auf 3 Meilen einen Ducaten bezahlt, wie hoch kommen 30 Pferde auf 4 Meilen zu stehen? hier kommt die Rechnung also zu stehen.

$\cancel{8}, \cancel{3}$

$$\begin{array}{l} \cancel{8}, \cancel{3} \;\vdots\; \cancel{30}, \cancel{18}, 5 \\ \;\;\cancel{8} \quad\;\; \vdots \;\; \cancel{4} \\ \hline \quad 1 : 5 = 1 \text{ Ducaten} : — \end{array}$$

Dahero ist die Bezahlung 5 Ducaten.

504.

Bey den Arbeitern kommt diese Zusammensetzung der Verhältnisse auch vor, da die Bezahlung nach der zusammengesetzten Verhältniß der Zahl der Arbeiter, und der Zahl der Tage geschehen muß.

Wenn also zum Exempel einem Maurer täglich 10 Gr. gegeben wird und man will wissen, wie viel an 24 Maurer, welche 50 Tage lang gearbeitet haben, bezahlt werden soll? so steht die Rechnung also

$$\begin{array}{l} 1 : 24 \\ 1 : 50 \\ \hline 1 : 1200 = 10 \text{ Gr.} : 500 \text{ Rthl.} \\ \qquad\quad 10 \\ \qquad \overline{12000} \text{ Gr.} \\ 3)\overline{\;\;4000\;\;} \\ 8)\overline{\;\;500\;\;} \text{ Rthl.} \end{array}$$

Weil

Weil in dergleichen Exempeln fünf Sätze gegeben sind, so wird in den Rechen-Büchern die Art dieselben zu berechnen die Regula Quinque genennt.

Capitel II.

Von den geometrischen Progressionen.

505.

Eine Reihe Zahlen, welche immer gleich vielmal größer oder kleiner werden, wird eine geometrische Progression genennt, weil immer ein jedes Glied zu dem folgenden in eben demselben geometrischen Verhältnisse stehet, und die Zahl welche anzeigt, wie viel mal ein jedes Glied größer ist, als das vorhergehende, wird der Nenner genennt; wenn also das erste Glied 1 ist und der Nenner $=2$, so ist die geometrische Progression folgende.

Glieder	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10.
Prog.	1,	2,	4,	8,	16,	32,	64,	128,	256,	512 etc.

506.

wo wir die Zeichen darüber gesetzt haben um anzuzeigen das wie vielte Glied ein jedes sey.

506.

Wann man überhaupt das erste Glied $=a$ und den Nenner $=b$ setzt, so kommt die Geometrische Progression also zu stehen:

$$\begin{array}{lccccccccc} & 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8 & \ldots\ n \\ \text{Progr.} & a, & ab, & ab^2, & ab^3, & ab^4, & ab^5, & ab^6, & ab^7 & \ldots\ ab^{n-1} \end{array}$$

Wann also diese Progression aus n Gliedern besteht, so ist das letzte $=ab^{n-1}$. Hierbey ist zu mercken, wann der Nenner b größer ist als 1, daß die Glieder immer größer werden; ist aber der Nenner $b=1$ so bleiben die Glieder immer einander gleich, und ist der Nenner b kleiner als 1, oder ein Bruch so werden die Glieder auch immer kleiner. Also wann $a=1$ und $b=\frac{1}{2}$, so bekommt man diese Geometrische Progression:

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{16},\ \frac{1}{32},\ \frac{1}{64},\ \frac{1}{128}\ \text{etc.}$$

507.

Hierbey kommen nachfolgende Stücke zu betrachten vor

I.) das erste Glied welches hier a genannt wird;
II.) der Nenner, welcher hier b genannt wird;
III.) die Anzahl der Glieder welche $= n$ gesetzt worden;
IV.) das letzte Glied welches gefunden worden $= ab^{n-1}$.

Dahero wann die 3 ersten Stücke gegeben sind, so wird das letzte Glied gefunden wann man die $n-1$ste Potestät des Nenners b, das ist b^{n-1} mit dem ersten Gliede a multiplicirt.

Wollte man nun von dieser Geometrischen Progression 1, 2, 4, 8 etc. das 50ste Glied wissen, so ist hier $a=1$, $b=2$ und $n=50$. Dahero das 50ste Glied seyn wird $= 2^{49}$. Da nun $2^5 = 512$, so ist $2^{10} = 1024$. Hiervon das Quadrat genommen, giebt $2^{20} = 1048576$. Hiervon wieder das Quadrat genommen, giebt 2^{40} 1099511627776. Wann man nun 2^{40} mit $2^9 = 512$ multiplicirt, so bekommt man $2^{49} = 512.$ $1099511627776 = 562949953421312$.

508.

Hierbey pflegt nun insonderheit gefragt zu werden, wie man die Summe von allen Gliedern einer solchen Progression finden soll, welches wir hier folgendergestalt zeigen wollen. Es sey erstlich diese Progression von zehn Gliedern gegeben 1, 2,

4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512 wovon wir die Summe durch den Buchstaben $\int$ andeuten wollen, also daß

$$\int = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 + 256 + 512$$

so wird dieses doppelt genommen geben:

$$2\int = 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 + 256 + 512 + 1024.$$

Hiervon nehme man nun die obige Progression weg, so bleibt übrig:

$\int = 1024 - 1 = 1023$; also ist die gesuchte Summe $= 1023$.

509.

Laßt uns nun bey eben dieser Progression die Anzahl der Glieder unbestimmt annehmen und $= n$ setzen, also daß die Summe seyn wird $\int = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 \ldots\ 2^{n-1}$. Dieses mit 2 multiplicirt giebt $2\int = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 \ldots\ldots 2^n$, von diesen subtrahirt man jenes, so bekommt man $\int = 2^n - 1$. Dahero wird die gesuchte Summe gefunden, wann man das letzte Glied 2^{n-1} mit dem Nenner 2 multipliciret um zu bekommen 2^n, und von diesem Product 1 subtrahirt.

510.

Dieses wollen wir durch folgende Exempel, indem wir vor n nach und nach 1, 2, 3, 4, schreiben werden, erläutern; als $1=1$, $1+2=3$, $1+2+4=7$, $1+2+4+8=15$, $1+2+4+8+16=31$, $1+2+4+8+16+32=63$. etc.

511.

Hier pflegt diese Frage vorzukommen: Einer verkauft sein Pferd nach den Hufnägeln, deren 32 sind: für den ersten Nagel fordert er 1 Pfennig, für den zweyten 2 Pfennig, für den dritten 4 Pfennig, für den vierten 8 Pfennig und immer für den folgenden zweymal so viel als für den vorigen. Nun ist die Frage, wie hoch dieses Pferd verkauft worden?

Hier muß also diese Geometrische Progression 1, 2, 4, 8, 16, 32 etc. bis auf das 32ste Glied fortgesetzt und die Summa von allen gesucht werden. Da nun das letzte Glied seyn wird $=2^{31}$, so ist oben schon gefunden worden $2^{20}=1048576$, dieses multiplicirt man mit $2^{10}=1024$, um zu haben $2^{30}=1073741824$. Dieses mit 2 multiplicirt, giebt das letzte Glied $2^{31}=2147483648$; folglich wird die Summe gleich seyn dieser Zahl doppelt genommen weniger 1: das ist 4294967295 Pfennige.

2)

2) 4294967295 Pf.

6) 2147483647 1.

oder 357913941 Gr. 3 Pf.

3) 357913941

8) 119304647

oder 14913080 Rthlr. 21 Gr. 3 Pf.

Also wird der Preis des Pferdes seyn 14913080 Rthlr. 21 Gr. 3 Pf.

512.

Es sey nun der Nenner $=3$ und die Geometrische Progression sey 1, 3, 9, 27, 81, 243, 729, und von diesen 7 Gliedern soll die Summe gefunden werden. Man setze dieselbe so lange $=\int$, also daß

$$\int = 1+3+9+27+81+243+729.$$

Man multiplicire mit 3 um zu haben

$$3\int = 3+9+27+81+243+729+2187.$$

Hiervon subtrahire man die obige Reihe, so bekommt man $2\int=2187-1=2186$. Dahero ist die gedoppelte Summe $=2186$ und folglich die Summe 1093.

513.

In eben dieser Progression sey die Anzahl der Glieder $=n$ und die Summe $=\int$, also daß $\int=1+3+3^2+3^3+3^4+\ldots 3^{n-1}$, dieses mit 3 multiplicirt

giebt

giebt $3s = 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + \ldots 3^n$. Hieven subtrahire man das obige; und weil sich alle Glieder der untern Reihe, außer den letzten, gegen alle Glieder der obern, außer den ersten, aufheben, so bekommt man $2s = 3^n - 1$ und also $s = \frac{3^n - 1}{2}$.

Also wird die Summe gefunden, wann man das letzte Glied mit 3 multiplicirt, vom Product 1 subtrahirt, und den Rest durch 2 theilt, wie aus folgenden Exempeln zu ersehen; $1 = 1$, $1 + 3 = \frac{3.3 - 1}{2} = 4$, $1 + 3 + 9 = \frac{3.9 - 1}{2} = 13$, $1 + 3 + 9 + 27 = \frac{3.27 - 1}{2} = 40$, $1 + 3 + 9 + 27 + 81 = \frac{3.81 - 1}{2} = 121$.

514.

Nun sey auf eine allgemeine Art das erste Glied $= a$, der Nenner $= b$, die Anzahl der Glieder $= n$ und die Summe derselben $= s$, also daß

$$s = a + ab + ab^2 + ab^3 + ab^4 + \ldots ab^{n-1}.$$

Dieses werde multiplicirt mit b, so bekommt man $bs = ab + ab^2 + ab^3 + ab^4 + \ldots ab^n$. Hiervon subtrahire man das obige so erhält man $(b-1).s = ab^n - a$.

Daher bekommt man die gesuchte Summe $s = \frac{ab^n - a}{b - 1}$.

Und so wird die Summe einer jeden Geometrischen

schen Progression gefunden, wann man das letzte Glied mit dem Nenner der Progression multiplicirt; von dem Product das erste Glied subtrahirt, und den Rest durch den Nenner weniger 1 dividirt.

515.

Man habe eine Geometrische Progression von 7 Gliedern; das erste $= 3$ und der Nenner $= 2$, so ist $a = 3$, $b = 2$ und $n = 7$, folglich das letzte Glied $3 . 2^6$, das ist $3 . 64 = 192$, und die Progression selbst: 3, 6, 12, 24, 48, 96, 192, und also das letzte Glied 192 mit dem Nenner 2 multiplicirt, giebt 384, davon das erste Glied 3 subtrahirt, bleibt 381, dieser Rest durch $b - 1$, das ist, durch 1 dividirt, giebt 381, welches die Summa der Progression ist.

516.

Es sey ferner eine Geometrische Progression von sechs Gliedern gegeben, davon das erste 4 und der Nenner $\frac{3}{2}$; also daß die Progression ist

$$4,\ 6,\ 9,\ \frac{27}{2},\ \frac{81}{4},\ \frac{243}{8};$$

dieses letzte Glied $\frac{243}{8}$ mit dem Nenner $\frac{3}{2}$ multiplicirt giebt $\frac{729}{16}$, davon das erste Glied 4 subtrahirt giebt

giebt $\frac{665}{16}$, endlich dieser Rest dividirt durch $b-1=\frac{1}{2}$ giebt $\frac{665}{8}=83\frac{1}{8}$.

517.

Wann der Nenner kleiner ist als 1 und also die Glieder der Progression immer abnehmen, so kann die Summe einer solchen Progression, die ohne Ende fortläuft, angegeben werden.

Es sey z. E. das erste Glied $=1$, der Nenner $=\frac{1}{2}$ und die Summa $=\int$, also daß

$$\int=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}\text{ etc. ohne Ende.}$$

Man multiplicire mit 2, so bekommt man:

$$2\int=2+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}\text{ etc. ohne Ende.}$$

Hiervon ziehe man das obige ab, so bleibt $\int=2$ welches die Summe der unendlichen Progression ist.

518.

Es sey ferner das erste Glied $=1$, der Nenner $\frac{1}{3}$ und die Summa $=\int$, also daß

$$\int=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}\text{ etc. ohne Ende.}$$

Man multiplicire alles mit 3, so hat man:

$$3\int=3+1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}\text{ etc. ohne Ende.}$$

Hiervon nehme man die obige Reihe weg, so bleibt $2\int=3$, folglich ist die Summa $=1\frac{1}{2}$.

519.

Es sey ferner das erste Glied $=2$, der Nenner $=\frac{3}{4}$, die Summe $=\int$ also daß $\int=2+\frac{3}{2}+\frac{9}{8}+\frac{27}{32}+\frac{81}{128}$ etc. ohne Ende. Dieses multiplicire man mit $\frac{4}{3}$ so hat man $\frac{4}{3}\int=\frac{8}{3}+2+\frac{3}{2}+\frac{9}{8}+\frac{27}{32}+\frac{81}{128}$ etc. ohne Ende. Hiervon das obige subtrahirt, bleibt $\frac{1}{3}\int=\frac{8}{3}$, also die Summe selbst wird gerade 8 seyn.

520.

Wann überhaupt das erste Glied gesetzt wird $=a$ und der Nenner der Progression $=\frac{b}{c}$, so daß dieser Bruch kleiner ist als 1 und folglich b kleiner ist als c, so kann die Summe dieser unendlichen Progression folgendergestalt gefunden werden. Man setzt

$$\int=a+\frac{ab}{c}+\frac{ab^2}{c^2}+\frac{ab^3}{c^3}+\frac{ab^4}{c^4}\text{ etc. ohne Ende.}$$

Hier multiplicirt man mit $\frac{b}{c}$, so bekommt man

$$\frac{b}{c}\int=\frac{ab}{c}+\frac{ab^2}{c^2}+\frac{ab^3}{c^3}+\frac{ab^4}{c^4}\text{ etc. ohne Ende.}$$

Dieses subtrahirt man von dem obigen, so bleibt

$$\left(1-\frac{b}{c}\right)\int=a,\text{ folglich ist }\int=\frac{a}{1-\frac{b}{c}}.$$

Multiplicirt man nun oben und unten mit c, so bekommt man $\int=\frac{ac}{c-b}$, dahero ist die Summe dieser unendlichen Geometrischen Progression

$$= \frac{a}{1 - \frac{b}{c}} \text{ oder } = \frac{ac}{c-b}.$$

Diese Summe wird folglich gefunden wann man das erste Glied a dividirt durch 1 weniger dem Nenner; oder man subtrahirt den Nenner von 1, und durch den Rest dividirt man das erste Glied so bekommt man die Summe.

521.

Wann in solchen Progressionen die Zeichen + und — mit einander abwechseln, so kann die Summe auf eben dieselbe Art gefunden werden. Dann es sey

$$\int = a - \frac{ab}{c} + \frac{ab^2}{c^2} - \frac{ab^3}{c^3} + \frac{ab^4}{c^4} \text{ etc.}$$

dieses multiplicire man mit $\frac{b}{c}$ so bekommt man

$$\frac{b}{c}\int = \frac{ab}{c} - \frac{ab^2}{c^2} + \frac{ab^3}{c^3} - \frac{ab^4}{c^4} \text{ etc.}$$

dieses addire man zu dem obigen so erhält man $(1 + \frac{b}{c})\int = a$. Hieraus findet man die gesuchte Summe $\int = \frac{a}{1+\frac{b}{c}}$ oder $\int = \frac{ac}{c+b}$.

522.

Es sey z. E. das erste Glied $a = \frac{3}{5}$ und der Nenner der Progression $= \frac{2}{5}$, das ist $b = 2$ und $c = 5$, so

so wird von dieser Reihe $\frac{3}{5} + \frac{6}{25} + \frac{12}{125} + \frac{24}{625}$ etc. die Summe also gefunden: der Nenner von 1 subtrahirt bleibt $\frac{3}{5}$, dadurch muß man das erste Glied $\frac{3}{5}$ dividiren, so bekommt man die Summe $= 1$.

Wann aber die Zeichen + und — abwechseln und diese Reihe vorgelegt ist:

$$\frac{3}{5} - \frac{6}{25} + \frac{12}{125} - \frac{24}{625} \text{ etc.}$$

so wird die Summe seyn

$$\frac{a}{1+\frac{b}{c}} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{7}{5}} = \frac{3}{7}.$$

523.

Zur Uebung soll diese unendliche Progression vorgelegt seyn

$$\frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \frac{3}{10000} + \frac{3}{100000} \text{ etc.}$$

Hier ist das erste Glied $\frac{3}{10}$ und der Nenner $\frac{1}{10}$. Dieser von 1 subtrahirt bleibt $\frac{9}{10}$. Hierdurch das erste Glied dividirt, giebt die Summe $= \frac{1}{3}$. Nimmt man nur ein Glied $\frac{3}{10}$, so fehlt noch $\frac{1}{10}$. Nimmt man zwey Glieder $\frac{3}{10} + \frac{3}{100} = \frac{33}{100}$, so fehlt noch $\frac{1}{100}$ zu $\frac{1}{3}$.

524.

Wann diese unendliche Reihe gegeben ist

$$9 + \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + \frac{9}{10000} \text{ etc.}$$

so ist das erste Glied 9, und der Nenner $\frac{1}{10}$. Also

Also 1 weniger denn der Nenner ist $\frac{9}{10}$. Hierdurch das erste Glied 9 dividirt, so wird die Summe = 10. Hier ist zu bemerken, daß diese Reihe durch einen Decimal-Bruch also vorgestellet wird 9, 9999999 etc.

Capitel 12.

Von den unendlichen Decimal-Brüchen.

525.

Wir haben schon oben gesehen, daß bey den Logarithmischen Rechnungen anstatt der gemeinen Brüche Decimal-Brüche gebraucht werden; welches auch bey den andern Rechnungen mit großen Vortheil geschehen kann. Es kommt also darauf an, zu zeigen, wie ein gemeiner Bruch in einen Decimal-Bruch verwandelt werde, und wie man den Werth eines Decimal-Bruchs hinwiederum durch einen gemeinen Bruch ausdrücken soll.

526.

Es sey auf eine allgemeine Art der gegebene Bruch $\frac{a}{b}$, welcher in einem Decimal-Bruch verwandelt werden soll. Da nun dieser Bruch den Quotus ausdrückt, welcher entspringt, wann man den Zähler a durch den Nenner b dividirt, so schreibe man anstatt a diese Form a, 0000000, welche offenbar nichts anders anzeigt als die Zahl a, weil keine 10tel, keine 100tel und so fort dabey sind. Diese Form theile man nun durch die Zahl b, nach den gewöhnlichen Regeln der Division, wobey man nur in Acht zu nehmen hat, daß das Comma welches die Decimal-Brüche von den gantzen Zahlen absondert, an seinen gehörigen Ort gesetzt werde. Dieses wollen wir nun durch nachfolgende Exempel erläutern.

Es sey erstlich der gegebene Bruch $\frac{1}{2}$, so kommt die Decimal-Division wie folget zu stehen.

$$\frac{2)\ 1,0000000}{0,\ 5000000} = \frac{1}{2}.$$

Hieraus sehen wir daß $\frac{1}{2}$ so viel sey als 0,5000000, oder als 0,5 welches auch offenbar ist, indem dieser Decimal-Bruch $\frac{5}{10}$ anzeigt, welches eben so viel ist als $\frac{1}{2}$.

527.

Es sey ferner der gegebene Bruch $\frac{1}{3}$ so hat man diesen Decimal-Bruch

$$\frac{3)\ 1,\ 0000000}{0,\ 3333333}\ \text{etc.} = \frac{1}{3}.$$

Hieraus sieht man daß dieser Decimal-Bruch, dessen Werth = $\frac{1}{3}$ ist, nirgend abgebrochen werden kann, son-

sondern ins Unendliche durch lauter 3 fortläuft. Also machen alle diese Brüche $\frac{3}{10}+\frac{3}{100}+\frac{3}{1000}+\frac{3}{10000}$ etc. ohne Ende zusammen genommen gerade so viel als $\frac{1}{3}$, wie wir schon oben gezeigt haben.

Für $\frac{2}{3}$ findet man folgenden Decimal-Bruch der auch ins Unendliche fortläuft.

$$3)\ \frac{2,0000000}{0,6666666}\ \text{etc.} = \frac{2}{3}$$

welches auch aus dem vorigen klar ist, weil dieser Bruch zweymal so groß ist als der vorige.

528.

Es sey der gegebene Bruch $\frac{1}{4}$, so hat man diese Decimal-Division.

$$4)\ \frac{1,0000000}{0,2500000} = \frac{1}{4}$$

also ist $\frac{1}{4}$ so viel als 0,2500000, oder als 0,25, welches daher klar ist, daß $\frac{2}{10}+\frac{5}{100}=\frac{25}{100}=\frac{1}{4}$. Eben so bekommt man für $\frac{3}{4}$ diesen Decimal-Bruch

$$4)\ \frac{3,0000000}{0,7500000} = \frac{3}{4}.$$

also ist $\frac{3}{4}=0,75$ das ist $\frac{7}{10}+\frac{5}{100}=\frac{75}{100}$ welcher Bruch durch 25 abgekürzt, giebt $\frac{3}{4}$.

Wollte man $\frac{5}{4}$ in einen Decimal-Bruch verwandeln, so hätte man

$$4)\ \frac{5,0000000}{1,2500000} = \frac{5}{4},$$

dieses ist aber $1+\frac{25}{100}$, daß ist $1+\frac{1}{4}=\frac{5}{4}$.

529.

Auf solche Art wird $\frac{1}{5}=0,2$: und $\frac{2}{5}=0,4$; ferner $\frac{3}{5}=0,6$; $\frac{4}{5}=0,8$ und $\frac{5}{5}=1$, weiter $\frac{6}{5}=1,2$ etc.

Wann der Nenner 6 ist, so finden wir $\frac{1}{6}=0,1666666$ etc. welches so viel ist als $0,666666-0,5$. Nun aber ist $0,666666=\frac{2}{3}$ und $0,5=\frac{1}{2}$, folglich ist $0,1666666=\frac{2}{3}-\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$.

Ferner findet man $\frac{2}{6}=0,3333333$ etc. $=\frac{1}{3}$; hingegen $\frac{3}{6}$ wird $0,5000000=\frac{1}{2}$. Weiter wird $\frac{5}{6}=0,833333=0,3333333+0,5$, daß ist $\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{5}{6}$.

530.

Wann der Nenner 7 ist, so werden die Decimal-Brüche mehr verwirrt: Also für $\frac{1}{7}$ findet man 0,142857 etc. wobey zu merken, daß immer diese sechs Zahlen 142857 wieder vorkommen. Um nun zu zeigen daß dieser Decimal-Bruch gerade $\frac{1}{7}$ ausmache, so verwandele man denselben in eine Geometrische Progression, wovon das erste Glied $=\frac{142857}{1000000}$, der Nenner aber $=\frac{1}{1000000}$; also wird die Summe $=\frac{\frac{142857}{1000000}}{1-\frac{1}{1000000}}$.

Man multiplicire oben und unten mit 1000000, so wird die Summa $=\frac{142857}{999999}=\frac{1}{7}$.

531.

Daß der gefundene Decimal-Bruch just $\frac{1}{7}$ betrage, kann folgendergestalt noch leichter gezeigt werden. Man setze für den Werth desselben den Buchstaben s, also daß

$$
\begin{aligned}
s &= 0,142857142857142857 \text{ etc.}\\
\text{so wird } 10s &= 1,42857142857142857 \text{ etc.}\\
100s &= 14,2857142857142857 \text{ etc.}\\
1000s &= 142,857142857142857 \text{ etc.}\\
10000s &= 1428,57142857142857 \text{ etc.}\\
100000s &= 14285,7142857142857 \text{ etc.}\\
1000000s &= 142857,142857142857 \text{ etc.}\\
\text{Subtrahire } s &= 0,142857142857 \text{ etc.}\\
\hline
999999s &= 142857,
\end{aligned}
$$

Nun theile man durch 999999, so bekommt man $s = \frac{142857}{999999}$ und dieses ist der Werth des obigen Decimal-Bruchs $\frac{1}{7}$.

532.

Eben so verwandelt man $\frac{2}{7}$ in einen Decimal-Bruch 0,28571428 etc. Dieses leitet uns darauf wie man den Werth des vorigen Decimal-Bruchs den wir

wir s gesetzt haben leichter finden kann, weil dieser Bruch gerade zweymal so groß ist als der vorige und also $= 2s$; da wir nun gehabt haben

$$
\begin{aligned}
100s &= 14,28571428571 \text{ etc.}\\
\text{hiervon } 2s \text{ weggenommen } \quad 2s &= 0,28571428571 \text{ etc.}\\
\hline
\text{bleiben } 98s &= 14,\\
\text{dahero wird } s &= \tfrac{14}{98} = \tfrac{1}{7}.
\end{aligned}
$$

Ferner wird $\frac{3}{7} = 0,42857142857$ etc. dieses ist also nach dem obigen Satz $= 3s$; wir haben aber gefunden

$$
\begin{aligned}
10s &= 1,42857142857 \text{ etc.}\\
\text{subtrahire } 3s &= 0,42857142857 \text{ etc.}\\
\hline
\text{so wird } 7s &= 1, \text{ folglich } s = \tfrac{1}{7}.
\end{aligned}
$$

533.

Wann also der Nenner des gegebenen Bruchs 7 ist, so lauft der Decimal-Bruch ins Unendliche und werden darinnen 6 Zahlen immer wiederholt, wovon der Grund leicht einzusehen ist, weil bey fortgesetzter Division endlich einmal so viel übrig bleiben muß, als man anfänglich gehabt. Es können aber nicht mehre verschiedene Zahlen übrig bleiben, als 1, 2, 3, 4, 5, 6, also müssen von der 6ten Division an wieder eben die Zahlen herauskommen, als am Anfange. Wann aber der Nenner so beschaffen ist, daß die Division endlich aufgeht, so fällt dieses weg.

534.

Es sey der Nenner des Bruchs 8, so werden folgende Decimal-Brüche gefunden:
$\frac{1}{8} = 0,125$: $\frac{2}{8} = 0,250$: $\frac{3}{8} = 0,375$: $\frac{4}{8} = 0,500$: $\frac{5}{8} = 0,625$: $\frac{6}{8} = 0,750$: $\frac{7}{8} = 0,875$ etc.

535.

Ist der Nenner 9 so findet man folgende Decimal-Brüche $\frac{1}{9} = 0,111$ ꝛc. $\frac{2}{9} = 0,222$ ꝛc. $\frac{3}{9} = 0,333$ ꝛc. Ist aber der Nenner 10, so bekommt man folgende Brüche $\frac{1}{10} = 0,100$; $\frac{2}{10} = 0,2$; $\frac{3}{10} = 0,3$ wie aus der Natur der Sache erhellet. Eben so wird $\frac{1}{100} = 0,01$; $\frac{37}{100} = 0,37$; ferner $\frac{256}{1000} = 0,256$; weiter $\frac{24}{10000} = 0,0024$; welches für sich deutlich ist.

536.

Es sey der Nenner des Bruchs 11, so findet man diesen Decimal-Bruch $\frac{1}{11} = 0,0909090$ etc. Wäre nun dieser Bruch gegeben und man wollte seinen Werth finden, so setze man denselben $= s$. Es wird also $s = 0,0909090$: und $10s = 00,909090$, weiter $100s = 9,09090$; hievon s subtrahirt, so wird $99s = 9$ und dahero $s = \frac{9}{99} = \frac{1}{11}$. Ferner wird $\frac{2}{11} = 0,181818$; $\frac{3}{11} = 0,272727$; $\frac{6}{11} = 0,545454$.

537.

Hier sind nun diejenigen Decimal-Brüche sehr merkwürdig, da einige Zahlen immer wiederholt werden und solchergestalt ins Unendliche fortgehen. Wie nun von solchen Brüchen der Werth leicht zu finden sey, soll sogleich gezeigt werden.

Es werde erstlich nur eine Zahl wiederholt, welche sey $= a$, so haben wir $s = 0,aaaaaaa$. Diesemnach wird

$10s = a,aaaaaaa$
subtrahire $s = 0,aaaaaaa$
so wird $9s = a$, folglich $s = \frac{a}{9}$.

Werden immer zwey Zahlen wiederholt, als ab, so hat man $s = 0,abababa$. Dahero wird $100s = ab,ababab$, hievon s subtrahirt, bleibt $99s = ab$; also $s = \frac{ab}{99}$.

Werden drey Zahlen als abc immer wiederholt, so hat man $s = 0,abcabcabc$; folglich $1000s = abc,abcabc$. hievon das obige subtrahirt, bleibt $999s = abc$; also $s = \frac{abc}{999}$ u. s. w.

538.

So oft also ein solcher Decimal-Bruch vorkommt, so ist es leicht seinen Werth anzuzeigen: also wann dieser gegeben wäre 0,296296; so wird sein Werth seyn $= \frac{296}{999}$. Diesen Bruch durch 37 abgekürzt, wird $= \frac{8}{27}$.

Hieraus muß nun hinwiederum der obige Decimal-Bruch entspringen: um dieses leichter zu zeigen weil $27 = 3 \cdot 9$, so theile man 8 erstlich durch 9, und den Quotus ferner durch 3, wie folget:

9) 8, 0000000
3) 0, 8888888
0, 2962962 etc.

welches der gegebene Decimal-Bruch ist.

539.

Um noch ein Exempel zu geben, so verwandele man diesen Bruch $\frac{1}{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10}$ in einem Decimal-Bruch, welches folgendergestalt geschieht:

2) 1, 0000000000000
3) 0, 5000000000000
4) 0, 1666666666666
5) 0, 0416666666666
6) 0, 0083333333333
7) 0, 0013888888888
8) 0, 0001984126984
9) 0, 0000248015873
10) 0, 0000027557319
0, 0000002755731 9.

Capi-

Capitel 13.

Von den Interessen-Rechnungen.

540.

Die Interessen oder Zinsen von einem Capital pflegen in Procento ausgedrückt zu werden, indem man sagt, wie viel von 100 jährlich bezahlt werden. Gemeiniglich wird das Geld zu 5 pro Cent ausgelegt, also daß von 100 Rthlr. jährlich 5 Rthlr. Interessen gezahlt werden. Hieraus ist nun klar und leicht den Zins von einem jeglichen Capitale zu berechnen, indem man nach der Regula de Tri sagt: 100 geben 5, was giebt das gegebene Capital? Es sey nun z. E. das Capital 860 Rthlr. so findet man den jährlichen Zins also:

100 : 5 = 860 zur Antwort 43 Rthlr.

5
100) 4300
43

541.

Bey Berechnung dieser einfachen Interessen wollen wir uns nicht aufhalten, sondern die Interes-

sen

sen auf Interessen betrachten, da jährlich die Zinsen wieder zum Capital geschlagen und dadurch das Capital vermehret wird, wobei dann gefragt wird: wie hoch ein gegebenes Capital nach Verfließung einiger Jahre anwachse? Da nun das Capital jährlich grösser wird, indem 100 Rthlr. zu 5 p. C. nach einem Jahr zu 105 anwachsen, so kann man daraus finden, wie groß ein jegliches Capital nach Verfließung eines Jahres werden müsse.

Es sey das Capital $= a$, so wird solches nach einem Jahre gefunden, wann man sagt 100 geben 105, was giebt a? Antwort $\frac{105a}{100} = \frac{21a}{20}$, welches auch also geschrieben werden kann $\frac{21}{20} \cdot a$ oder $a + \frac{1}{20} \cdot a$.

542.

Wann also zu dem gegenwärtigen Capitale sein 20ster Theil addirt wird, so bekommt man das Capital für das folgende Jahr. Wann man nun zu diesem wieder seinen 20sten Theil addirt, so findet man das Capital für das zweyte Jahr; und zu diesem wieder sein 20ster Theil addirt, giebt das Capital für das dritte Jahr, und so fort. Hieraus ist leicht zu sehen, wie das Capital jährlich anwächst, und kann diese Rechnung so weit fortgesetzt werden, als man will.

543.

Es sey das Capital jetzt 1000 Rthlr. welches zu 5 p C. angelegt ist, und die Zinsen davon jährlich wieder zum Capital geschlagen werden; weil nun die besagte Rechnung bald auf Brüche führen wird, so wollen wir solche in Decimal-Brüchen ausdrücken, aber nicht weiter als bis auf 1000ste Theile eines Rthlr. gehen, weil kleinere Theile hier in keine Betrachtung kommen.

Gegenwärtiges Capital von 1000 Rthlr. wird

nach 1 Jahr - - -	1050 Rthlr.
	52, 5
nach 2 Jahren - - -	1102, 5
	55, 125
nach 3 Jahren - - -	1157, 625
	57, 881
nach 4 Jahren - - -	1215, 506
	60, 775
nach 5 Jahren - - -	1276, 281 etc.

544.

544.

Solchergestalt kann man auf so viele Jahre fortgehen als man will.; wann aber die Anzahl der Jahre sehr groß ist, so wird diese Rechnung sehr weitläuftig und mühsam, sie läßt sich aber folgendergestalt abkürzen.

Es sey das gegenwärtige Capital $= a$ und da ein Capital von 20 Rthlr. nach einem Jahre 21 Rthlr. beträgt, so wird das Capital a nach einem Jahre auf $\frac{21}{20} \cdot a$ anwachsen. Ferner im folgenden Jahre auf $\frac{21}{20} \cdot a = (\frac{21}{20})^2 \cdot a$. Dieses ist nun das Capital nach zweyen Jahren, welches in einem Jahre wieder anwächst auf $(\frac{21}{20})^3 \cdot a$, welches das Capital nach drey Jahren seyn wird; nach 4 Jahren wird nun dasselbe seyn $(\frac{21}{20})^4 \cdot a$; nach 5 Jahren $(\frac{21}{20})^5 \cdot a$; nach 100 Jahren $(\frac{21}{20})^{100} \cdot a$; und allgemein nach n Jahren wird dasselbe seyn $(\frac{21}{20})^n \cdot a$; woraus man nach einer jeglichen beliebigen Zahl von Jahren die Größe des Capitals finden kann.

545.

Der hier vorkommende Bruch $\frac{21}{20}$ gründet sich darauf, daß die Interessen zu 5 p.C. gerechnet werden, und $\frac{21}{20}$ so viel ist als $\frac{105}{100}$. Sollten nun die Interessen zu 6 p.C. gerechnet werden, so würde das Capital a nach einem Jahre anwachsen auf $\frac{106}{100} \cdot a$; nach zwey Jahren auf $(\frac{106}{100})^2 \cdot a$; und nach n Jahren auf $(\frac{106}{100})^n \cdot a$.

Sollten aber die Interessen nur 4 p. C. betragen, so würde das Capital a nach n Jahren anwachsen auf $(\frac{104}{100})^n \cdot a$.

546.

Wann nun, sowohl das Capital a als die Anzahl der Jahre gegeben ist, so kann man diese Formul leicht auflösen, nemlich durch die Logarithmen. Dann man darf nur den Logarithmus von dieser Formul suchen, welche zu 5 p. C. ist $(\frac{21}{20})^n \cdot a$. Da nun dieselbe ein Product ist von $(\frac{21}{20})^n$ und a, so ist ihr Logarithmus $= l(\frac{21}{20})^n + l\,a$. Da weiter $(\frac{21}{20})^n$ eine Potestät ist, so ist $l(\frac{21}{20})^n = n\, l\frac{21}{20}$. Dahero ist der Logarithmus von dem gesuchten Capitale $= n \cdot l\frac{21}{20} + l\,a$. Es ist aber der Logarithmus des Bruchs $\frac{21}{20} = l\,21 - l\,20$.

547.

Es sey nun das Capital $= 1000$ Rthlr. und man frägt wie groß dasselbe nach 100 Jahren zu 5 p. C. seyn werde?

Hier ist also $n = 100$. Der Logarithmus von diesem gesuchten Capitale wird nun seyn $= 100\, l\frac{21}{20} + l\,1000$, welcher folgendergestalt gefunden wird

$$l\,21 = 1,3222193$$
$$\text{subtrah. } l\,20 = 1,3010300$$
$$l\,\tfrac{21}{20} = 0,0211893$$
$$\text{multiplic. mit } 100$$
$$100\,l\,\tfrac{21}{20} = 2,1189300$$
$$\text{addirt } l\,1000 = 3,0000000$$
$$5,1189300$$

dieses ist der Logarithmus des gesuchten Capitals und die Zahl desselben wird also aus 6 Figuren bestehen und also heissen 131501 Rthlr.

548.

Ein Capital von 3452 Rthlr. zu 6 Procent, wie groß wird dasselbe nach 64 Jahren?

Hier ist also $a = 3452$ und $n = 64$. Also der Logarithmus des gesuchten Capitals $= 64\,l\,\frac{53}{50} + l\,3452$, welches also berechnet wird:

$$l\,53 = 1,7242759$$
$$\text{subtrah. } l\,50 = 1,6989700$$
$$l\,\tfrac{53}{50} = 0,0253059$$
$$\text{mult. mit } 64;\ 64\,l\,\tfrac{53}{50} = 1,6195776$$
$$l\,3452 = 3,5380708$$
$$5,1576484$$

Also das gesuchte Capital = 143763 Rthlr.

349.

349.

Wann die Anzahl der Jahre sehr groß ist, womit der Logarithmus eines Bruchs multiplicir werden muß, die Logarithmen in den Tabellen aber nur auf 7 Figuren berechnet worden; so könnte daraus ein merklicher Fehler entstehen. Dahero muß der Logarithmus des Bruchs auf mehrere Figuren genommen werden, wie aus folgendem Exempel zu ersehen. Ein Capital von einem Rthlr. zu 5 p. C. bleibt 500 Jahre lang stehen, da inzwischen die jährlichen Zinsen immer dazu geschlagen worden: Nun frägt sichs wie groß dieses Capital nach 500 Jahren seyn werde?

Hier ist also $a = 1$ und $n = 500$: also der Logarithmus des gesuchten Capitals $= 500\,l\,\frac{21}{20} + l\,1$, woraus diese Rechnung entspringt

$$l\,21 = 1,322219294733919$$
$$\text{subtrahirt } l\,20 = 1,301029995663981$$
$$l\,\tfrac{1}{20} = 0,021189299069938$$
$$\text{mult. mit } 500 \text{ giebt } 10,594649534969000$$

dieses ist nun der Logarithmus des gesuchten Capitals welches dahero selbsten seyn wird = 39323200000 Rthlr.

550

550.

Wann man aber jährlich zu dem Capital nicht nur die Interessen schlagen, sondern noch jährlich eine neue Summa $= b$ darzu legen wollte, so wird das gegenwärtige Capital alle Jahr anwachsen wie folget. Gegenwärtig hat man a:

nach 1 Jahr $\frac{21}{20} a + b$
nach 2 Jahren $(\frac{21}{20})^2 a + \frac{21}{20} b + b$
nach 3 Jahren $(\frac{21}{20})^3 a + (\frac{21}{20})^2 b + \frac{21}{20} b + b$
nach 4 Jahren $(\frac{21}{20})^4 a + (\frac{21}{20})^3 b + (\frac{21}{20})^2 b + \frac{21}{20} b + b$
nach n Jahren $(\frac{21}{20})^n a + (\frac{21}{20})^{n-1} b + (\frac{21}{20})^{n-2} b + \ldots$
$\ldots + \frac{21}{20} b + b$

Dieses Capital besteht aus 2 Theilen, davon der erste $= (\frac{21}{20})^n a$, der andere aber aus dieser Reihe rückwärts geschrieben $b + (\frac{21}{20}) b + (\frac{21}{20})^2 a + (\frac{21}{20})^3 b + \ldots (\frac{21}{20})^{n-1} b$, besteht, welches eine Geometrische Progression ist, deren Nenner $= \frac{21}{20}$ ist. Die Summe davon wird nun also gefunden:

Man multiplicirt das letzte Glied $(\frac{21}{20})^{n-1} b$ mit dem Nenner $\frac{21}{20}$, so bekommt man $(\frac{21}{20})^n b$, davon subtrahirt man das erste Glied b, so bleibt $(\frac{21}{20})^n b - b$. Dieses muß durch 1 weniger als der Nenner ist dividirt werden, das ist durch $\frac{1}{20}$; dahero wird die Sum-

me der obigen Progression $= 20 (\frac{21}{20})^n b - 20 b$; folglich wird das gesuchte Capital seyn:

$(\frac{21}{20})^n a + 20 (\frac{21}{20})^n b - 20 b = (\frac{21}{20})^n (a + 20 b) - 20 b$.

551.

Um dieses nun auszurechnen, so muß man das erste Glied $(\frac{21}{20})^n (a + 20 b)$ besonders betrachten und berechnen, welches geschieht, wann man den Logarithmus desselben sucht, welcher ist $n\, l \frac{21}{20} + l(a + 20 b)$. Zu diesem sucht man in den Tabellen die gehörige Zahl, so hat man das erste Glied; davon subtrahirt man $20 b$, so bekommt man das gesuchte Capital.

552.

Frage: Einer hat ein Capital von 1000 Rthlr. zu 5 p. C. ausstehen, wozu er jährlich außer den Zinsen noch 100 Rthlr. hinzulegt, wie groß wird dieses Capital nach 25 Jahren seyn?

Hier ist also $a = 1000$; $b = 100$; $n = 25$; dahero wird die Rechnung stehen, wie folget:

$l \frac{21}{20} = 0,021189299$

multiplic. mit 25 giebt

$25\, l \frac{21}{20} = 0,5297324750$

6,

$$\begin{array}{r} 0,5297324750 \\ l(a+20b) = 3,4771213135 \\ \hline 4,0068537885 \end{array}$$

Also ist der erste Theil 10159, 1 Rthlr. davon subtrahirt $20b = 2000$, so ist das Capital nach 25 Jahren werth 8159, 1 Rthlr.

553.

Da nun das Capital immer größer wird und nach 25 Jahren auf $8159\frac{1}{10}$ Rthlr. angewachsen, so kann man weiter fragen, nach wie viel Jahren dasselbe bis 1000000 Rthlr. anwachsen werde? Es sey n diese Anzahl von Jahren, und weil $a = 1000$, $b = 100$, so wird nach n Jahren das Capital seyn: $(\frac{21}{20})^n (3000) - 2000$ dieses muß nun 1000000 Rthlr. seyn, woraus diese Gleichung entspringt:

$$3000 (\tfrac{21}{20})^n - 2000 = 1000000.$$

Man addire beyderseits 2000, so bekommt man

$$3000 (\tfrac{21}{20})^n = 1002000.$$

Man dividire beyderseits durch 3000 so hat man $(\frac{21}{20})^n = 334$. Hiervon nehme man die Logarithmi, so hat man $n . l\frac{21}{20} = l334$. Hier dividire man durch $l\frac{21}{20}$, so kommt $n = \frac{l334}{l\frac{21}{20}}$. Nun aber ist $l334 =$

2,

2,5237465 und $l\frac{21}{20} = 0,0211893$; dahero wird $n = \frac{2,5237465}{0,0211893}$. Man multiplicire oben und unten mit 10000000, so kommt $n = \frac{25237465}{211893}$, das ist 119 Jahr, 1 Monath, 7 Tage, und nach so langer Zeit wird das Capital anwachsen auf 1000000 Rthlr.

554.

Wann aber, anstatt daß alle Jahr etwas zum Capital gelegt, etwas davon weggenommen wird, so man auf seinen Unterhalt verwendet, und diese Summe $= b$ gesetzt wird, so wird das zu 5 p.C. angelegte Capital a, folgendergestalt fortgehen. Gegenwärtig ist es a:

nach 1 Jahr $\frac{21}{20} a - b$

nach 2 Jahren $(\frac{21}{20})^2 a - \frac{21}{20} b - b$

nach 3 Jahren $(\frac{21}{20})^3 a - (\frac{21}{20})^2 b - \frac{21}{20} b - b$

nach n Jahren $(\frac{21}{20})^n a - (\frac{21}{20})^{n-1} b - (\frac{21}{20})^{n-2} b \ldots$

$\ldots - (\frac{21}{20}) b - b.$

555.

Dasselbe wird uns also in zwey Stücken vorgelegt, das erste ist $(\frac{21}{20})^n a$; davon subtrahirt, wird diese Geometrische Progression rückwärts geschrieben:

$$b + \tfrac{21}{20} b + (\tfrac{21}{20})^2 b + \ldots (\tfrac{21}{20})^{n-1} b$$

Hier-

Hiervon ist oben die Summe gefunden worden $= 20 (\frac{21}{20})^n b - 20 b$, welche von dem ersten $(\frac{21}{20})^n a$ subtrahirt, das nach n Jahren gesuchte Capital giebt $(\frac{21}{20})^n (a - 20 b) + 20 b$.

556.

Diese Formul hätte sogleich aus der vorigen geschlossen werden können. Denn da vorher jährlich b addirt wurde, so wird nun jährlich b subtrahirt. Also darf man in der vorhergehenden Formul anstatt $+ b$ nur $- b$ schreiben. Hier ist nun insonderheit zu bemerken, daß wann $20 b$ größer ist als a, so wird das erste Glied negativ, und also das Capital immer kleiner; welches offenbar ist: dann wann vom Capital jährlich mehr weggenommen wird, als der Zins beträgt, so muß dasselbe alle Jahr kleiner werden und endlich gar verschwinden; welches wir noch mit einem Exempel erläutern wollen.

557.

Einer hat ein Capital von 100000 Rthlr. zu 5 p. C. ausstehen; braucht aber alle Jahr zu seinem Unterhalte 6000 Rthlr welches mehr ist als die Interessen von 100000 Rthlr. so nur 5000 Rthlr. betragen, dahero das Capital immer kleiner wird.

Nun ist die Frage, nach wie viel Jahren dasselbe gänzlich verschwinden werde.

Vor diese Anzahl Jahre setze man n, und da $a = 100000$ Rthlr. und $b = 6000$, so wird nach n Jahren das Capital seyn $= - 20000 (\frac{21}{20})^n + 120000$ oder $120000 - 20000 (\frac{21}{20})^n$. Also verschwindet das Capital, wann $20000 (\frac{21}{20})^n$ auf 120000 anwächst, oder wann $20000 (\frac{21}{20})^n = 120000$. Man dividire durch 20000, so kommt $(\frac{21}{20})^n = 6$, alsdann nehme man die Logarithmen, so kommt $n l \frac{21}{20} = l 6$, und dividire durch $l \frac{21}{20}$, so findet man $n = \frac{l 6}{l \frac{21}{20}} = \frac{0,7781513}{0,0211893}$, oder $n = \frac{7781513}{211893}$; folglich wird $n = 36$ Jahre 8 Monathe 22 Tage: und nach so langer Zeit wird es ganz verschwinden.

558.

Hier ist noch nöthig zu zeigen, wie nach diesem Grunde die Interessen auch für eine kürzere Zeit als ganze Jahre berechnet werden können. Hierzu dient nun auch die oben gefundene Formul, daß ein Capital zu 5 p. C. nach n Jahren auf $(\frac{21}{20})^n a$ anwächst; ist nun die Zeit kürzer als ein Jahr, so wird der Exponent n ein Bruch, und die Rechnung kann wie vorher durch Logarithmen gemacht werden. Sollte das Capital auf einem Tage gesucht werden, so muß man setzen $n = \frac{1}{365}$; will man es auf zwey Tage wissen, so wird $n = \frac{2}{365}$ etc.

559.

Es sey das Capital $a = 100000$ Rthlr. zu 5 p. C. wie groß wird solches nach 8 Tagen seyn?

Hier ist $a = 100000$ und $n = \frac{8}{365}$; folglich wird das Capital seyn $\left(\frac{21}{20}\right)^{\frac{8}{365}} 100000$. Hiervon ist der Logarithmus $= l\left(\frac{21}{20}\right)^{\frac{8}{365}} + l\,100000 = \frac{8}{365}\, l\,\frac{21}{20} + l\,100000$. Nun aber ist $l\,\frac{21}{20} = 0,0211892$, diesen mit $\frac{8}{365}$ multiplicirt, giebt $0,0004644$; hierzu addirt $l\,100000$ welcher ist $5,0000000$

$5,0004644$

so erhält man den Logarithmus von dem Capital $= 5,0004644$. Folglich ist das Capital selbst 100107 Rthlr. so daß in den ersten 8 Tagen die Interessen schon 107 Rthlr. betragen.

560.

Hieher gehören noch andere Fragen, welche darauf gehen, daß wenn eine Summe Geld erst nach einigen Jahren verfällt, wie viel dieselbe anjetzo werth sey. Hier ist zu bemerken, daß da 20 Rthlr über ein Jahr 21 Rthlr. betragen, so sind hinwiederum 21 Rthlr. die nach einem Jahre zahl-

bar sind, anjetzo nur 20 Rthlr. werth. Wann also das nach einem Jahre verfallene Capital a gesetzt wird, so ist desselben Werth $\frac{20}{21} a$. Um also zu finden wie viel das Capital a, so zu einer gewissen Zeit verfällt, ein Jahr früher werth sey, so muß man dasselbe multipliciren mit $\frac{20}{21}$; zwey Jahre früher ist dasselbe $\left(\frac{20}{21}\right)^2 a$; drey Jahre früher ist dasselbe $\left(\frac{20}{21}\right)^3 a$ und überhaupt n Jahre früher ist der Werth desselben $\left(\frac{20}{21}\right)^n a$.

561.

Einer genießt auf 5 Jahre lang eine jährliche Rente von 100 Rthlr. dieselbe wollte er nun für baares Geld zu 5 pro Cent verkaufen, wie viel wird er dafür bekommen?

Für die 100 Rthlr. welche verfallen

nach 1 Jahr bekommt er		95, 239
nach 2 Jahren	= = = =	90, 704
nach 3 Jahren	= = = =	86, 385
nach 4 Jahren	= = = =	82, 272
nach 5 Jahren	= = = .	78, 355
Summa alle 5 Jahren	= = =	432, 955

Also kann er für diese Rente nicht mehr fordern als 432, 955 Rthlr. oder 432 Rthlr. 22 Gr. 11 Pf.

562.

Sollte aber eine Rente längere Jahre dauren, so würde die Rechnung auf diese Art sehr mühsam werden, welche aber folgendergestalt erleichtert werden kann:

Es sey die jährliche Rente $= a$, welche jetzo schon anfängt und n Jahre lang dauret, so wird dieselbe anjetzo werth seyn:

$$a + \frac{20}{21}a + \left(\frac{20}{21}\right)^2 a + \left(\frac{20}{21}\right)^3 a + \left(\frac{20}{21}\right)^4 a + \ldots \left(\frac{20}{21}\right)^n a.$$

Dieses ist nun eine geometrische Progression deren Summe gefunden werden muß. Man multiplicirt also das letzte Glied mit dem Nenner, so hat man $\left(\frac{20}{21}\right)^{n+1} a$, davon das erste Glied subtrahirt, bleibt $\left(\frac{20}{21}\right)^{n+1} a - a$; dieses muß mit dem Nenner weniger eins, das ist, mit $-\frac{1}{21}$ dividirt, oder welches gleich viel, mit -21 multiplicirt werden: dahero wird die gesuchte Summe seyn $= -21\left(\frac{20}{21}\right)^{n+1} a + 21a$, das ist $21a - 21\left(\frac{20}{21}\right)^{n+1} a$, wovon das letztere Glied so subtrahirt werden soll, leicht durch Logarithmi berechnet werden kann.

Ende des ersten Theils

und des dritten Abschnitts.