Euklid: Die Elemente — eine Übersicht

Um das Jahr 300 v.Chr. wurden wesentliche Teile der an der Schule Platons betriebenen Mathematik in den *Elementen* des Euklid zusammengefaßt. Die 13 Bücher der *Elemente* sind einer der größten Erfolge der Weltliteratur, viele Generationen haben daraus Geometrie gelernt, an englischen Schulen hat man noch in der 2. Hälfte des 20. Jh. nach einer englischen Bearbeitung der *Elemente* Geometrie gelernt, daher heißt die Schulgeometrie in England einfach *Euclid*. Kein anderes mathematisches Werk hat eine solche langandauernde Wirkung für die Verbreitung der Mathematik gehabt wie dieses. Der heutige Text ist in Alexandria von Theon (4. Jh.) bearbeitet worden, mit Ausnahme des Kodex P aus dem 10. Jh. und einiger Papyrusfragmente gehen alle Handschriften auf die theonische Redaktion zurück. Von einigen Stellen wissen wir, daß sie schon im 1. Jh. durch Heron in den Text kamen, andere kamen durch Proklos im 5. Jh. hinzu. Bei einem so viel genutzten Lehrbuch kann man davon ausgehen, daß die Elemente schon in der Antike weitere Bearbeitungen erfahren haben, die meist Lücken schließen wollen, aber nur bisweilen wirklich mehr Klarheit brachten.

Platon hatte vier Lehrfächer [1)] (die 4 pythagoreischen Mathemata, das „Quadrivium" der mittelalterlichen Universität) als Vorbereitung zum Studium der Philosophie vorgeschrieben:

1. Arithmetik	3. Harmonielehre
2. Geometrie	4. Astronomie

In den *Elementen* behandelt Euklid die ersten beiden, in der *Sectio Canonis* die Harmonielehre, in den *Phainomena* die Astronomie im Sinne Platons, die Lehre von der sich gleichförmig drehenden Sphäre. Hier betrachten wir nur die *Elemente*.

Die Elemente des Euklid waren nicht das erste Werk seiner Art. Nach dem Mathematikerkatalog des Proklos (in seinem Kommentar zum I. Buch des Euklid) hatte schon Hippokrates im 5. Jh.v.Chr. seine *Elemente* geschrieben, eine umfangreichere und sorgfältigere Sammlung von *Elementen* mit mehr Beweisen schrieb Leon, der etwas älter als Eudoxos und etwas jünger als Platon war und auch Bedingungen angab für die Lösbarkeit einer Aufgabe; etwas jünger ist Theudios von Magnesia, ein Schüler Platons, dessen *Elemente* Proklos lobt, weil dieser viele Sätze allgemeiner als seine Vorgänger formulieren konnte; offenbar war dies das Textbuch der Akademie („Kein der Geometrie Unkundiger soll die Akademie betreten" sagte Platon), auf das sich auch Aristoteles bezog.

Euklid hat unter Benutzung der genannten *Elemente* und anderer Quellen die von den Pythagoreern überkommene Mathematik (Buch II bis IV für die Geometrie, Teile der Bücher VII bis IX für die Arithmetik) mit den neuen Erkenntnissen aus dem Kreis um Platon, vor allem mit den Lehren des Theaitet über quadratische Irrationalitäten und platonische Körper (Buch X und XIII) und des Eudoxos über die Proportionenlehre und die Inhaltslehre durch Exhaustion (Buch V und XII) zusammengefaßt zu einem großen, systematischen wenn auch nicht sehr einheitlichen Werk. Der Anfang des Buches I klingt wie mythische Sprüche der ionischen Naturphilosophen. Das mathematische Niveau ist unterschiedlich und wird von den Vorbildern bestimmt. Nach Proklos beruht Euklids Leistung im wesentlichen auf dem Sammeln der bekannten Mathematik, dem Sichten, was für die Zwecke der Elemente wichtig ist, und auf dem Feilen an den Beweisen. Dabei werden Wiederholungen, Parallelentwicklungen auf verschiedenem Niveau etc. nicht immer ausgeschlossen, und gerade am Anfang werden auch Lücken im Aufbau sichtbar.

Die folgende Übersicht will nur einen ersten Eindruck von dem mathematischen Inhalt dieses großen Werkes der Mathematikgeschichte in heutiger mathematischer Sprache geben.

[1)] im 7. Buch des *Staat* finden sie sich, mit Begründungen von Sokrates, als Teil des Erziehungsprogramms der Politiker.

Einleitung: Die axiomatische Grundlegung

In den Definitionen, Postulaten und Axiomen von Buch I steckt der großartige Versuch, die Geometrie im Sinne des Aristoteles als eine deduktive Wissenschaft aufzubauen, und dazu zunächst die unbeweisbaren Grundlagen zu geben. Wir sehen hier das Ergebnis einer über 100jährigen Entwicklung, beginnend mit den *Elementen* des Hippokrates. Schon antiken Mathematikern war die Grundlegung zu unklar und lückenhaft; Archimedes führt in seinen Arbeiten in viel klarerer Weise eigene Axiome ein; Postulate der räumlichen Geometrie führt Pappos ein. Erst in Hilberts *Grundlagen der Geometrie* 1899, denen Vorarbeiten von Pasch, Veronese, Stolz, F. Schur, H. Wiener u.a. vorangehen, wird die Idee des Aristoteles konsequent verwirklicht.

Definitionen 1–23: **Grundbegriffe der Geometrie**

1. **Punkt** ist, was ohne Teil ist.
2. **Linie** ist Länge ohne Breite.
3. Die Enden einer Linie sind Punkte.
4. **Gerade** (genauer: **Strecke**, denn geometrische Objekte sind bei Euklid stets begrenzt) ist eine Linie, die gleichmäßig zu den Punkten auf ihr liegt.
5. **Fläche** ist, was nur Länge und Breite hat.
6. Die Enden einer Fläche sind Linien.
7. **Ebene** ist eine Fläche, die gleichmäßig zu den Strecken auf ihr liegt.
8. **Ebener Winkel** ist die Neigung zweier Linien in einer Ebene, die sich treffen und nicht gerade fortsetzen.
9. Sind die Linien Geraden, heißt der Winkel **geradlinig**.
10. Bildet eine Gerade, auf eine andere Gerade gestellt, gleiche Nebenwinkel, so sind die beiden gleichen Winkel **Rechte**. Die Gerade heißt **senkrecht** zu der, auf der sie steht.
11. **Stumpf** ist ein Winkel, der größer als ein Rechter ist.
12. **Spitz**, wenn kleiner als ein Rechter.
13. **Grenze** ist das, worin etwas endet.
14. **Figur** ist, was von Grenzen umfaßt wird.
15. **Kreis** ist eine ebene Figur, von einer Linie umfaßt, so daß alle Strecken, die von *einem* Punkt im Inneren bis zur Linie laufen, einander gleich sind.
16. **Mittelpunkt** des Kreises heißt der Punkt.
17. **Durchmesser** des Kreises ist jede Strecke, die durch den Mittelpunkt geht und auf beiden Seiten vom Kreisumfang begrenzt ist; eine solche Strecke halbiert den Kreis.
18. **Halbkreis** ist die vom Durchmesser und dem durch ihn abgeschnittenen Bogen umfaßte Figur.
19. **Geradlinig** sind von Strecken umfaßte Figuren: **Dreiseite** bei 3 Strecken, **Vierseite** bei 4 Strecken, **Vielseite** bei mehr umfassenden Strecken.
20. Unter den Dreiseiten hat das **gleichseitige Dreieck** drei gleiche Seiten, das **gleichschenklige Dreieck** nur zwei gleiche Seiten, das **ungleichseitige Dreieck** drei verschiedene Seiten.
21. Unter den Dreiseiten gibt es auch das **rechtwinklige Dreieck**, das einen rechten Winkel hat, das **stumpfwinklige Dreieck** mit einem stumpfen Winkel und das **spitzwinklige Dreieck**, das 3 spitze Winkel hat.
22. Unter den Vierseiten ist das **Quadrat** sowohl gleichseitig als rechtwinklig; ein **Rechteck** ist rechtwinklig, aber nicht gleichseitig; ein **Rhombus** ist gleichseitig, aber nicht rechtwinklig; ein **Rhomboid** hat gleiche Gegenseiten und Gegenwinkel, ohne rechtwinklig oder gleichseitig zu sein; die anderen Vierseite heißen **Trapeze**.
23. **Parallelen** sind Geraden, die in derselben Ebene liegen und sich auch bei Verlängerung nach beiden Seiten ins Unendliche nicht treffen.

Postulate 1–5: **Geometrische Konstruktionen**

1. Von jedem Punkt zu jedem anderen kann man die Strecke ziehen.
2. Jede Strecke kann man zu einer Geraden verlängern.
3. Zu Mittelpunkt und Radius (Abstand) kann man den Kreis zeichnen.
4. Alle rechten Winkel sind gleich.
5. [Das bis zu Beginn des 19. Jh. umstrittene, fundamentale PARALLELENAXIOM:]
   Stufenwinkel an Parallelen sind gleich.[2)]

Axiome 1–5: **Allgemeine Regeln der Gleichheit**

[2)] wörtlich: Wenn eine gerade Linie beim Schnitt mit zwei geraden Linien bewirkt, daß innen auf derselben Seite entstehende Winkel zusammen kleiner als zwei Rechte werden, dann werden sich die zwei geraden Linien bei Verlängerung ins Unendliche treffen auf der Seite, auf der die Winkel liegen, die zusammen kleiner als zwei Rechte sind.

1. Was demselben gleich ist, ist auch untereinander gleich.
2. Gleiches zu Gleichem addiert gibt Gleiches.
3. Wird Gleiches von Gleichem weggenommen, so bleibt Gleiches übrig.
4. Was sich deckt, ist gleich.
5. Das Ganze ist größer als der Teil.

Buch I: Geometrie von Dreiecken und Parallelogrammen

Propositionen (Aufgaben und Lehrsätze) 1–48:

1. Konstruktion des gleichseitigen Dreiecks.
2. Anlegen einer Strecke an einen Punkt.
3. Anlegen einer Strecke an einen Punkt in einer Richtung.
4. Kongruenzsatz SWS.
5. Gleichheit der Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck.
6. Gleichheit der gleichen Winkeln gegenüberliegenden Seiten eines Dreiecks.

7/8. Kongruenzsatz SSS.

9. Winkelhalbierung.
10. Streckenhalbierung.
11. Lot errichten.
12. Lot fällen.
13. Die Nebenwinkel eines Strahls an einer Geraden summieren sich zu 2 Rechten.
14. Ist die Summe der Winkel zweier Strahlen an einem dritten Strahl 2 Rechte, so bilden die zwei Strahlen eine Gerade.
15. Scheitelwinkel sich schneidender Geraden sind gleich.
16. Ein Außenwinkel eines Dreiecks ist größer als jeder nichtanliegende Innenwinkel.
17. Die Summe zweier Winkel eines Dreiecks ist kleiner als 2 Rechte.
18. Im Dreieck liegt der größeren Seite der größere Winkel gegenüber.
19. Umkehrung von Prop. 18.
20. Im Dreieck ist jede Seite kleiner als die Summe der anderen beiden.
21. Über der Strecke c errichte man zwei ineinanderliegende Dreiecke mit Seite c. Dann ist die Summe der beiden anderen Seiten beim inneren Dreieck kleiner, der c gegenüberliegende Winkel beim inneren Dreieck größer.
22. Konstruktion eines Dreiecks aus 3 Seiten.
23. Antragen eines Winkels an einen Strahl.

24/25. Haben zwei Dreiecke zwei Paare gleicher Seiten, und ist der eingeschlossene Winkel im ersten Dreieck größer, so auch die dritte Seite, und umgekehrt.

26. Kongruenzsatz WWS.
27. Hat ein Geradenpaar an einer dritten Geraden gleiche Wechselwinkel, so ist das Paar parallel.
28. Hat ein Geradenpaar an einer dritten Geraden gleiche Stufenwinkel oder addieren sich die inneren Winkel auf einer Seite zu 2 Rechten, so ist das Paar parallel.
29. Umkehrung von Prop. 27.+28.
30. Sind zwei Geraden einer dritten parallel, so auch untereinander.
31. Konstruktion der Parallelen zu einer gegebenen Gerade durch einen Punkt.
32. Der Außenwinkel eines Dreiecks ist die Summe der zwei nicht anliegenden Innenwinkel. Die Summe aller 3 Winkel ist 2 Rechte.
33. Sind zwei Gegenseiten eines (konvexen) Vierecks gleich und parallel, so gilt das auch für das andere Gegenseitenpaar.
34. Im Parallelogramm sind gegenüberliegende Seiten bzw. Winkel gleich, jede Diagonale zerlegt das Parallelogramm in 2 kongruente Dreiecke.

35/36. Parallelogramme zwischen denselben Parallelen mit gleicher Basis sind flächengleich.

37/38. Dreiecke zwischen denselben Parallelen mit gleicher Basis sind flächengleich.

39/40. Flächengleiche Dreiecke mit gleicher Basis in der gleichen Geraden liegen zwischen denselben Parallelen.

41. Haben ein Parallelogramm und ein Dreieck dieselbe Grundlinie und liegen sie zwischen denselben Parallelen, so hat das Parallelogramm die doppelte Fläche wie das Dreieck.
42. Konstruiere ein einem Dreieck flächengleiches Parallelogramm mit gegebenem Winkel.
43. Teilt man ein Parallelogramm durch einen inneren Punkt einer Diagonale in vier Parallelogramm mit parallelen Seiten, so sind die zur Diagonalen fremden Parallelogramme flächengleich.
44. Konstruiere ein einem Dreieck flächengleiches Parallelogramm mit gegebenem Winkel an eine gegebene Gerade.
45. Konstruiere ein einem Viereck flächengleiches Parallelelogramm mit gegebenem Winkel.
46. Konstruiere das Quadrat über einer Seite.
47. [Der Satz des Pythagoras oder das Theorem der Braut:]
    Im rechtwinkligen Dreieck ist die Summe der Quadrate über den anliegenden Seiten des rechten Winkels gleich dem Quadrat über der gegenüberliegenden Seite (Hypotenuse).
48. Umkehrung von Prop. 47.

Buch II: Geometrische Algebra

Definitionen 1–2:

1. Ein rechtwinkliges Parallelogramm wird **umfaßt** von den Schenkeln eines rechten Winkels.
2. Ein **Gnomon** entsteht aus einem Parallelogramm durch Wegnahme eines ähnlichen Parallelogramms an einer Ecke.

Propositionen (Aufgaben und Lehrsätze) 1–14:[3)]

1. Distributivgesetz bei Summe von Rechtecken.
2. Spezialfall von 1.
3. Spezialfall von 1.
4. $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$
5. $(a-b)(a+b) + b^2 = a^2$ oder $ab + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$
6. Variante von 5.
7. $(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$
8. $4ab + (a-b)^2 = (a+b)^2$
9. $(a+b)^2 + (a-b)^2 = 2(a^2+b^2)$
10. Variante: $(2a+b)^2 + b^2 = 2[(a+b)^2 + a^2]$
11. [GOLDENER SCHNITT:]
    Löse die Gleichung $a(a-x) = x^2$.
12. Cosinussatz im stumpfwinkligen Dreieck, wobei $-c\cos\alpha$ als Länge eines Lotes interpretiert wird.
13. Cosinussatz im spitzwinkligen Dreieck, wobei $c\cos\alpha$ als Länge eines Lotes interpretiert wird.
14. Quadratur des Rechtecks, d.h. Lösung der Gleichung $x^2 = ab$.

Buch III: Kreisgeometrie

Definitionen 1–11: **Begriffe der Kreisgeometrie**

1. Kreise sind **gleich**, wenn Durchmesser oder Halbmesser gleich sind.
2. Eine Gerade **berührt** einen Kreis, wenn sie ihn nur in einem Punkt trifft (wörtlich: sie trifft aber schneidet nicht).
3. **Kreise berühren sich**, wenn sie sich treffen, aber nicht schneiden.
4. Sehnen in einem Kreis heißen **gleich weit von der Mitte**, wenn die Lote vom Mittelpunkt auf sie gleich sind.
5. Ist ein Lot größer, so heißt die ensprechende Sehne **weiter entfernt**.
6. Ein **Kreisabschnitt** ist die von einer Sehne und einem Kreisbogen begrenzte Figur.
7. Der (**Sehnen-Tangenten-**)**Winkel eines Abschnittes** ist der zwischen Sehne und Kreisbogen.
8. **Peripheriewinkel** eines Abschnittes ist der Winkel an einem Punkt des Kreisbogens über der Sehne.
9.
10. Ein **Kreisausschnitt** ist die Figur, die von zwei Halbmessern und einem Kreisbogen begrenzt wird.
11. **Ähnliche Kreisabschnitte** sind solche mit gleichem Sehnen-Tangenten-Winkel.

Propositionen (Aufgaben und Lehrsätze) 1–37:

1. Finde den Mittelpunkt M des Kreises K.
2. Eine Sehne ist im Innern des Kreises.
3. Halbiert ein Durchmesser eine Sehne, so steht er senkrecht, und umgekehrt.
4. Zwei nicht durchs Zentrum gehende Sehnen halbieren sich nicht.
5. Sich schneidende Kreise haben verschiedene Zentren.
6. Sich berührende Kreise haben verschiedene Zentren.
7. Sei $P \neq M$ ein Punkt im Kreis K, der Durchmesser PM schneide den Kreis in den Punkten A, B, so daß M auf AP liegt. Dann wächst die Länge des Verbindungsstrahls von P zu den Punkten von K, beginnend mit $\overline{PB}$, streng monoton bis $\overline{PA}$ und fällt dann wieder streng monoton bis $\overline{PB}$. Jeder Zwischenwert wird genau 2mal angenommen.
8. Sei P ein Punkt außerhalb von K, der „Durchmesser“ PM schneide K in den Punkten A, B, so daß M auf PA liegt. Dann wächst die Länge des Verbindungsstrahls von P zu den Punkten von K, beginnend mit $\overline{PB}$, streng monoton bis $\overline{PA}$ und fällt dann wieder streng monoton bis $\overline{PB}$. Jeder Zwischenwert wird genau 2mal angenommen.
9. Ist ein Punkt P von 3 Punkten eines Kreises K gleich weit entfernt, so ist P das Zentrum von K.
10. 2 Kreise schneiden sich in höchstens 2 Punkten.

3) Im folgenden wird nicht die geometrische Form (Summe bzw. Differenz von Rechtecken) gegeben, sondern eine algebraische Interpretation.

11/12. Berühren sich 2 Kreise, so liegt der Berührpunkt auf der Verbindungsgeraden der Zentren.

13. 2 Kreise berühren sich in höchstens einem Punkt.

14. Gleiche Sehnen eines Kreises haben gleiche Entfernung vom Zentrum und umgekehrt.

15. Die größten Sehnen sind die Durchmesser. Je kleiner die Sehne, desto größer der Abstand vom Zentrum.

16. Das Lot im Endpunkt eines Durchmessers liegt außerhalb des Kreises. Zwischen Lot und Kreis paßt keine Gerade, der Winkel zwischen Lot und Kreis ist kleiner als jeder geradlinige Winkel.

17. Ziehe von einem Punkt eine Tangente an einen Kreis.

18. Berührt eine Tangente t den Kreis K im Punkt P, so ist der Radius MP senkrecht zu t.

19. Berührt eine Tangente den Kreis K im Punkt P, so läuft das in P auf der Tangente errichtete Lot durch das Zentrum von K.

20. Über einem Kreisbogen ist der Mittelpunktwinkel doppelt so groß wie ein Peripheriewinkel.

21. Alle Peripheriewinkel über einem Kreisbogen sind gleich.

22. In einem Sehnenviereck addieren sich Gegenwinkel (also Peripheriewinkel über gleicher Sehne auf verschiedenen Seiten) zu 2 Rechten.

23. Ähnliche Kreisabschnitte über derselben Sehne nach derselben Seite sind gleich, d.h. werden vom selben Kreis gebildet.

24. Ähnliche Kreisabschnitte über gleichen Sehnen sind gleich (= kongruent).

25. Zeichne den Kreis zu gegebenem Kreisabschnitt.

26. Zu gleichen Mittelpunkts- bzw. Peripheriewinkeln gehören in gleichen Kreisen gleiche Bogen.

27. Umkehrung von Prop. 26.

28. Gleiche Sehnen in gleichen Kreisen grenzen gleiche Bogen ab, wenn man kleinere und größere Bogen paart.

29. Umkehrung von Prop. 28.

30. Halbiere einen Kreisbogen.

31. Der Peripheriewinkel im Halbkreis ist ein Rechter, in einem größeren Abschnitt kleiner (spitz), in einem kleineren Abschnitt größer (stumpf).

32. Die Sehnentangentenwinkel sind gleich den Peripheriewinkeln der Sehne.

33. Zu gegebener Sehne und gegebenem Peripheriewinkel konstruiere einen Kreisabschnitt.

34. Konstruiere zu gegebenem Kreis und Sehnentangentenwinkel einen Kreisabschnitt.

35. Schneiden sich zwei Sehnen im Kreis, so ist das Rechteck aus den Teilen der einen Sehne (flächen)gleich dem Rechteck aus den Teilen der andern Sehne.

36. Ist AB eine Sehne des Kreises K, auf deren Verlängerung der Punkt P liegt und ist PQ eine in Q berührende Tangente an K, so gilt $\overline{PQ}^2 = \overline{PA} \cdot \overline{PB}$.

37. Umkehrung von Prop. 36.

Buch IV: Reguläre Polygone, In- und Umkreise

Definitionen 1–7: **Polygone**

1. Eine geradlinige Figur [kurz: Polygon] heißt **eingeschrieben in ein anderes Polygon**, wenn die Ecken des ersten Polygons auf den entsprechenden Seiten des zweiten liegen.

2. Dann **umschreibt** das zweite Polygon das erste Polygon.

3/6. Ein Polygon heißt **eingeschrieben** in einen Kreis, wenn jede Ecke des Polygons auf dem Kreisumfang liegt.
Dann **umschreibt** der Kreis das Polygon.

4/5. Ein Polygon **umschreibt** einen Kreis, wenn jede Seite des Polygons den Kreisumfang berührt.
Dann heißt der der Kreis dem Polygon **eingeschrieben**.

7. Eine Strecke **paßt** in einen Kreis, wenn ihre Enden auf dem Kreisumfang liegen. [Wir nennen sie **Sehne**.]

Propositionen (Aufgaben und Lehrsätze) 1–16: **In- und Umkreise, reguläre Polygone**

1. Konstruiere in einem Kreis eine Sehne gegebener Länge < Durchmesser.
2. Konstruiere ein Dreieck mit gegebenen Winkeln und Umkreis.
3. Konstruiere ein Dreieck mit gegebenen Winkeln und Inkreis.
4. Konstruiere den Inkreis eines Dreiecks.
5. Konstruiere den Umkreis eines Dreiecks.
6. Konstruiere Quadrat zu gegebenem Umkreis.
7. Konstruiere Quadrat zu gegebenem Inkreis.
8. Konstruiere Inkreis eines Quadrates.
9. Konstruiere Umkreis eines Quadrates.
10. Konstruiere ein gleichschenkliges Dreieck, dessen Basiswinkel doppelt so groß sind wie der dritte Winkel (also 72°, Stück eines regulären Zehnecks).
11. Konstruiere ein reguläres Fünfeck zu gegebenem Umkreis.
12. Konstruiere ein reguläres Fünfeck zu gegebenem Inkreis.

13. Konstruiere Inkreis eines regulären Fünfecks.
14. Konstruiere Umkreis eines regulären Fünfecks.
15. Konstruiere reguläres Sechseck zu gegebenem Umkreis.
16. Konstruiere reguläres Fünfzehneck zu gegebenem Umkreis.

Buch V: Proportionenlehre — eine Version der reellen Zahlen

Dieses Buch geht wesentlich auf Eudoxos von Knidos zurück, der eine sehr raffinierte Grundlegung der in der Geometrie benötigten reellen Zahlen versucht. Leider definiert Eudoxos, zumindest in der bei Euklid überlieferten Form, nicht die entsprechenden Rechenoperationen der Addition und Multiplikation als allgemein ausführbare Operationen, obschon Euklid in Prop. VI.23 eine Multiplikation von Verhältnissen gebraucht. Das wäre sehr leicht möglich gewesen, wenn man die Existenz der vierten Proportionalen thematisiert hätte. Damit bleibt die abstrakte, elegante Darstellung in Buch V hinter Dedekinds verwandter Grundlegung der reellen Zahlen als Schnitte in der geordneten Menge der rationalen Zahlen zurück.

Die eudoxische Lehre von den Proportionen geht von einem allgemeinen Größenbegriff aus, der in Buch VI durch verschiedene Beispiele (Längen, Winkel, Flächeninhalte, Volumina) illustriert wird. Die Größen einer festen Art sollen eine durch

$$\alpha > \beta :\iff \exists\gamma:\ \alpha = \beta + \gamma \tag{$*$}$$

archimedisch (Def. 4) angeordnete additive abelsche Halbgruppe bilden (bei Winkeln muß man das als eine Fiktion ansehen, die in der Realität durch ein Rechnen modulo vier Rechten realisiert wird, was die Anordnung etwas behindert). Aus Anordnungsgründen ist das γ in $(*)$ eindeutig bestimmt, man schreibt $\gamma =: \alpha - \beta$.

Definitionen 1–18: **Verhältnisse und Proportionen.**

Zunächst werden nach pythagoreischer Art ganzzahlige Teile und Vielfachen von Größen definiert. Dann folgen die Grunddefinitionen des Eudoxos über Verhältnisse

$$\alpha : \beta = \frac{\alpha}{\beta}$$

und Proportionen

$$\alpha : \beta = \gamma : \delta$$

gleichartiger (physikalisch: gleichdimensionaler) Größen, wobei die wesentliche Frage nach der Existenz der vierten Proportionalen

$$\forall\alpha\ \forall\beta\ \forall\gamma\ \exists\delta : \quad \alpha : \beta = \gamma : \delta$$

ungestellt bleibt [4]. Letztere braucht man, um mit den Verhältnissen rechnen zu können, sie also wie Zahlen zu behandeln; das leistet Euklid nicht und hier ist die Achillesferse der antiken Mathematik. Die 4. Proportionale braucht man, um Verhältnisse auf den gleichen Nenner zu bringen, so daß sie addiert werden können (Prop. 24), ebenso, um Verhältnisse multiplizieren zu können (Def. 17 zeigt Wohldefiniertheit des Produktes):

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \quad\Longrightarrow\quad \frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\delta}{\varepsilon} := \frac{\gamma}{\varepsilon} \tag{$\dagger$}$$

[4] Bei Strecken kann man die 4. Proportionale leicht durch den Strahlensatz realisieren, vgl. Satz VI.12.

Dann bilden die Verhältnisse eine multiplikative Gruppe und bilden einen angeordneten Halbkörper (d.h. von den 4 Grundrechenarten ist nur die Subtraktion nicht voll ausführbar). Hat man die 4. Proportionale, so operiert der Halbkörper der Verhältnisse als Halbkörper von Automorphismen auf der Halbgruppe der Größen:

$$\frac{\alpha}{\beta} \cdot \beta := \alpha \quad .$$

Die Operation ist einfach transitiv, nach Wahl einer Einheitsgröße ε kann man die Größen und die Verhältnisse identifizieren

$$\frac{\alpha}{\varepsilon} \longleftrightarrow \alpha$$

und dann auch eine Multiplikation auf den Größen mit Eins ε einführen. Die Hilbertsche Streckenaddition bzw. Streckenmultiplikation, um zu einem Koordinatenkörper einer Geometrie zu kommen, ist im Grunde nichts anderes, als was hier lückenhaft vorgeführt wird.

Die meisten der folgenden Definitionen sind keine Definitionen, sondern Sätze, die hier einen Namen erhalten. Die Aufzählung dieser Sätze ist das Programm, das in den Propositionen erfüllt (d.h. bewiesen) wird.

1/2. Eine Größe α ist **Teiler** der Größe β, wenn β ein **Vielfaches** von α ist: $\beta = n \cdot \alpha$ mit $n \in \mathbb{N}$.

3. Ein **Verhältnis** ist eine Relation des „wie groß“ zwischen zwei gleichartigen Größen.
4. [Archimedisches Axiom:] Größen besitzen ein Verhältnis, wenn sie vervielfältig einander übertreffen können.
5. [Definition der Gleichheit positiver reeller Zahlen:] [5] Vier gleichartige Größen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ haben **dasselbe Verhältnis**, wenn für je zwei natürliche Zahlen n, m gilt:

$$\begin{aligned} n\alpha > m\beta &\implies n\gamma > m\delta \\ n\alpha < m\beta &\implies n\gamma < m\delta \quad . \end{aligned}$$

6. Man schreibt dies als **Proportion** $\alpha : \beta = \gamma : \delta$.
7. Gilt nur die zweite Implikation in 5., so ist das Verhältnis $\alpha : \beta$ **größer als** das Verhältnis $\gamma : \delta$.
9. Bei einer **steten Proportion** $\alpha : \beta = \beta : \gamma$ sagt man, $\alpha : \gamma$ sei das **doppelte Verhältnis** von $\alpha : \beta$.
10. Stehen vier Größen in **steter Proportion**, also

$$\alpha : \beta = \beta : \gamma = \gamma : \delta$$

so ist $\alpha : \delta$ das **dreifache Verhältnis** von $\alpha : \beta$.

12. **Vertauschung** von Verhältnissen: $\alpha : \beta = \gamma : \delta \implies \alpha : \gamma = \beta : \delta$
13. **Umkehrung** von Verhältnissen: $\alpha : \beta = \gamma : \delta \implies \beta : \alpha = \delta : \gamma$
14. **Verbindung** von Verhältnissen [Addition von 1]: $\alpha : \beta = \gamma : \delta \implies (\alpha + \beta) : \beta = (\gamma + \delta) : \delta$
15. **Trennung** von Verhältnissen [Subtraktion von 1]: Für $\alpha > \beta$ gilt

$$\alpha : \beta = \gamma : \delta \implies (\alpha - \beta) : \beta = (\gamma - \delta) : \delta$$

16. **Umwendung** von Verhältnissen [= Umkehrung der Trennung]: Für $\alpha > \beta$ gilt

$$\alpha : \beta = \gamma : \delta \implies \alpha : (\alpha - \beta) = \gamma : (\gamma - \delta)$$

17. Verhältnis **über Gleiches weg**: $\alpha : \beta = \alpha' : \beta'$, $\beta : \gamma = \beta' : \gamma' \implies \alpha : \gamma = \alpha' : \gamma'$
18. **Überkreuztes** Verhältnis: $\alpha : \beta = \beta' : \gamma'$, $\beta : \gamma = \alpha' : \beta' \implies \alpha : \gamma = \alpha' : \gamma'$.

Propositionen (Aufgaben und Lehrsätze) 1–25:

Mit $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta$ werden gleichartige Größen bezeichnet, mit m, n natürliche Zahlen, mit κ, λ Verhältnisse (positive reelle Zahlen).

---

[5] wörtlich: Man sagt, daß Größen **in demselben Verhältnis stehen**, die erste zur zweiten wie die dritte zur vierten, wenn bei beliebiger Vervielfältigung die Gleichvielfachen der ersten und dritten den Gleichvielfachen der zweiten und vierten gegenüber, paarweise entsprechend genommen, entweder zugleich größer oder zugleich gleich oder zugleich kleiner sind.

1. Distributivgesetz: $m(\alpha+\beta) = m\alpha + m\beta$
2. Distributivgesetz: $(m+n)\alpha = m\alpha + n\alpha$
3. Assoziativgesetz: $m(n\alpha) = (mn)\alpha$
4. Rationale Vielfache von Verhältnissen:
$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \implies \frac{m\alpha}{n\beta} = \frac{m\gamma}{n\delta}$$
5. Distributivgesetz: $m(\alpha-\beta) = m\alpha - m\beta$
6. Distributivgesetz: $(m-n)a = m\alpha - n\alpha$
7. „Verhältnis" ist gleichheitskompatibel:
$$\alpha = \beta \implies \frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\beta}{\gamma}\,, \quad \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\gamma}{\beta}$$
8. Ungleichungen zwischen Größen und Verhältnissen:
$$\alpha < \beta \implies \frac{\alpha}{\gamma} < \frac{\beta}{\gamma}\,, \quad \frac{\gamma}{\alpha} > \frac{\gamma}{\beta}$$
9. Umkehrung von Prop. 7.
10. Umkehrung von Prop. 8.
11. Beweis von Axiom I.1 für Verhältnisse.
12. Medianbildung:
$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \implies \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta} \quad .$$
Man kann das als Distributivgesetz $\kappa\cdot(\beta+\delta) = \kappa\cdot\beta + \kappa\cdot\delta$ für die Operation eines Verhältnisses κ auf der Halbgruppe der Größen ansehen.
13. Wohldefiniertheit von Def. 7:
$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}\,, \quad \frac{\gamma}{\delta} > \frac{\varepsilon}{\zeta} \implies \frac{\alpha}{\beta} > \frac{\varepsilon}{\zeta}$$
14. Ungleichungen zwischen Größen bei gleichem Verhältnis:
$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}\,, \quad \alpha > \gamma \implies \beta > \delta$$
15. Rationales Erweitern von Verhältnissen:
$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{m\alpha}{m\beta}$$
16. Beweis von Def. 12.
17. Beweis von Def. 15.
18. Beweis von Def. 14.
19. Umkehrung von Prop. 12.
20. Variation von Def. 17:
$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha'}{\beta'}\,, \quad \frac{\beta}{\gamma} = \frac{\beta'}{\gamma'} \quad \alpha > \gamma \implies \alpha' > \gamma'$$
21. Variation von Def. 18:
$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\beta'}{\gamma'}\,, \quad \frac{\beta}{\gamma} = \frac{\alpha'}{\beta'}\,, \quad \alpha > \gamma \implies \alpha' > \gamma'$$
22. Beweis von Def. 17
23. Beweis von Def. 18
24. Addition von Verhältnissen:
$$\kappa = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}\,, \quad \lambda = \frac{\varepsilon}{\beta} = \frac{\zeta}{\delta} \implies$$
$$\kappa + \lambda := \frac{\alpha+\varepsilon}{\beta} = \frac{\gamma+\zeta}{\delta}$$
25. Verallgemeinerte arithmetisch-geometrische Ungleichung ($\beta = \gamma$):
$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}\,, \quad \alpha > \left\{\begin{matrix}\beta\\ \gamma\end{matrix}\right\} > \delta \implies \alpha+\delta > \beta+\gamma$$

Buch VI: Ähnlichkeitslehre

Die Proportionenlehre des Eudoxos aus Buch V wird jetzt in der Geometrie angewendet, wobei Teile der Ähnlichkeitslehre schon vor Eudoxos existierten, z.B. bei Hippokrates. Die Lehre des Eudoxos aus Buch V soll der Sicherung dieser Ergebnisse dienen. Noch im heutigen Schulunterricht hat man Schwierigkeiten, etwa den Strahlensatz für nichtrationale Verhältnisse zu beweisen, ohne auf eine fundierte Theorie der reellen Zahlen zurückgreifen zu können. Ähnliches gilt für die Volumenformeln in Buch XII.

Die Ähnlichkeitslehre dient auch zur **Lösung quadratischer Gleichungen**, so in Prop. 28:

> Gegeben eine geradlinige Figur C mit Fläche F und ein Parallelogramm D mit Basis b und Höhe h, sowie eine Strecke a. Gesucht ist ein Parallelogramm P mit Basis a, das nach Wegnahme eines zu D ähnlichen Parallelogramms ein Parallelogramm der Fläche F ist.
> Ist x die Höhe des gesuchten Parallelogrammes, so hat das Parallelogramm P die Fläche ax, und ein zu D ähnliches Parallelogramm der Höhe x hat die Basis $\frac{b}{h}\cdot x$, also die Fläche $\frac{b}{h}\cdot x^2$. Die Bestimmungsgleichung für x ist also
> $$ax = F + \frac{b}{h}\cdot x^2 \quad .$$
> Eine reelle Lösung hat die Gleichung genau für
> $$F \leq \frac{h}{b}\cdot\left(\frac{a}{2}\right)^2 \quad ,$$
> was in V.28 in geometrischer Sprache so beschrieben wird: Die gegebene Figur C darf nicht größer sein als das zu D ähnliche Parallelogramm über der Hälfte der gegebenen Strecke a.

Definitionen 1–5 (2 und 5 unecht):

1. **Ähnlich** sind geradlinige Figuren, wenn entsprechende Winkel gleich und entsprechende Strecken proportional sind.
3. [Goldener Schnitt, vgl. Prop. II.11]: Eine Strecke heißt **stet(ig) geteilt** [6], wenn sich die ganze Strecke zum größeren Abschnitt wie der größere Abschnitt zum kleineren verhält, für die Einheitsstrecke
$$\frac{1}{x} = \frac{x}{1-x} \quad , \quad \text{also} \quad x^2 + x - 1 = 0$$
4. Höhe ist das vom Scheitel auf die Basis gefällte Lot.

Propositionen (Aufgaben und Lehrsätze) 1–33: **Ähnlichkeitslehre, Lösung quadratischer Gleichungen**.

VORBEMERKUNG: „Gleich" bedeutet bei Dreiecken und Parallelogrammen „flächengleich".

1. Dreiecke/Parallelogramme gleicher Höhe verhalten sich wie die Grundlinien.
2. Zieht man im Dreieck eine Parallele zu einer Seite, so teilt sie die beiden anderen Seiten im gleichen Verhältnis. Umgekehrt folgt aus der Teilung im gleichen Verhältnis, daß die Transversale parallel zur dritten Seite ist.
3. Eine Winkelhalbierende im Dreieck teilt die Gegenseite im Verhältnis der beiden anderen Seiten, und umgekehrt.
4. Zwei winkelgleiche Dreiecke haben die gleichen Seitenverhältnisse.
5. Umkehrung von Prop. 4.
6. Haben zwei Dreiecke Δ und Δ' denselben Winkel α, und stehen die Nachbarseiten in Proportion, also $b : c = b' : c'$, so sind die Dreiecke winkelgleich.
7. Haben zwei Dreiecke Δ und Δ' denselben Winkel α und stehen die Nachbarseiten eines anderen Winkels in Proportion und sind die dritten Winkel zugleich spitz oder stumpf, so sind die Dreiecke winkelgleich.
8. Fällt man in einem rechtwinkligen Dreieck das Lot vom rechten Winkel auf die Hypotenuse, so sind die entstehenden Dreiecke dem ganzen Dreieck ähnlich.
   Daher ist die Höhe die mittlere Proportionale der Hypotenusenabschnitte.
9. Teile eine Strecke in eine vorgegebene Anzahl gleicher Teile.
10. Eine Teilung von einer Strecke auf eine andere übertragen.
11. Zu zwei Strecken α, β die dritte Proportionale γ mit $\alpha : \beta = \beta : \gamma$ finden.
12. Zu drei Strecken die vierte Proportionale finden.
13. Zu zwei Strecken die mittlere Proportionale finden (= II.14).
14. In gleichen winkelgleichen Parallelogrammen P und P' sind die Seiten um gleiche Winkel umgekehrt proportional: $a : a' = b' : b$.
15. In gleichen, in einem Winkel übereinstimmenden Dreiecken sind die Seiten um den gleichen Winkel umgekehrt proportional. Umgekehrt gilt: Dreiecke, die in einem Winkel übereinstimmen mit umgekehrt proportionalen Verhältnissen der Schenkel, sind gleich.
16. [Spezialfall von 14.] Gilt eine Proportion $\alpha : \beta = \gamma : \delta$, so sind die Rechtecke aus den äußeren und inneren Gliedern gleich, und umgekehrt, d.h.
$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \iff \alpha\delta = \beta\gamma$$
17. [Spezialfall von 16.] Speziell gilt
$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\beta}{\gamma} \iff \alpha\gamma = \beta^2 \quad .$$
18. Über einer Strecke ist eine zu einer gegebenen geradlinigen Figur ähnliche geradlinige Figur zeichnen.
19. Das Flächenverhältnis ähnlicher Dreicke ist das Quadrat des Seitenverhältnisses.
20. Ähnliche Vielecke lassen sich in die gleiche Zahl ähnlicher Dreiecke zerlegen. Wieder verhalten sich die Flächen wie die Quadrate der Seiten.
21. Polygone, die zu einem Polygon ähnlich sind, sind auch untereinander ähnlich.
22. Stehen vier Strecken in einer Proportion, so auch ähnliche Polygone über ihnen, und umgekehrt.
23. Das Verhältnis der Flächen zweier winkelgleicher Parallelogramme ist das Produkt [7] der Verhältnisse der Seiten.
24. Nimmt man einen Punkt auf einer Diagonale eines Parallelogramms und zieht durch ihn die Parallelen zu den Seiten, so entstehen um die Diagonale Parallelogramme, die dem ganzen Parallelogramm ähnlich sind.
25. Konstruiere ein Dreieck, das einem gegebenen Dreieck ähnlich, einem gegebenen Dreieck oder Viereck gleich ist.
26. Liefert die Konstruktion von Prop. 24, mit einem beliebigen Punkt im Parallelogramm durchgeführt, ähnliche Parallelogramme, so liegt der Punkt auf einer Diagonale.

[6] wörtlich: „Teilung nach äußerem und mittlerem Verhältnis".

[7] im Sinne von (†), Euklid spricht hier von dem „zusammengesetzten Verhältnis".

27. Das arithmetische Mittel zweier Strecken ist größer als das geometrische Mittel dieser Strecken, oder gleich, falls die beiden Strecken gleich sind.[7)]
28. siehe Vorbemerkung zu Buch VI.
29. Gegeben eine Strecke AB, ein Parallelogramm P und ein Flächeninhalt F. Lege an AB ein Parallelogramm der Fläche F mit Seite AC (die AB enthält) an, so daß der überschießende Teil zu P ähnlich ist![9)]
30. [= Prop. II.11] Teile eine Strecke stet!
31. Allgemeiner Satz von Pythagoras: In einem rechtwinkligen Dreieck seien ähnliche Figuren über den Seiten gezeichnet. Dann ist die Summe der Figuren über den Schenkeln des rechten Winkels der Figur über der Hypotenuse gleich.
32. Sind ABC und CDE Dreiecke mit $AB \parallel CD$, $AC \parallel DE$ und $AB : AC = DC : DE$, so liegen B, C, E auf einer Geraden.
33. Mittelpunkts- bzw. Peripheriewinkel haben dasselbe Verhältnis, wie die Bogen, über denen sie stehen.

Buch VII: Teilbarkeit von Zahlen

Definitionen 1–22:[10)]

1. **Einheit** ist das, wonach jedes Ding eines genannt wird.
2. **Zahl** ist die aus Einheiten zusammengesetzte Menge. [1 gilt nicht als Zahl bis ins 17. Jh.!]

3/5. a **teilt** b, wenn b genau von a gemessen wird, d.h. wenn ein **Vielfaches** von a gleich b ist. [Achtung: 1 teilt b , aber b teilt b nicht]

6/7. **Gerade** heißt eine Zahl, wenn sie sich halbieren läßt, andernfalls **ungerade**.

8-10. Definition der Begriffe **gerade mal gerade**, **gerade mal ungerade**, **ungerade mal ungerade**.

11. **Primzahl** ist eine Zahl, die sich nur durch die Einheit messen läßt.
12. **Relativ prim** sind Zahlen, die sich nur durch die Einheit als gemeinsames Maß messen lassen.
13. **Zusammengesetzt** heißt eine Zahl, die sich durch eine andere Zahl messen läßt.
14. **Relativ zusammengesetzt** sind Zahlen, die ein gemeinsames Maß ($\neq 1$) haben.
15. $mn := n + n + \ldots + n$, m-mal.
16. Dann heißt mn eine **ebene Zahl** und m und n ihre **Seiten**.
17. mnr heißt eine **räumliche Zahl** mit den Seiten m, n, r.
18. nn heißt eine **Quadratzahl**.
19. nnn heißt eine **Kubikzahl**.
20. Eine **Proportion** $a : b = c : d$ zwischen Zahlen bedeutet die Existenz von Zahlen n, m, p, q mit
$$a = np \quad , \quad b = mp \quad , \quad c = nq \quad , \quad d = mq$$
21. **Ähnliche** ebene oder räumliche Zahlen sind solche, deren Seiten in Proportion stehen, in der Bezeichnung von Def. 20 z.B. ab und cd.
22. Eine Zahl ist **vollkommen**, wenn sie die Summe ihrer Teiler ist.

Propositionen 1–39: Die hier auftretende Proportionenlehre mit rationalen Verhältnissen ist vor-eudoxisch und pythagoreischen Ursprungs.

1. Sind zwei ungleiche Zahlen gegeben, und nimmt man abwechselnd jeweils die kleinere von der größeren weg, und geht dieses Verfahren bis zur Einheit, so waren die ursprünglichen Zahlen relativ prim.
2. Euklidischer Algorithmus: Finde zu zwei nicht relativ primen Zahlen das größte gemeinsame Maß (den ggT).[11)] Eine Zahl, die zwei Zahlen mißt, mißt auch ihr größtes gemeinsames Maß.
3. Finde das größte gemeinsame Maß von 3 Zahlen.

5. $\frac{1}{n}(a+b) = \frac{1}{n}a + \frac{1}{n}b$.
6. $\frac{m}{n}(a+b) = \frac{m}{n}a + \frac{m}{n}b$.
7. $\frac{1}{n}(a-b) = \frac{1}{n}a - \frac{1}{n}b$.

---

8) wörtlich steht bei Euklid: „Von allen Parallelogrammen, die man an eine feste Strecke so anlegen kann, daß ein Parallelogramm fehlt, welches einem über ihrer Hälfte gezeichneten ähnlich ist und ähnlich liegt, ist das über der Hälfte angelegte, das selbst dem fehlenden ähnlich ist, das größte."
Hier wird ein Extremalproblem gelöst, das auch in der Protodifferentialrechnung von Fermat 1629 auftritt: Bestimme das Rechteck mit gegebenem Umfang von maximaler Fläche.

9) Aufgabe: Analysiere diese Aufgabe wie Prop. 28 in der Vorbemerkung!

10) Definition 4 und Satz 4 sind ausgelassen, sie sagen etwa: Ist a kein Teiler von b, so ist $\frac{a}{b}$ kein Stammbruch, sondern eine Summe von Stammbrüchen. Eine richtige Bruchrechnung aber entwickeln Euklid bzw. seine pythagoreische Vorlage nicht.

11) Das geschieht durch die in Prop. 1 beschriebene, aber schon bei Aristoteles vorkommende **Wechselwegnahme**.

8. $\frac{m}{n}(a-b) = \frac{m}{n}a - \frac{m}{n}b$.
9. $a = \frac{1}{n}b,\ c = \frac{1}{n}d \quad \Longrightarrow \quad a : c = b : d$.
10. $a = \frac{m}{n}b,\ c = \frac{m}{n}d \quad \Longrightarrow \quad a : c = b : d$.
11. Für $a > c,\ b > d$ gilt
$$a : b = c : d \quad \Longrightarrow \quad (a-c) : (b-d) = a : b \quad .$$
12. $a_1 : b_1 = a_2 : b_2 = \ldots = a_n : b_n \quad \Longrightarrow$
$a_1 : b_1 = (a_1 + \ldots + a_n) : (b_1 + \ldots + b_n) \quad .$
13. $a : b = c : d \quad \Longrightarrow \quad a : c = b : d$.
14. $a : b = d : e,\ b : c = e : f \quad \Longrightarrow \quad a : c = d : f$.
15. $1 : m = a : ma \quad \Longrightarrow \quad 1 : a = m : ma$. [Spezialfall von Prop. 13 oder 17]
16. Kommutativgesetz: $ab = ba$
17. $b : c = ab : ac$.
18. $a : b = ac : bc$.
19. $a : b = c : d \iff ad = bc$.
20. Sind a, b die kleinsten Zahlen mit dem Verhältnis $a : b$, und ist c, d ein Zahlenpaar von gleichem Verhältnis, dann gibt es eine Zahl n mit $a = \frac{1}{n}c$ und $b = \frac{1}{n}d$.
21. Sind a, b teilerfremd, so sind sie minimal mit dem Verhältnis $a : b$.
22. Umkehrung von 21.
23. Sind a und mb relativ prim, so auch a und b.
24. Sind a und b relativ prim zu c, so ist auch ab relativ prim zu c.
25. [Spezialfall von 24.] Sind a, b relativ prim, so auch a^2, b.
26. Sind a und b beide relativ prim zu c und zu d, so ist ab relativ prim zu cd.
27. Sind a, b relativ prim, so auch a^2, b^2, und a^3, b^3.
28. Sind a, b relativ prim, so auch $a + b$ zu a und zu b.
29. Eine Primzahl ist relativ prim zu jeder Zahl außer ihren Vielfachen.
30. Ist die Primzahl p ein Teiler von ab, so teilt p einen der Faktoren a oder b.
31. Jede zusammengesetzte Zahl wird von einer Primzahl geteilt.
32. Jede Zahl ist entweder Primzahl oder Vielfaches einer Primzahl.
33. Finde zu Zahlen $a_1, \ldots, a_n$ die kleinsten Zahlen mit demselben Verhältnis, d.h. berechne
$$\mathrm{ggT}(a_1, \ldots, a_n) \quad !$$
34. Bestimme das kgV von n Zahlen.
35. Teilen a und b die Zahl n, so auch $\mathrm{kgV}(a, b)$.
36. Finde das kgV von 3 Zahlen.

37/38. Ist b Teiler von a, so ist $\frac{1}{b} \cdot a$ eine ganze Zahl, und umgekehrt.

39. Finde das kgV von n Zahlen $a_1, \ldots, a_n$.

Buch VIII: Geometrische Folgen

Propositionen 1–27:

1. Ist $a, b, c, \ldots, h$ eine **geometrische Folge** (d.h. in steter Teilung $a : b = b : c = \ldots$) und sind a und h relativ prim, so ist die Folge die kleinste mit dem gegebenen Verhältnis.
2. Finde zu gegebenem Verhältnis $n : m$ die kleinste geometrische Folge mit diesem Verhältnis und einer vorgegebenen Zahl von Gliedern.
3. Ist $a, b, \ldots, h$ eine geometrische Folge, die minimal ist für das gegebene Verhältnis, so sind a und h relativ prim.
4. Zu einer gegebenen Folge von Verhältnissen $a_i : b_i$ finde die kleinste Folge mit diesen Verhältnissen.
5. Das Verhältnis zweier ebener Zahlen ab und cd ist zusammengesetzt aus (das Produkt von) den Seitenverhältnissen $a : c$ und $b : d$.
6. Ist $a, b, c, \ldots, h$ eine geometrische Folge und a kein Teiler von b, so teilen sich keine zwei verschiedenen Glieder der Folge.
7. [Spezialfall von 6.] Ist $a, b, c, \ldots, h$ eine geometrische Folge und a ein Teiler von h, so ist a auch ein Teiler von b.
8. Kann man zwischen zwei Zahlen a und b eine geometrische Folge der Länge n einschalten, so geht das zwischen je zwei Zahlen vom selben Verhältnis $a : b$.
9. Sind die Zahlen a, b relativ prim, und kann man zwischen sie eine geometrische Folge der Länge n einschieben, so kann man dies auch zwischen 1 und a bzw. zwischen 1 und b tun. $[\mathbb{Q}^n \cap \mathbb{N} = \mathbb{N}^n]$
10. [Umkehrung von 9.] Gibt es zwischen 1 und a sowie 1 und b je eine geometrische Folge der Länge n [d.h. a und b sind n-te Potenzen], so gibt es auch eine geometrische Folge der Länge n zwischen a und b.
11. [Spezialfall von Prop. 10 und 5:] Zwischen 2 Quadraten gibt es eine mittlere Proportionale: Für $a = \alpha^2$ und $b = \beta^2$ folgt $a : \alpha\beta = \alpha\beta : b$. Das Verhältnis zweier Quadrate ist zweimal das Verhältnis der Seiten.
12. [Spezialfall von Prop. 10:] Zwischen zwei Kubikzahlen können zwei mittlere Proportionale (geometrische Folge der Länge 3) eingeschoben werden: $a^3 : a^2b : ab^2 : b^3$. Das Verhältnis zweier Kubikzahlen ist dreimal das Verhältnis der Seiten.
13. Erhebt man eine geometrische Folge zum Quadrat oder zur dritten Potenz, erhält man wieder eine geometrische Folge.

14. a^2 teilt $b^2 \iff a$ teilt b.
15. a^3 teilt $b^3 \iff a$ teilt b.
16. äquivalent zu Prop. 14.
17. äquivalent zu Prop. 15.
18. Zwischen zwei ähnlichen ebenen Zahlen gibt es eine mittlere Proportionale:
$$a : b = c : d \implies ab : bc = bc : cd$$
Das Verhältnis der ähnlichen ebenen Zahlen ist zweimal das Verhältnis entsprechender Seiten: $ab : cd = (a : c)^2$.
19. Zwischen zwei ähnlichen räumlichen Zahlen gibt es zwei mittlere Proportionale:
$$a : b : c = d : e : f \implies$$
$$abc : bcd = bcd : bdf = bdf : def \quad .$$
Das Verhältnis der räumlichen Zahlen ist dreimal das Verhältnis entsprechender Seiten: $abc : def = (a : d)^3$.
20. [Umkehrung von Prop. 18:] Läßt sich zwischen zwei Zahlen eine mittlere Proportionale einschalten, sind die Zahlen ähnliche ebene Zahlen: Aus
$$a : c = c : b$$
folgt die Ähnlichkeit von a, b mit $\delta = \mathrm{ggT}(a, c)$ wegen
$$a = \alpha\delta \ , \ c = \gamma\delta \ , \ b = \gamma\beta$$
und $\alpha : \delta = \gamma : \beta$.
21. Umkehrung von Prop. 19.
22. Bilden 3 Zahlen eine geometrische Folge und ist die erste eine Quadratzahl, so auch die dritte.
23. Bilden 4 Zahlen eine geometrische Folge und ist die erste eine Kubikzahl, so auch die dritte.
24. Haben zwei Zahlen ein Verhältnis wie eine Quadratzahl zu einer Quadratzahl, und ist die erste ein Quadrat, so auch die zweite.
25. Haben zwei Zahlen ein Verhältnis wie eine Kubikzahl zu einer Kubikzahl, und ist die erste eine Kubikzahl, so auch die zweite.
26. Ähnliche ebene Zahlen haben zueinander ein Verhältnis wie eine Quadratzahl zu einer Quadratzahl.
27. Ähnliche räumliche Zahlen haben zueinander ein Verhältnis wie eine Kubikzahl zu einer Kubikzahl.

Buch IX: Geometrische Folgen, Beginn der Zahlentheorie

Propositionen 1–27:

1. [= Prop. VIII.26] Das Produkt zweier ähnlicher ebener Zahlen ist ein Quadrat:
$$a : b = c : d \implies (ab)(cd) = (ad)^2$$
2. Umkehrung von 1.
3. [Spezialfall von 4.:] Das Quadrat einer Kubikzahl ist eine Kubikzahl.
4. Das Produkt zweier Kubikzahlen ist eine Kubikzahl.
5. [Umkehrung von 4.:] Sind a und ab Kubikzahlen, so auch b.
6. Mit a^2 ist auch a Kubikzahl.
7. Ein Vielfaches einer ebenen Zahl ist eine räumliche Zahl.
8. Hat man eine mit 1 beginnende geometrische Folge, so ist jedes zweite Glied ein Quadrat, jedes dritte Glied eine Kubikzahl, jedes sechste Glied zugleich Quadrat und Kubikzahl.
9. Ist $1, a, \ldots$ eine geometrische Folge und a ein Quadrat (Kubus), so ist jedes Glied ein Quadrat (Kubus).
10. Ist $1, a, \ldots$ eine geometrische Folge und a kein Quadrat (Kubus), so sind nur die Glieder der Folge Quadrate (Kuben), die in Prop. 8 genannt sind.
11. Ist $1, a, a_2, a_3, \ldots, a_n$ eine geometrische Folge, so teilt a_r das Ende a_n, der Quotient ist a_{n-r}.
12. Ist $1, a, a_2, a_3, \ldots, a_n$ eine geometrische Folge, so sind die Primteiler von a genau die Primteiler von a_n.
13. Ist $1, a, a_2, a_3, \ldots, a_n$ eine geometrische Folge und a eine Primzahl, so sind die Teiler von a_n gerade die zuvor in der Folge stehenden Zahlen.
14. [Korollar von VII.30] Ist a das kgV der Primzahlen $p_1, \ldots, p_n$, so sind die a teilenden Primzahlen genau die Zahlen $p_1, \ldots, p_n$.
15. Ist a, b, c eine unkürzbare geometrische Folge, so ist die Summe zweier Glieder relativ prim zum dritten.
16. Sind a, b relativ prim, gibt es keine dritte Proportionale, d.h. keine geometrische Folge a, b, c. $[a > 1]$
17. Eine geometrische Folge $a, \ldots, b$ mit relativ primen Gliedern a, b läßt sich nicht weiter verlängern. $[a > 1]$
18. Wann kann man a, b zu einer geometrischen Folge mit 3 Gliedern verlängern?
[Antwort: a muß b^2 teilen]
19. Wann kann man die vierte Proportionale in $a : b = c : ?$ finden?
20. Unendlichkeit der Primzahlen: Zu vorgegebenen Primzahlen kann man weitere finden.

21. Gerade + Gerade = Gerade
22. Eine gerade Anzahl ungerader Zahlen hat als Summe eine gerade Zahl.
23. Eine ungerade Anzahl ungerader Zahlen hat als Summe eine ungerade Zahl.
24. Gerade − Gerade = Gerade
25. Gerade − Ungerade = Ungerade
26. Ungerade − Ungerade = Gerade
27. Ungerade − Gerade = Ungerade
28. Ungerade × Gerade = Gerade
29. Ungerade × Ungerade = Ungerade
30. Teilt eine ungerade Zahl eine gerade Zahl, so auch ihre Hälfte.
31. Ist eine ungerade Zahl relativ prim zu einer Zahl, so auch zu ihrem Doppelten.
32. Hat man die geometrische Folge $2, 4, \ldots$, so zerlegt sich jedes ihrer Glieder (nach dem ersten) nur in das Produkt zweier gerader Zahlen.
33. Ist eine Zahl das Doppelte einer ungeraden Zahl, hat jede Zerlegung die Gestalt ungerade mal gerade.
34. Ist eine [gerade] Zahl nicht von der Art aus Prop. 32 oder 33, so besitzt sie sowohl Zerlegungen der Gestalt gerade mal gerade wie gerade mal ungerade.
35. Summenformel der geometrischen Reihe: Ist $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ eine geometrische Folge, so gilt
$$(a_{n+1} - a_1) : (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) = (a_2 - a_1) : a_1$$
36. Formel für vollkommene Zahlen: Ist $1, 2, \ldots, a$ eine geometrische Folge, deren Summe eine Primzahl ist, so liefert das Produkt dieser Summe mit dem letzten Glied eine vollkommene Zahl.
[Also $2^{p-1} \cdot (2^p - 1)$ ist vollkommen, wenn $2^p - 1$ prim ist. Daß dies alle geraden vollkommenen Zahlen sind, hat Euler gezeigt. Eventuelle ungerade vollkommene Zahlen müssen $> 10^{200}$ sein.]

Weiteres zahlentheoretisches Material findet man in dem Lemma nach X.28: Finde zwei Quadrate, deren Summe ein Quadrat ist. Lösung (Euklid hat noch einen gemeinsamen Faktor m bei der Basis aller drei Quadrate):

$$p \equiv q \mod 2 \quad \Longrightarrow \quad (pq)^2 + \Big(\frac{p^2 - q^2}{2}\Big)^2 = \Big(\frac{p^2 + q^2}{2}\Big)^2$$

Ist $\mathrm{ggT}(p, q) = 1$, liefert diese Formel genau die teilerfremden Lösungen von $x^2 + y^2 = z^2$ mit ungeradem x und geradem y.

Buch X: Quadratische Irrationalitäten

Es gibt zwei Antworten auf die Entdeckung des Irrationalen bei Euklid, eine „analytische“ und eine „algebraische“: Zum einen die in Buch V entwickelte Lehre von den Proportionen, mit denen Eudoxos den allgemeinen Umgang mit geometrischen Größen für Längen-, Flächen- oder Volumenberechnungen fundiert hat. Zum andern die hier in Buch X entwickelte Lehre des Theaitet von den Irrationalitäten, die bei Konstruktion mit Zirkel und Lineal auftauchen, d.h. die Lehre von den geschachtelten Quadratwurzelausdrücken. Diese genügen zur Behandlung der Platonischen Körper in Buch XIII.

Nicht nur die Theorie der 13 verschiedenen Typen von Irrationalitäten nebst weiteren Hilfstypen, die hier aufgebaut wird, ist kompliziert, der Aufbau selbst ist dunkel, da der Autor seine motivierenden Gedankengänge wohl zu verbergen weiß. Auch bedeutende Mathematiker haben bei der Lektüre von Buch X gestöhnt [12]. Im Zentrum steht die Identität

$$\sqrt{\sqrt{\alpha} \pm \sqrt{\beta}} = \sqrt{\frac{\sqrt{\alpha} + \sqrt{\alpha - \beta}}{2}} \pm \sqrt{\frac{\sqrt{\alpha} - \sqrt{\alpha - \beta}}{2}} \quad ,$$

[12] Apollonios soll die Theorie weiter entwickelt haben; Pappos schrieb einen arabisch erhaltenen Kommentar; Leonardo von Pisa behandelte das Buch in Kap.14 seines *Liber Abaci* 1202/1228; eine Analyse gab Michael Stifel in seiner *Arithmetica integra*, Nürnberg 1544; Cardano behandelt das Buch mehrfach in seinen Schriften; Simon Stevin auch, er nennt das Buch 1585 **le croix des mathématiciens**. Weitere Kommentare von Meier Hirsch 1794, Poselger 1834, Nesselmann 1842 in *Die Algebra der Griechen*, Christensen 1889 [Zeitschrift für Math. u. Physik (Hist.Abt.) **34**, 201–217], eine Kurzanalyse gibt van der Waerden in seinem Buch *Erwachende Wissenschaft*.

aber sehr sorgsam wird von allen vorkommenden Größen gezeigt, ob bzw. unter welchen Bedingungen sie, im Sinne der nachstehenden Definitionen, meßbar, rational oder irrational sind, und daß die verschiedenen Typen von Irrationalitäten wirklich disjunkt sind, wesentliches Hilfsmittel ist die Eindeutigkeit der Summendarstellungen von Quadratwurzeln. Ich beschränke mich hier auf die Wiedergabe einiger Definitionen, die bereits andeuten, daß dieser erste kühne Entwurf nicht das letzte Wort ist: Er macht sich z.T. noch selbst das Leben schwer und erreicht die Klarheit heutiger Algebra nicht; manche Sätze werden in bis zu 12 Teilsätze zerlegt je nach Typ der auftretenden Größen und mit 12 sehr ähnlichen Beweisen versehen, wo bei richtiger Begriffsbildung ein Satz und ein Beweis gereicht hätten.

Die 115 Sätze von Buch X erfordern einen Kommentar, da sie nicht wie die vorhergehenden leicht mit Schulmathematik zu interpretieren sind. Nicht nur aus Platzgründen, sondern auch wegen des nicht ausgereiften Inhaltes beschränke ich mich auf einen knappen Exkurs, der wenigstens einen Eindruck des Buches X vermitteln soll.

Definitionen I.1–4:

1. Größen heißen **kommensurabel**, wenn sie ein gemeinsames Maß haben, sonst **inkommensurabel**.
2. Strecken heißen **quadratisch** (oder **quadriert**) **kommensurabel**, wenn ihre Quadrate kommensurabel sind.
3. Nach Auswahl einer **Einheitsstrecke** e heißen die mit ihr kommensurablen Strecken **meßbar**, die mit ihr quadratisch kommensurablen Strecken **aussprechbar** (**rational**), die anderen **irrational**.

   [Der Begriff „meßbar“ steht nicht explizit bei Euklid, sondern steht nur zur Klarheit hier. Man kann nur bedauern, daß Euklid durch seine Unterscheidung von 1- und 2-dimensionalen Größen zu zwei verschiedenen Irrationalitätsbegriffen bei Strecken und bei Flächen kommt. Eindimensional sind „meßbar“ genau die positiven Zahlen in $\mathbb{Q}$, „aussprechbar“ die Zahlen $\sqrt{q}$ mit $0 < q \in \mathbb{Q}$. Zweidimensional gibt es keinen Unterschied zwischen meßbar und aussprechbar = rational.]
4. Eine Fläche ist **meßbar** oder **aussprechbar**, wenn sie mit dem Quadrat über e kommensurabel ist, andernfalls **unaussprechlich** oder **irrational**.

Die Propositionen 1–47 enthalten folgende Definitionen:[13)]

21. Die mittlere Proportionale zwischen zwei aussprechbaren, aber nicht kommensurablen Strecken heißt **medial**.

$$\sqrt[4]{a} \qquad \text{mit } a \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Q}^2$$

22. Das Quadrat über einer medialen Strecke heißt **medial**; es hat eine Fläche $\sqrt{A}$.
36. Die Summe zweier aussprechbarer, nicht kommensurabler Strecken heißt **binomial**.

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} \qquad \text{mit } a, b \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Q}^2$$

37. Ist das Produkt zweier medialer Strecken mit aussprechbarem Verhältnis ein meßbares Rechteck, so heißt die Summe der Strecken die **erste Bimediale**.

$$\sqrt[4]{ab^2} + \sqrt[4]{a^3b^2}$$

38. Ist das Produkt zweier medialer Strecken mit aussprechbarem Verhältnis ein mediales Rechteck, so heißt die Summe der Strecken die **zweite Bimediale**.

$$\sqrt[4]{ab^2} + \sqrt[4]{a^3c^2} \qquad \text{mit } a, b, c \in \mathbb{Q},\ a, bc \notin \mathbb{Q}^2$$

39. Ist das Produkt zweier Strecken mit irrationalem Verhältnis ein mediales Rechteck und die Summe ihrer Quadrate meßbar, so heißt die Summe der Strecken die **große Irrationale**.

$$\sqrt{a + \frac{ab}{\sqrt{1+b^2}}} + \sqrt{a - \frac{ab}{\sqrt{1+b^2}}}$$

40. Ist das Produkt zweier Strecken mit irrationalem Verhältnis ein meßbares Rechteck und die Summe ihrer Quadrate medial, so heißt die Summe der Strecken die **Seite einer meßbaren und einer medialen Fläche**.

$$\sqrt{\frac{\sqrt{1+a^2}+a}{b(1+a^2)}} + \sqrt{\frac{\sqrt{1+a^2}-a}{b(1+a^2)}}$$

41. Ist das Produkt zweier Strecken mit irrationalem Verhältnis ein mediales Rechteck und die Summe ihrer Quadrate medial und inkommensurabel zum Rechteck, so heißt die Summe der Strecken die **Seite der Summe zweier medialer Flächen**.

$$\sqrt[4]{a}\sqrt{1 + \frac{c}{\sqrt{1+c^2}}} + \sqrt[4]{a}\sqrt{1 - \frac{c}{\sqrt{1+c^2}}}$$

Definitionen II.1–6:

[13)] mit $\mathbb{Q}$ seien die positiven rationalen Zahlen bezeichnet

Sei $a+b$ eine Binomiale mit $a > b$ und $u+v$ eine Binomiale mit

$$(u+v)^2 = e(a+b) \quad .$$

Dann ist

$$u^2+v^2 = ea \quad , \quad 2uv = eb \quad .$$

Sei $u-v = \sqrt{a^2-b^2}$ kommensurabel mit a.

1. Ist a meßbar und b nicht, heißt $u+v$ **erste Binomiale**.
2. Ist a nicht meßbar, aber b, heißt $u+v$ **zweite Binomiale**.
3. Sind a, b beide nicht meßbar, so heißt $u+v$ **dritte Binomiale**.

Sei nun $\sqrt{a^2-b^2}$ inkommensurabel mit a.

4. Ist a meßbar und b nicht, heißt $u+v$ **vierte Binomiale**.
5. Ist a nicht meßbar, aber b, heißt $u+v$ **fünfte Binomiale**.
6. Sind a, b beide nicht meßbar, so heißt $u+v$ **sechste Binomiale**.

Die folgenden Sätze 48–84 enthalten weitere Definitionen, die dritte Serie der Definitionen liefert 6 weitere Typen von Irrationalitäten (**Apotome**) der Gestalt $u-v$, die folgenden Sätze untersuchen die Arithmetik zwischen diesen verschiedenen Irrationalitäten.

Buch XI: Raumlehre

Definitionen 1–28:

1. Ein **Körper** hat Länge, Breite, Tiefe.
2. Die Grenze eines Körpers ist eine **Fläche**.
3. Eine Gerade heißt **senkrecht** zu einer Ebene, wenn sie senkrecht auf allen Geraden in der Ebene steht, die sie treffen.
4. Zwei Ebenen stehen **senkrecht**, wenn die in einer Ebene gebildeten Senkrechten zur Schnittgeraden auf der anderen Ebene senkrecht stehen.
5. Der **Winkel** einer Strecke mit einer die Strecke schneidenden Ebene ist der Winkel im Durchstoßpunkt der Strecke, gebildet mit der Verbindungsstrecke zum Fußpunkt des Lotes von der Spitze der Strecke auf die Ebene.
6. Der **Winkel** zwischen zwei Ebenen ist der spitze Winkel, der von zwei Senkrechten auf der Schnittgeraden in den beiden Ebenen gebildet wird.
7. Ebenenpaare heißen **ähnlich geneigt** zueinander, wenn ihre Winkel gleich sind.
8. Ebenen heißen **parallel**, wenn sie sich nicht treffen.
9. **Ähnliche Körper** [= konvexe Polyeder] sind Körper mit ähnlichen ebenen Seiten.[14]
10. **Gleiche und ähnliche Körper** sind solche mit gleichen und ähnlichen Seiten.
11. Ein **Raumwinkel** ist die Neigung gebildet aus mehr als zwei Geraden, die sich in einem Punkt treffen und nicht in derselben Ebene liegen.
    anders: Ein **Raumwinkel** ist enthalten zwischen mehr als 2 ebenen Winkeln, die nicht in derselben Ebene liegen und von einem Punkt ausgehen.
12. Eine **Pyramide** ist ein Körper mit ebenen Seiten, der von einer Ebene zu einem Punkt hin konstruiert ist [Tatsächlich betrachtet Euklid nur Tetraeder].
13. Ein **Prisma** ist ein Körper zwischen zwei parallelen, gleichen und ähnlichen ebenen Figuren, die restlichen Seiten sind Parallelogramme [in arabischen Texten nur 3seitige Prismen, was dem Gebrauch Euklids i.a. entspricht].
14. Dreht man einen Halbkreis um seinen Durchmesser, so entsteht eine **Kugel**.
15. Die Achse der Drehung heißt **Achse der Kugel**.
16. Das **Zentrum** der Sphäre ist das Zentrum des Halbkreises.
17. Ein **Durchmesser** der Sphäre ist jede Strecke durch das Zentrum, die auf beiden Seite auf der Oberfläche endet.
18. Dreht man ein rechtwinkliges Dreieck ganz um einen Schenkel des rechten Winkels, so entsteht ein **Kegel**. Ist der andere Schenkel gleich, kleiner oder größer als der erste Schenkel, so heißt der Kegel **rechtwinklig** oder **spitzwinklig** oder **stumpfwinklig**.
19. Die **Achse** des Kegels ist die Achse der Drehung.
20. Die **Grundfläche** des Kegels ist der durch den zweiten Schenkel erzeugte Kreis.
21. Dreht man ein Rechteck ganz um eine Seite, so entsteht ein **Zylinder**.
22. Die Drehachse heißt **Achse** des Zylinders.
23. Die **Grundflächen** des Zylinders sind die beiden Kreise, die bei der Drehung durch die an die Achse anliegenden Seiten erzeugt werden.
24. **Ähnlich** sind Kegel bzw. Zylinder, für die Achsen und Durchmesser der Grundfläche proportional sind.

[14] Es wäre zu zeigen, daß daraus auch die Gleichheit der Flächenwinkel folgt.

25. Ein **Würfel** ist ein von 6 gleichen Quadraten begrenzter Körper.
26. Ein **Oktaeder** ist ein von 6 gleichen gleichseitigen Dreiecken begrenzter Körper.
27. Ein **Ikosaeder** ist ein von 20 gleichen gleichseitigen Dreiecken begrenzter Körper.
28. Ein **Dodekaeder** ist ein von 12 gleichen gleichseitigen und gleichwinkligen Fünfecken begrenzter Körper.

Propositionen 1–19 [von 39]: Die folgende Stereometrie ist nicht in gleichem Maße durchgearbeitet wie die Planimetrie in Buch I. Es fehlen Postulate, die die aus Buch I ergänzen, es fehlen Kongruenzsätze für Dreikante (die Menelaos als Sätze über sphärische Dreiecke im 1. Jh. liefert), einige Beweise sind (wie auch in Buch I) lückenhaft.

1. Liegt ein Stück einer Geraden in einer Ebene, so die ganze Gerade.
2. Zwei sich schneidende Gerade liegen in einer Ebene, ebenso ein Dreieck.
3. Schneiden sich 2 Ebenen, ist ihr Schnitt eine Gerade.
4. Errichtet man auf dem Schnittpunkt zweier sich schneidender Geraden das Lot, so steht das Lot auf der von den sich schneidenden Geraden aufgespannten Ebene senkrecht.
5. Haben drei sich in einem Punkt schneidende Geraden ein gemeinsames Lot, so liegen sie in einer Ebene.
6. Zwei Lote auf einer Ebene sind parallel.
7. Verbindet man zwei Parallelen, so sind Verbindungsgerade und Parallelen in einer Ebene.
8. Jede Parallele eines Lots einer Ebene ist wieder Lot dieser Ebene.
9. Besitzen zwei Geraden eine Parallele, so sind sie auch untereinander parallel.
10. Schneidende Parallelen zu einem sich schneidenden Geradenpaar schließen dieselben Winkel ein.
11. Fälle das Lot von einem Punkt auf eine Ebene.
12. Errichte das Lot auf einer Ebene in einem ihrer Punkte.
13. Das Lot ist wohlbestimmt.
14. Ebenen, auf denen eine Gerade senkrecht steht, sind parallel.
15. Ist ein sich schneidendes Geradenpaar zu einem anderen, nicht in derselben Ebene gelegenen sich schneidenden Geradenpaar parallel, so sind die aufgespannten Ebenen parallel.
16. Werden zwei parallele Ebenen von einer dritten Ebene geschnitten, so sind die Schnitte parallele Geraden.
17. STRAHLENSATZ: Werden zwei Geraden von parallelen Ebenen geschnitten, so werden sie im selben Verhältnis geteilt.
18. Steht eine Gerade senkrecht zu einer Ebene, so sind alle Ebenen durch diese Gerade senkrecht zu der Ebene.
19. Sind zwei sich schneidende Ebenen senkrecht zu einer Ebene, so ist auch die Schnittlinie senkrecht zu dieser Ebene.

Die folgenden Prop. 20–23, 26, 35 handeln von räumlichen Ecken aus drei Ebenen. Sind α, β, γ die Winkel in den Ebenen, so ist

$$\gamma < \alpha + \beta \quad , \quad \beta < \alpha + \gamma \quad , \quad \alpha < \beta + \gamma \quad , \qquad \alpha + \beta + \gamma < 4R$$

und diese Bedingungen reichen auch aus für eine räumliche Ecke mit Winkeln α, β, γ. Die Prop. 24, 25, 27–34, 36, 37 behandeln Parallelflache (= Spate) ohne formale Definition: Ihre Gegenseiten sind gleiche und ähnliche Parallelogramme, Diagonalebenen halbieren, die Volumina verhalten sich wie das Produkt aus Höhe und Grundfläche. Bei ähnlichen Parallelflachen verhalten sich die Volumina wie das Produkt der Kantenlängen. Verhalten sich die Kantenlängen a, b, c wie $a : b = b : c$, so ist das Volumen dasselbe wie bei einem winkelgleichen schiefen Würfel der Kantenlänge b.

XII. Volumenmessungen mit Prä-Infinitesimalrechnung

Der Inhalt des XII. Buches ist der nichtelementaren Berechnung von Volumina gewidmet (Volumen und Oberfläche der Kugel hat erst Archimedes berechnet), wobei die Resultate meist älterer Natur sind, die Beweismethoden aber nicht. Über die Volumenformeln für Pyramide oder Kegel sagt Archimedes z.B.: Demokrit hat sie gefunden (vielleicht aus Ägypten mitgebracht), aber erst Eudoxos hat sie bewiesen. Die Beweismethode ist eine Exhaustion krummlinig begrenzter Körper durch Polyeder, aber selbst für Tetraeder wird eine beliebig oft durchgeführte Zerlegung benutzt, um (unter Benutzung des Archimedischen

Axioms) beliebig gute Abschätzungen für das gewünschte Volumen zu erhalten. Im Grenzwert ergeben sich die Euklidischen Behauptungen.

Propositionen 1–18:

1. Ähnliche Vielecke in Kreisen verhalten sich wie die Quadrate der Durchmesser.
2. Kreise verhalten sich so wie die Quadrate ihrer Durchmesser.
3. Jedes Tetraeder zerlegt sich in zwei [mit Faktor $\frac{1}{2}$] ähnliche Tetraeder und zwei gleiche Prismen, die größer sind als die kleinen Pyramiden.
4. Bei verschiedenen Pyramiden gleicher Höhe liefert die Teilung von Prop. 3 Prismen, deren Volumina sich verhalten wie die Grundflächen der Pyramiden.
5. Tetraeder mit gleicher Höhe verhalten sich wie die Grundflächen.
7. Jedes Prisma über einem Dreieck ist in drei gleiche Tetraeder zerlegbar.
8. Ähnliche Tetraeder stehen im Verhältnis des Produktes der 3 von entsprechenden Punkten ausgehenden Kanten.
9. Tetraeder verhalten sich wie die Produkte aus Höhe und Grundfläche.[15)]
10. Ein Kegel ist ein Drittel des Zylinders mit gleicher Grundfläche und Höhe.
11. Kegel (Zylinder) derselben Höhe verhalten sich wie die Grundflächen.
12. Ähnliche Kegel (Zylinder) verhalten sich wie die dritte Potenz des Grundflächendurchmessers.
15. Das Volumen von Kegeln (Zylindern) ist proportional zum Produkt aus Höhe und Grundfläche.
16. Konstruiere zwischen zwei konzentrische Kreise ein gleichseitiges Vieleck, dessen Ecken auf dem größeren Kreis liegen, dessen Seiten den inneren Kreis nicht berühren.
17. Dito für konzentrische Kugeln.
18. Kugeln verhalten sich wie die dritte Potenz ihrer Durchmesser.

XIII. Die Platonischen Körper

Das letzte Buch der **Elemente** Euklids behandelt die fünf Platonischen Körper. Es geht auf Theaitet zurück. Die Konstruktion der Körper geht einher mit der Berechnung der zugehörigen Seiten u.ä.

1. Stete Teilung einer Strecke:

   $$a : x = x : (a-x) \quad \Longrightarrow \quad \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 = 5\left(\frac{a}{2}\right)^2$$

2. Umkehrung von 1.
3. [Der kleinere Abschnitt einer steten Teilung liefert stete Teilung des größeren Abschnittes, vgl. auch 5.:] $a : x = x : (a-x) \quad \Longrightarrow$

   $$\left((a-x) + \frac{a}{2}\right)^2 = 5\left(\frac{x}{2}\right)^2$$

4. Bei stet geteilter Strecke sind die Quadrate über der ganzen Strecke und über dem kleineren Abschnitt dreimal so groß wie das Quadrat über dem größeren Abschnitt:

   $$a : x = x : (a-x) \quad \Longrightarrow \quad a^2 + (a-x)^2 = 3x^2$$

5. Setzt man den größeren Abschnitt einer stet geteilten Strecke an, so entsteht eine stete Teilung:

   $$a : x = x : (a-x) \quad \Longrightarrow \quad (a+x) : a = a : x$$

7. Sind in einem gleichseitigen Fünfeck drei Winkel gleich, so ist das Fünfeck gleichwinklig.
8. Diagonalen im regulären Fünfeck teilen sich stet, ihre größeren Abschnitte sind gleich der Fünfeckseite s_5:

   $$d_5 : s_5 = s_5 : (d_5 - s_5)$$

9. Für die Seiten des regulären 6- und 10-Ecks in einem Kreis gilt

   $$(s_6 + s_{10}) : s_6 = s_6 : s_{10} \quad .$$

10. Für die Seiten des regulären 5-, 6- und 10-Ecks in einem Kreis gilt

    $$s_5^2 = s_6^2 + s_{10}^2 \quad .$$

11. Die Seite eines regulären Fünfecks in einem Kreis vom Radius r ist

    $$s_5 = \frac{r}{2} \cdot \sqrt{10 - 2\sqrt{5}} \quad .$$

12. Das gleichseitige Dreieck in einem Kreis vom Radius r hat die Seite

    $$s_3 = r\sqrt{3} \quad .$$

---

15) wörtlich: In gleichen Pyramiden mit dreieckigen Grundflächen sind die Grundflächen den Höhen umgekehrt proportional. Und Pyramiden mit dreieckigen Grundflächen, in denen die Grundflächen den Höhen umgekehrt proportional sind, sind gleich.

13. Konstruiere ein regelmäßiges Tetraeder in einer Kugel. Der Durchmesser der Umkugel eines regulären Tetraeders mit Kantenlänge ℓ_4 ist
$$2r = \ell_4 \sqrt{\frac{3}{2}} \quad .$$
14. Konstruiere ein reguläres Oktaeder in einer Kugel. Der Durchmesser der Umkugel eines regulären Oktaeders mit Kantenlänge ℓ_8 ist
$$2r = \ell_8 \sqrt{2} \quad .$$
15. Konstruiere einen Würfel in einer Kugel. Der Durchmesser der Umkugel eines Würfels mit Kantenlänge ℓ_6 ist
$$2r = \ell_6 \sqrt{3} \quad .$$
16. Konstruiere ein reguläres Ikosaeder in einer Kugel. Die Kante eines regulären Ikosaeders in einer Kugel vom Radius r ist
$$\ell_{20} = r\sqrt{2 - 2/\sqrt{5}} = \frac{r}{\sqrt{5}} \cdot \sqrt{10 - 2\sqrt{5}} \quad .$$
Euklid erhält dieses Ergebnis durch Berechnung des Umkreisradius ρ der von Ikosaederecken gebildeten regulären Fünfecke zu $\rho = \frac{2r}{\sqrt{5}}$, und anschließende Konstruktion eines Fünfecks mit Umkreisradius ρ.
17. Konstruiere ein reguläres Dodekaeder in einer Kugel. Die Kante eines regulären Dodekaeders in einer Kugel vom Radius r ist
$$\ell_{12} = r \cdot \frac{\sqrt{5} - 1}{\sqrt{3}} \quad .$$
18. Zusammenfassung, Konstruktion aller Kanten.

18.a Satz: Es gibt keine anderen regulären (konvexen) Körper außer den 5 genannten Körpern.

Bemerkung: Die sogenannten Bücher XIV und XV der *Elemente* des Euklid enthalten Material, das nach Euklid hinzugefügt wurde, z.B. in Buch XIV:

Satz von Aristaios:

Sind Ikosaeder und Dodekaeder derselben Kugel einbeschrieben, so haben ihre Flächen (Dreiecke bzw. Fünfecke) denselben Umkreisradius. Daher haben sie auch dieselbe Inkugel.

Satz von Apollonius/Hypsikles:

Die Oberflächen (Volumina) von Dodekaeder und Ikosaeder verhalten sich so wie die Würfelkante zur Ikosaederkante.