Drei 3×3 – Legespiele

Torsten Sillke *

12. May 1994

Schon lange hat mich gewundert, daß es keinen synthetischen Teilesatz für ein 3×3 – Legespiel gibt. Bei der Suche nach solchen Aufgaben bin ich bei Teilmengen der MacMahonschen Quadraten fündig geworden [Gardner66, chapter 16, pp 184-195], [MacMahon21]. Bekanntlich gibt es 24 verschiedene Quadrate, wenn die Kanten bzw. die Ecken mit drei Farben zu färben sind. Ich wähle nun die Teile aus, die genau drei Farben haben. Dies sind gerade neun Teile.

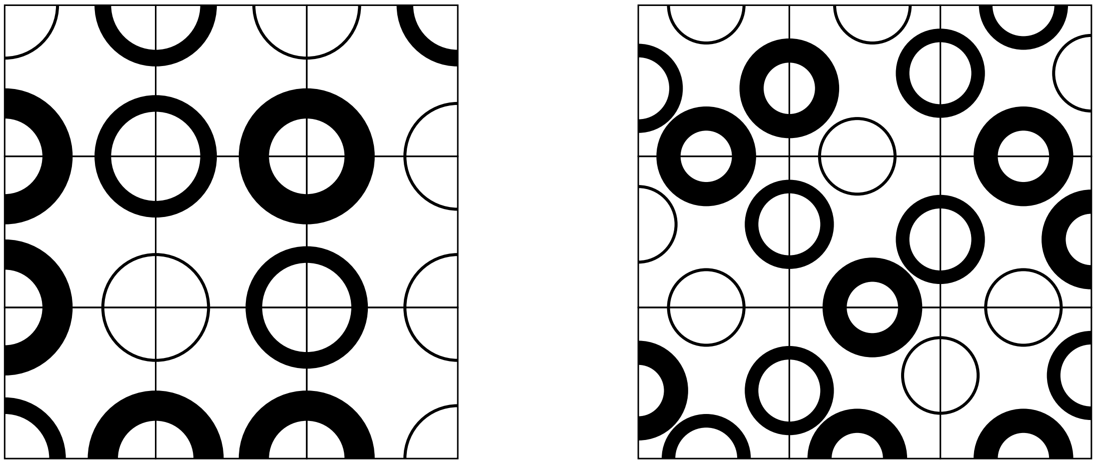

Abbildung 1: Zwei 3×3 – Legespiele (Ecken- und Kantenversion)

Die Eckenversion ergibt ein Puzzle, das genau ein Lösung hat. Hierbei ist zu berücksichtigen, daß neben der Quadratsymmetrie auch noch die Permutation der Farben möglich ist. Dadurch gibt es für die Mitte des Quadrates nur zwei Alternativen.

Da die Kantenvariante weniger Bedingungen an das Matching stellt, gibt es hier reichlich Lösungen. Es gibt verschiedene Wege, diese Anzahl einzuschränken.

- Man kann zusätzlich den Rand festlegen. Die Forderung, daß jede Kante des Quadrates einfarbig zu sein hat, ist aber zu restriktiv. Hier gibt es keine Lösung. Da die Anzahl Kanten einer Farbe gerade ist, muß eine gerade Anzahl jeder Farbe am Rand liegen. Somit müssen zwei Seiten den 3×3 Quadrates gleiche Farbe haben. Da man den Rand nicht mit einer Farbe abdecken kann, bleiben nur noch zwei Anordnungen mit zwei Farben übrig. Entweder sind die gegenüberliegenden Ränder gleich- oder verschiedenfarbig. Die Computeranalyse zeigt, daß auch diese Fälle nicht gehen. Ein schöneres Argument ist noch erwünscht. Eine andere Randbedingung ist die Forderung, die 12 Kanten des Randes sollen zwischen zwei Farben immer alternieren. Diese Version besitzt genau eine Lösung. Diese Randbedingung ist insbesondere zyklisch.

- Man kann die Kanten orientieren. Dies ist in Figure 1 geschehen, indem die jeweils doppelt vorhandene Farbe nach und die beiden einfach vorkommenden nach rechts verschoben wurden. Dieses Puzzle hat zwei Lösungen.

*e–mail: Torsten.Sillke@uni-bielefeld.de

Appendix

Diese Note ist von Bernhard Wiezorke, dem einzigen deutschen Editor des CFF, für das CFF ins englische übersetzt worden [Sillke94]. Kurz nach Erscheinen des Artikels entdeckte jeder von uns, daß die Kantenversion (nicht orientiert) schon einmal auf dem Markt war [MagNif89]. In dieser Ausführung sind die Farben durch unterschiedliche Höhen gekennzeichnet. Es wurden zyklische Randbedingungen vorgeschrieben. Dieses Puzzles ist einfach, da es symmetrische Lösungen gibt. Dadurch wird die Bestimmung der Anzahl der Lösungen kompliziert aber auch interessant. Fixiert man ein Teil in seiner Position, so ergeben sich 44 Legungen. (3 symmetrische und 3 asymmetrische)

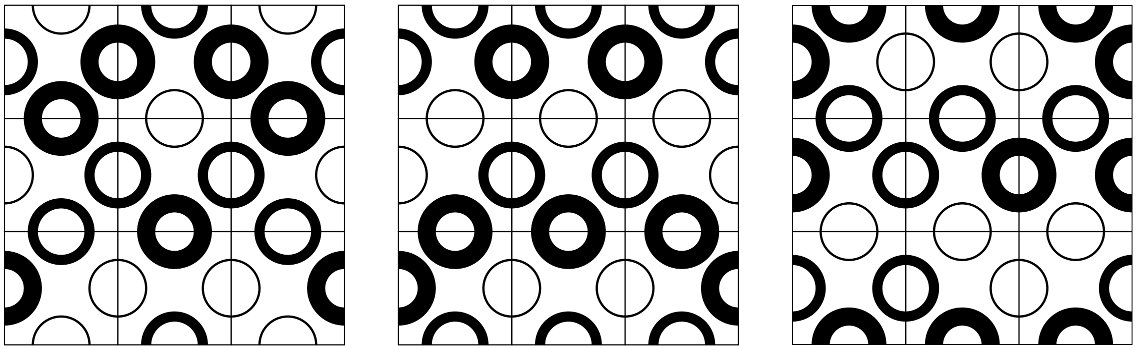

Abbildung 2: Lösungen der Kantenversion mit Farbsymmetrie

Ich kenne nur ein 4×4 – Legespiele mit synthetischen Satz. Es ist ein binares Eckenpuzzles, deren Teile nicht gedreht werden, und von Ivan Moscovich [Moscovich72] in den USA patentiert worden. Ein Abdruck des Patentes findet sich in [Haubrich96].

Jacques Haubrich hat inzwischen alle planaren Legespiele catalogisiert [Haubrich95] und hat alle denkbaren 3×3 – Legespiele mit bis zu vier Farben in Ecken- wie Kantenform analysiert [Haubrich96]. Neben den Statistiken findet man in der späteren Arbeit auch verschiedene Strategien zur Lösung eines 3×3 – Legespieles bewertet und den Versuch, die Schwierigkeit des Puzzles zu messen. Wie er mir 1996 mitteilte, konnte er kein Schwierigkeitsmaß finden aber alle Verschläge hierzu widerlegen [Sillke94, Editor's Note].

Literatur

[Gardner66] Gardner (Martin) — *New Mathematical Diversions from Scientific American*, Simon & Schuster, New York, 1966,
Chapter 16: The 24 Color Squares and the 30 Color Cubes

[Haubrich95] Haubrich (Jacques) — *Compendium of Card Matching Puzzles*, Selfpublished, Jacques Haubrich, Aeneaslaan 21, 5631 LA Eindhoven, The Netherlands, 1995, (e-amil: jhau@win.tue.nl)

[Haubrich96] Haubrich (Jacques) — *About, Beyond and Behind Card Matching Puzzles*, Selfpublished, Jacques Haubrich, Aeneaslaan 21, 5631 LA Eindhoven, The Netherlands, 1996, (e-amil: jhau@win.tue.nl)

[MacMahon21] MacMahon (Major Percy Alexander) — *New Mathematical Pastimes*, University Press, Cambridge, 1921, pp. 1-49

[MagNif89] MagNif — No 2304-M *On the Level* TM, 1989, Mag-Nif Inc., 8820 East Avenue, Mentor, Ohio 44060, USA. *Kantenversion mit zyklischen Randbedingungen. Kantenlänge 29mm, Höhen: 14, 28, 42mm, Farbe: Elfenbein.*

[Moscovich72] Moscovich (Ivan) — *Board Game Apparatus*, U. S. Patent No. 3,677,549 of July 18, 1972. *Ein binaeres* 4×4 *Ecken-Legespiel (nur Translation).*

[Sillke94] Sillke (Torsten) — *Three* 3×3 *Matching Puzzles*, CFF 34 (1994) 22-23