Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

Prof. Dr. Christopher Voll
Wintersemester 2017/18

Lineare Algebra 1
Präsenzübungsblatt 2[1]

Durchweg seien X, Y, Z Mengen.

Aufgabe 1. Für eine Teilmenge $M \subseteq X$ bezeichne $M^c = X \setminus M$ das *Komplement* von M in X. Seien $M, N, P \subseteq X$ beliebige Teilmengen. Zeigen Sie:

(1) $(M \cup N)^c = M^c \cap N^c$,
(2) $(M \cap N)^c = M^c \cup N^c$,
(3) $M^c \setminus N = (M \cup N)^c$,
(4) $M \setminus (N \cup P) = M \cap (N \cup P)^c = (M \setminus N) \cap (M \setminus P) = M \cap N^c \cap P^c$.

Zeichnen Sie Mengendiagramme, die die jeweiligen Mengen illustrieren.

Seien $M \subseteq X$ und $N \subseteq Y$ Teilmengen sowie $f : X \to Y$ eine Abbildung. Man nennt

$$f(M) := \{y \in Y \mid \exists x \in M : y = f(x)\}$$

das *Bild* (engl. *image*) von M (unter f) und

$$f^{-1}(N) := \{x \in X \mid f(x) \in N\}$$

das *Urbild* (engl. *pre-image*) von N (unter f).

Aufgabe 2. Seien $M_1, M_2 \subseteq X$ und $N_1, N_2 \subseteq Y$ Teilmengen. Zeigen Sie:

(1) $f(M_1 \cup M_2) = f(M_1) \cup f(M_2)$,
(2) $f(M_1 \cap M_2) \subseteq f(M_1) \cap f(M_2)$,
(3) $f^{-1}(N_1 \cup N_2) = f^{-1}(N_1) \cup f^{-1}(N_2)$,
(4) $f^{-1}(N_1 \cap N_2) = f^{-1}(N_1) \cap f^{-1}(N_2)$.

Zeigen Sie anhand eines Beispiels, dass die Inklusion in (2) strikt sein kann.

Aufgabe 3. Es bezeichne $\mathcal{P}(X) = \{Y \mid Y \subseteq X\}$ die Potenzmenge von X. Konstruieren Sie bzw. zeigen Sie die Nichtexistenz einer Abbildung

(1) $i : X \to \mathcal{P}(X)$, die injektiv ist, sowie einer Abbildung
(2) $s : X \to \mathcal{P}(X)$, die surjektiv ist.

(Hinweis zu (2): Gegeben eine surjektive "Kandidatin" s, betrachten Sie die Menge $Y = \{x \in X \mid x \notin s(x)\} \in \mathcal{P}(X)$.)

Ist $g : Y \to Z$ eine Abbildung, so ist die *Verknüpfung* (engl. *composition*) von g und f definiert als die Abbildung

$$g \circ f : X \to Z, \quad x \mapsto g(f(x)).$$

Aufgabe 4. Beweisen Sie:

(1) Ist $g \circ f$ surjektiv, so ist auch g surjektiv.
(2) Ist $g \circ f$ injektiv, so ist auch f injektiv.

[1]Die Präsenzübungen beginnen in Woche 2. Es gibt kein Präsenzübungsblatt 1.

Gelten die jeweiligen Behauptungen auch für die jeweils andere Abbildung f bzw. g? Beweisen Sie, oder geben Sie Gegenbeispiele.

Es bezeichne X^Y die Menge aller Abbildungen von Y nach X.

Aufgabe 5. (1) Bestimmen Sie die Mengen $\varnothing^Y$ und $X^\varnothing$ explizit.
(2) Angenommen X und Y sind endliche Mengen. Bestimmen Sie die Kardinalität der Menge X^Y.

Wir schreiben $X \sim Y$, falls eine bijektive Abbildung $f : X \to Y$ existiert.

Aufgabe 6. Zeigen Sie:
(1) Wenn $X \cap Y = \varnothing$, so gilt $X^{Y \cup Z} \sim X^Y \times X^Z$.
(2) $(X \times Y)^Z \sim X^Z \times Y^Z$.
(3) $X^{Y \times Z} \sim (X^Y)^Z$.

Zeigen Sie anhand eines Beispiels, dass die Hypothese in (1) notwendig ist.

Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

Prof. Dr. Christopher Voll
Wintersemester 2017/18

Lineare Algebra 1
Präsenzübungsblatt 3

Seien $n \in \mathbb{N}$ und $r, s \in \mathbb{Z}$. Wir nennen r und s *kongruent modulo* n, symbolisch

$$r \equiv s \bmod (n) \quad \text{oder} \quad r \equiv_n s,$$

falls $r - s \in n\mathbb{Z} = \{ni \mid i \in \mathbb{Z}\}$, d.h. falls die Differenz $r - s$ durch n teilbar ist.

Aufgabe 1. Zeigen Sie, dass $\equiv_n$ eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Z}$ ist.

Die Äquivalenzklasse von r wird mit $[r]_n$ bezeichnet — oder schlicht mit $[r]$, wenn n klar ist — und die *Restklasse von r modulo n* genannt.

Aufgabe 2. Zeigen Sie, dass $[r]_n = r + n\mathbb{Z} = \{r + ni \mid i \in \mathbb{Z}\}$ und dass

$$\{[i]_n \mid i \in \mathbb{Z}\} = \{[0]_n, [1]_n, \dots, [n-1]_n\} =: \mathbb{Z}/(n).$$

Die Menge $\mathbb{Z}/(n)$ der Äquivalenzklassen wird die Menge der *ganzen Zahlen modulo n* genannt[1].Wir definieren auf $\mathbb{Z}/(n)$ eine Operation $+_n$ wie folgt:

$$+_n : \mathbb{Z}/(n) \times \mathbb{Z}/(n) \to \mathbb{Z}/(n)$$
$$([r]_n, [s]_n) \mapsto [r + s]_n$$

Aufgabe 3. Zeigen Sie, dass diese *Addition modulo n* wohldefiniert, d.h. von den Repräsentanten r und s unabhängig ist, und auf $\mathbb{Z}/(n)$ die Struktur einer abelschen Gruppe definiert.

Aufgabe 4. Berechnen Sie die Verknüpfungstafeln der Gruppen $\mathbb{Z}/(n)$ für $n \in \{2, 3, 4\}$.

[1] Man findet auch die Notationen $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z}_n$ in der Literatur.

Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

Prof. Dr. Christopher Voll
Wintersemester 2017/18

Lineare Algebra 1
Präsenzübungsblatt 4

Aufgabe 1. Betrachten Sie die folgenden Mengen M und Operationen

$$\circ : M \times M \to M.$$

Welche Operationen sind assoziativ?

(1) $M = \mathbb{N}$, $x \circ y := x^y$,
(2) $M = \mathbb{N}$, $x \circ y := \mathrm{ggT}(x, y)$ (hier bezeichnet $\mathrm{ggT}(x, y)$ den *größten gemeinsamen Teiler* von x und y),
(3) $M = \mathbb{Z}$, $x \circ y := x - y$,
(4) $M = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, $x \circ y := x/y$.

Aufgabe 2. Sei $n \in \mathbb{N}$. Wir definieren auf $\mathbb{Z}/(n)$, den ganzen Zahlen modulo n (vergleiche Präsenzübungsblatt 3, Aufgabe 2), eine zusätzliche Operation $\cdot_n$ wie folgt:

$$\begin{aligned} \cdot_n : \mathbb{Z}/(n) \times \mathbb{Z}/(n) &\to \mathbb{Z}/(n) \\ ([r]_n, [s]_n) &\mapsto [rs]_n. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass auch diese *Multiplikation modulo* n wohldefiniert, d.h. von den Repräsentanten r und s unabhängig ist, und zusammen mit $+_n$ auf $\mathbb{Z}/(n)$ die Struktur eines Ringes definiert.

Bestimmen Sie die Verknüpfungstafeln der Operationen $+_n$ und $\cdot_n$ der Ringe $(\mathbb{Z}/(n), +_n, \cdot_n)$ für $n \in \{1, 2, 3, 4\}$.

Aufgabe 3. Zeigen Sie: Genau dann ist $(\mathbb{Z}/(n), +_n, \cdot_n)$ ein Körper, wenn n eine Primzahl ist.

Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

Prof. Dr. Christopher Voll
Wintersemester 2017/18

Lineare Algebra 1
Präsenzübungsblatt 5

Gegeben seien ein Körper K und ein K-Vektorräume V.

Aufgabe 1. Seien $U_1, U_2 \leq V$ zwei K-lineare Untervektorräume von V. Zeigen Sie:

(1) Der Durchschnitt $U_1 \cap U_2$ ist stets ein K-linearer Unterraum von V.
(2) Die Vereinigung $U_1 \cup U_2$ ist genau dann ein K-linearer Unterraum von V, wenn $U_1 \subseteq U_2$ oder $U_2 \subseteq U_1$ gilt.

Aufgabe 2. Sei W ein weiterer K-Vektorraum. Zeigen Sie: Die Menge $\mathrm{Hom}_K(V, W)$ aller K-linearen Abbildungen von V nach W ist ein K-linearer Unterraum des K-Vektorraums $\mathrm{Abb}(V, W)$.

Aufgabe 3. Betrachten Sie die Vektoren

(1) $(2, 0, -2), (2, -1, 1), (0, 2, -1)$ im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^3$,
(2) $(0, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, -1)$ im $\mathbb{F}_3$-Vektorraum $\mathbb{F}_3^3$,
(3) $(0, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, -1)$ im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^3$,
(4) $\frac{1}{3}, \frac{3}{4}, \frac{5}{11}$ im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}$,
(5) $\frac{1}{3}, \frac{3}{4}, \frac{5}{11}$ im $\mathbb{Q}$-Vektorraum $\mathbb{R}$,
(6) $(i + 1, i - 1), (-1 + i, -1 - i)$ im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{C}^2$,
(7) $(i + 1, i - 1), (-1 + i, -1 - i)$ im $\mathbb{C}$-Vektorraum $\mathbb{C}^2$.

Stellen Sie in jedem Fall fest, ob die Vektoren ein Erzeugendensystem des jeweiligen Vektorraums bilden und ob sie linear unabhängig über dem jeweiligen Grundkörper sind.

Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

Prof. Dr. Christopher Voll
Wintersemester 2017/18

Lineare Algebra 1
Präsenzübungsblatt 6

Sei K ein Körper.

Aufgabe 1. Sei V ein K-Vektorraum, und W ein K-linearer Unterraum von V. Definiere die folgende Relation $R \subseteq V \times V$: Für $v_1, v_2 \in V$ sei $(v_1, v_2) \in R$ genau dann, wenn $v_1 - v_2 \in W$.

(1) Zeigen Sie, dass R eine Äquivalenzrelation ist.
(2) Beschreiben Sie die Äquivalenzklassen von R. Welche Klassen sind K-lineare Unterräume von V?

Aufgabe 2. Sei

$$K[t] := \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} k_i t^i \mid k_i \in K \text{ für } i \in \mathbb{N}_0,\ k_i = 0 \text{ für fast alle } i \right\}$$

die Menge der *Polynome in der Unbestimmten* t *mit Koeffizienten in* K. Wir definieren:

$$+ : K[t] \times K[t] \to K[t] \qquad \cdot : K \times K[t] \to K[t]$$

$$\left(\sum_i k_i t^i, \sum_i k_i' t^i \right) \to \sum_i (k_i + k_i') t^i \qquad \left(k, \sum_i k_i t^i \right) \to \sum_i k k_i t^i.$$

Zeigen Sie, dass $K[t]$ mit diesen Operationen ein K-Vektorraum ist. Bestimmen Sie eine K-Basis von $K[t]$. Ist $\dim_K(K[t]) < \infty$? Begründen Sie Ihre Antwort.

Für $n \in \mathbb{N}_0$ sei

$$t^n K[t] := \{ t^n f(t) \mid f(t) \in K[t] \}.$$

Zeigen Sie, dass $t^n K[t]$ ein K-linearer Unterraum von $K[t]$ ist. Bestimmen Sie eine K-Basis des Quotientenraumes $K[t]/t^n K[t]$. Zeigen Sie, dass $\dim_K(K[t]/t^n K[t]) = n$ gilt.

Aufgabe 3. Sei $\mathcal{A} := \mathrm{Abb}(\mathbb{N}_0, K) = \{ f \mid f : \mathbb{N}_0 \to K \}$. Wir definieren

$$\int : \mathcal{A} \to \mathcal{A}, \quad f \mapsto \left(n \mapsto \sum_{i=0}^{n} f(i) \right) =: \int f$$

und

$$\Delta : \mathcal{A} \to \mathcal{A}, \quad f \mapsto (n \mapsto f(n) - f(n-1)) =: \Delta f.$$

(Hier ist, per Konvention, $f(-1) = 0$ für alle $f \in \mathcal{A}$.) Zeigen Sie, dass die Abbildungen $\int$ und Δ K-linear sind und dass

$$\Delta \circ \int = \int \circ \Delta = \mathrm{Id}_{\mathcal{A}}$$

gilt. Sei nun

$$\mathcal{F} := \{ f \in \mathcal{A} \mid |\{ i \in \mathbb{N}_0 \mid f(i) \neq 0 \}| < \infty \}$$

die Teilmenge aller Abbildungen in $\mathcal{A}$ mit *endlichem Träger*; siehe Übungsblatt 4, Aufgabe 3. Bezeichne mit $\int |_{\mathcal{F}} : \mathcal{F} \to \mathcal{A}$, $f \mapsto \int f$, die *Einschränkung* von $\int$ auf $\mathcal{F}$. Analog ist $\Delta |_{\mathcal{F}} : \mathcal{F} \to \mathcal{A}$ definiert. Gilt $\mathrm{im}(\Delta|_{\mathcal{F}}) \subseteq \mathcal{F}$? Gilt $\mathrm{im}(\int |_{\mathcal{F}}) \subseteq \mathcal{F}$? Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

Prof. Dr. Christopher Voll
Wintersemester 2017/18

Lineare Algebra 1
Präsenzübungsblatt 7

Seien K ein Körper, V ein K-Vektorraum und $f : V \to V$ eine K-lineare Abbildung.

Aufgabe 1. Die Abbildung f habe die Eigenschaft, dass

$$f^2 := f \circ f = f$$

gilt. (Lineare Abbildungen mit dieser Eigenschaft nennt man *Projektionen.*) Zeigen Sie, dass es komplementäre Unterräume W_1 und W_2 von V gibt mit $f(W_1) = \{0\}$ und $f(w_2) = w_2$ für alle $w_2 \in W_2$.

Aufgabe 2. Sei $\dim_K V < \infty$. Setze $V_0 := V$ und

$$V_{i+1} := f(V_i) = \{f(v) \mid v \in V_i\}$$

für $i \in \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie: Es gibt ein $n \in \mathbb{N}$ mit $V_{n+i} = V_n$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie anhand eines Beispiels, dass die Annahme '$\dim_K V < \infty$' notwendig ist für die Schlußfolgerung.

Aufgabe 3. Man bestimme komplementäre Unterräume zu den folgenden $\mathbb{R}$-linearen Unterräumen W des $\mathbb{R}^3$ bzw. $\mathbb{R}^4$:

(1) $W = \langle (3, -3, -1), (-2, 0, 1), (-5, 9, 1) \rangle_{\mathbb{R}}$,
(2) $W = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid -2x + 3y - z + 2w = 0\}_{\mathbb{R}}$.

Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

Prof. Dr. Christopher Voll
Wintersemester 2017/18

Lineare Algebra 1
Präsenzübungsblatt 8

Seien K ein Körper und V ein K-Vektorraum.

Aufgabe 1. Seien W_1 und W_2 K-lineare Unterräume von V. Betrachten Sie die Abbildung

$$\begin{aligned}\phi : W_1 \oplus W_2 &\to V\\ (w_1, w_2) &\mapsto w_1 + w_2.\end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass ϕ K-linear ist, und beschreiben Sie $\mathrm{im}(\phi)$ und $\ker(\phi)$. Folgern Sie, dass ϕ genau dann ein K-linearer Isomorphismus ist, wenn W_1 und W_2 komplementär in V sind. (Man sagt in diesem Fall auch, dass V die (*interne*) *direkte Summe* von W_1 und W_2 ist, und schreibt $V = W_1 \oplus W_2$.)

Aufgabe 2. Angenommen $\dim_K V < \infty$. Es sei

$$W_1 \subseteq W_2 \subseteq \cdots \subseteq W_n$$

eine Folge[1] K-linearer Unterräume von V.

(1) Zeigen Sie, dass es für $i = 1, \ldots, n$ jeweils ein Komplement W_i' von W_i in V gibt derart, dass

$$W_n' \subseteq \ldots W_2' \subseteq W_1'$$

gilt.

(2) Bestimmen Sie eine solche komplementäre Fahne (W_i') für die Fahne im $\mathbb{Q}$-Vektorraum $\mathbb{Q}^3$ bestehend aus den $\mathbb{Q}$-linearen Unterräumen

$$\begin{aligned}W_1 &= \langle (3, -3, 1) \rangle_{\mathbb{Q}},\\ W_2 &= W_1 + \langle (-2, 1, 1) \rangle_{\mathbb{Q}},\\ W_3 &= W_2 + \langle (0, 3, -1) \rangle_{\mathbb{Q}}.\end{aligned}$$

Aufgabe 3. Für welche Werte von $\lambda \in \mathbb{R}$ gibt es eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$\begin{aligned}\phi((3, -1)) &= (1, 1),\\ \phi((-3, 5)) &= (1, \lambda),\\ \phi((0, 4)) &= (2, 3)?\end{aligned}$$

[1] Man spricht auch von einer *Fahne* in V – sehen Sie, warum?

Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

Prof. Dr. Christopher Voll
Wintersemester 2017/18

Lineare Algebra 1
Präsenzübungsblatt 9

Sei K ein Körper.

Aufgabe 1. Es sei V ein n-dimensionaler K-Vektorraum, und $W \leq V$ ein m-dimensionaler K-linearer Unterraum von V.

(1) Es sei
$$E_W := \{f \in \mathrm{End}_K(V) \mid f(W) \subseteq W\}.$$
Zeigen Sie, dass E_W ein Unterring des Endomorphismenrings $\mathrm{End}_K(V)$ ist und beschreiben Sie seine Einheitengruppe ${E_W}^*$.

(2) Es sei
$$M_m(K) := \{A \in \mathrm{Mat}_n(K) \mid a_{ij} = 0 \text{ falls } i > m \text{ und } j \in \{1, \ldots, m\}\}.$$
Zeigen Sie, dass $M_m(K)$ ein Unterring des Matrizenrings $\mathrm{Mat}_n(K)$ ist, und beschreiben Sie seine Einheitengruppe $M_m(K)^*$.

(3) Zeigen Sie: Es existiert eine Basis $\mathcal{B}$ für V derart, dass für alle $f \in \mathrm{End}_K(V)$ gilt:
$$f = f_A \in E_W \text{ genau dann, wenn } A \in M_m(K),$$
$$f = f_A \in {E_W}^* \text{ genau dann, wenn } A \in M_m(K)^*.$$

Aufgabe 2. Sei nun p eine Primzahl, und $K = \mathbb{Z}/(p)$. Berechnen Sie, für $m = 0, 1, \ldots, n$, die Mächtigkeiten $|M_m(K)|$ und $|M_m(K)^*|$. Hierbei sind $M_m(K)$ und $M_m(K)^*$ wie in Aufgabe 1 definiert.

Aufgabe 3. Es sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum, $\phi_1, \ldots, \phi_n \in V^* = \mathrm{Hom}_K(V, K)$ und $b_1, \ldots, b_n \in K$. Zeigen Sie: Genau dann ist das lineare Gleichungssystem
$$\phi_i(x) = b_i, \quad i = 1, \ldots, n$$
lösbar in $x \in V$, wenn folgende Bedingung erfüllt ist:

Sind $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ mit $\sum_{i=1}^n \lambda_i \phi_i = 0$, so gilt auch $\sum_{i=1}^n \lambda_i b_i = 0$.

Aufgabe 4. In Aufgabe 2 von Blatt 7 hatten Sie nachgerechnet, dass die Menge L aller Quadrupel $(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4$, für die die drei folgenden Gleichungen erfüllt sind, einen affinen Unterraum des $\mathbb{R}^4$ bilden:
$$\begin{aligned} x - y + z - w &= 2 \\ -4x + 2y + 3z + 2w &= 12 \\ x - y + z + w &= -8 \end{aligned}$$
Schreiben Sie L in der Form $v + W$ für $v \in \mathbb{R}^4$ und $W \leq \mathbb{R}^4$, und ergänzen Sie L zu einer Basis des Quotientenraums $\mathbb{R}^4/W$.

Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

Prof. Dr. Christopher Voll
Wintersemester 2017/18

Lineare Algebra 1
Präsenzübungsblatt 10

Sei K ein Körper.

Aufgabe 1. Seien V und W endlich-dimensionale K-Vektorräume. Beweisen Sie: Die Abbildung

$$\phi : \mathrm{Hom}_K(V,W) \to \mathrm{Hom}_K(W^*,V^*), \quad f \mapsto f^*,$$

die einer K-linearen Abbildung f ihre duale Abbildung f^* zuordnet, ist K-linear.[1]

Aufgabe 2. Sei $K = \mathbb{Q}$ und

$$A := \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \\ 2 & -8 & 0 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 \\ -3 & 0 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}, \quad C := \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$D := \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}, \quad E := \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie alle möglichen Produkte dieser Matrizen, sowie die Ränge aller beteiligten Matrizen.

Aufgabe 3. Seien $l, m, n \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathrm{Mat}_{n,m}(K)$ und $B \in \mathrm{Mat}_{m,l}(K)$. Wir bezeichnen mit $\mathrm{rk}'(A)$ und $\mathrm{rk}'(B)$ den (Spalten-)Rang der Matrizen A bzw. B. Zur Erinnerung: Ist $f_A : K^m \to K^n$ die K-lineare Abbildung $x \mapsto xA^{\mathrm{tr}}$, so ist $\mathrm{rk}'(A) = \dim(\mathrm{im}(f_A))$. Analoges gilt für B und AB.

Ziel dieser Aufgabe ist es, die folgenden Ungleichungen zu beweisen:

$$\mathrm{rk}'(A) + \mathrm{rk}'(B) - m \leq \mathrm{rk}'(AB) \leq \min\{\mathrm{rk}'(A), \mathrm{rk}'(B)\}. \tag{1}$$

Der Beweis erfolgt in zwei Schritten:

- Betrachten Sie zunächst die Einschränkung $g := f_A|_{\mathrm{im}(f_B)}$. Beachten Sie, dass $\mathrm{im}(g) = \mathrm{im}(f_{AB})$ und $\ker(g) = \ker(f_A) \cap \mathrm{im}(f_B) \leq \ker(f_A)$ gilt. Zeigen Sie, etwa mithilfe des Dimensionssatzes, dass
$$\mathrm{rk}'(AB) = \mathrm{rk}'(B) - \dim(\ker(g)) \tag{2}$$
gilt, woraus $\mathrm{rk}'(AB) \leq \mathrm{rk}'(B)$ folgt. Folgern Sie nun die zweite Ungleichung in (1).
- Folgern Sie aus (2) (etwa wieder mit Hilfe des Dimensionssatzes), dass
$$\mathrm{rk}'(AB) \geq \mathrm{rk}'(B) - \dim(\ker(f_A)) = \mathrm{rk}'(B) - (m - \mathrm{rk}'(A))$$
gilt, also die erste Ungleichung in (1) gilt.

Geben Sie Beispiele an, in denen anstelle der ersten bzw. der zweiten Ungleichung in (1) eine Gleichung steht.

[1] Proposition 5.36 besagt, dass ϕ sogar ein K-linearer *Isomorphismus* ist. Bis auf die hier zu zeigende Linearität wird bzw. hatten wir die Proposition in der Vorlesung bewiesen.

Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

Prof. Dr. Christopher Voll
Wintersemester 2017/18

Lineare Algebra 1
Präsenzübungsblatt 11

Seien K ein Körper und V und W endlich-dimensionale K-Vektorräume.

Aufgabe 1. Sei $f : V \to W$ eine K-lineare Abbildung mit dualer Abbildung $f^* : W^* \to V^*$. Weiter sei $b \in W$. Zeigen Sie: Die lineare Gleichung $f(x) = b$ ist genau dann in $x \in V$ lösbar, wenn $w^*(b) = 0$ für alle $w^* \in \ker(f^*)$.

Aufgabe 2. Sei $f : V \to W$ eine K-lineare Abbildung, die bezüglich geeigneter Basen $\mathcal{B}_V$ von V und $\mathcal{B}_W$ von W durch die Matrix

$$A = M_{\mathcal{B}_W}^{\mathcal{B}_V}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

gegeben sei. Bestimmen Sie eine Basis von $\ker(f)$ und eine Basis von $\operatorname{im}(f)$.

Aufgabe 3. Es seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ geordnete K-Basen von V, mit zugehörigen dualen Basen $\mathcal{B}^*$ und $\mathcal{A}^*$ des Dualraums V^*. Zeigen Sie, dass für die Basiswechselmatrizen $T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}$ und $T_{\mathcal{B}^*}^{\mathcal{A}^*}$ die Gleichung

$$T_{\mathcal{B}^*}^{\mathcal{A}^*} = ((T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}})^{-1})^{\mathrm{tr}}$$

gilt.

Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

Prof. Dr. Christopher Voll
Wintersemester 2017/18

Lineare Algebra 1
Präsenzübungsblatt 12

Sei K ein Körper.

Aufgabe 1. Eine Matrix $A \in \mathrm{Mat}_n(K)$ heißt *symmetrisch*, falls $A = A^{\mathrm{tr}}$, und *antisymmetrisch* (oder *schiefsymmetrisch*) falls $A = -A^{\mathrm{tr}}$. Wir schreiben

$$\mathrm{Sym}^{(n)}(K) = \{A \in \mathrm{Mat}_n(K) \mid A = A^{\mathrm{tr}}\}$$

für die Menge der symmetrischen $n \times n$-Matrizen über K und

$$\mathrm{A}^{(n)}(K) = \{A \in \mathrm{Mat}_n(K) \mid A = -A^{\mathrm{tr}}\}$$

für die Menge der antisymmetrischen $n \times n$-Matrizen über K. Zeigen Sie, dass sowohl $\mathrm{Sym}^{(n)}(K)$ als auch $\mathrm{A}^{(n)}(K)$ Unterräume von $\mathrm{Mat}_n(K)$ sind und bestimmen Sie die jeweiligen K-Dimensionen. Bestimmen Sie insbesondere $\dim_K(\mathrm{A}^{(2)}(K))$.

Aufgabe 2. Sei K nun ungerader Charakteristik, d.h. es gelte $2 \neq 0$ in K. Zeigen Sie, dass sich jede Matrix A eindeutig schreiben lässt als

$$A = A^{+} + A^{-},$$

wobei A^{+} symmetrisch und A^{-} antisymmetrisch ist. Folgern Sie, dass

$$\mathrm{Mat}_n(K) \cong \mathrm{Sym}^{(n)}(K) \oplus \mathrm{A}^{(n)}(K).$$

Hinweis: Die Annahme an die Charakteristik von K impliziert, dass 2 in K invertierbar ist, d.h. $1/2 \in K$.

Aufgabe 3. Sei K ungerader Charakteristik. Zeigen Sie:

(1) Jede symmetrische bilineare Abbildung in $\mathrm{Sym}^2(K^n, K)$ ist von der Form
$$K^n \times K^n \to K, \quad (x, y) \mapsto xAy^{\mathrm{tr}}$$
für eine eindeutig bestimmte (!) symmetrische Matrix $A \in \mathrm{Sym}^{(n)}(K)$.

(2) Jede alternierende bilineare Abbildung in $\bigwedge^2(K^n, K)$ ist von der Form
$$K^n \times K^n \to K, \quad (x, y) \mapsto xAy^{\mathrm{tr}}$$
für eine eindeutig bestimmte (!) antisymmetrische Matrix $A \in \mathrm{A}^{(n)}(K)$.

Hinweis: In Proposition 6.6 hatten wir festgehalten, dass r-lineare Abbildungen durch ihre Werte auf r-Tupeln von Basisvektoren eindeutig bestimmt sind. Vergleichen Sie die Einträge von A mit den Werten der jeweiligen bilinearen Abbildungen auf Paaren von Standardbasisvektoren des K^n.

Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

Prof. Dr. Christopher Voll
Wintersemester 2017/18

Lineare Algebra 1
Präsenzübungsblatt 13

Seien K ein Körper und $k, n \in \mathbb{N}_0$.

Aufgabe 1. Beweisen Sie Lemma 6.13 der Vorlesung, d.h. verifizieren Sie folgende Identitäten für $k \leq n \in \mathbb{N}$:

(1)
$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1},$$

(2)
$$\sum_{i=0}^{k} \binom{n+k-i}{n} = \binom{n+k+1}{n+1}.$$

Aufgabe 2. Das *Skalarprodukt* (oder *inneres Produkt* oder *Punktprodukt*[1]) auf K^n ist die Abbildung

$$\cdot : K^n \times K^n \to K, \quad (x, y) \mapsto x \cdot y := \langle x, y \rangle := xy^{\mathrm{tr}} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

Das *Kreuzprodukt* (oder *äußeres Produkt* oder *Vektorprodukt*[2]) auf K^3 ist die Abbildung

$$\times : K^3 \times K^3 \to K^3$$
$$(x, y) = ((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) \mapsto x \times y := (x_2 y_3 - y_2 x_3, x_3 y_1 - y_3 x_1, x_1 y_2 - y_1 x_2).$$

Zeigen Sie, dass sowohl das Skalarprodukt als auch das Kreuzprodukt bilineare Abbildungen sind. Zeigen Sie weiter, dass das Skalarprodukt symmetrisch ist und das Kreuzprodukt antisymmetrisch, d.h. $x \times y = -y \times x$ für alle $x, y \in K^3$.

Aufgabe 3. Es sei S_n die symmetrische Gruppe vom Grad n, d.h. die Gruppe der bijektiven Abbildungen $\sigma : [n] \to [n]$ mit der durch Verknüpfung von Abbildungen gegebenen Gruppenoperation.

Für $\sigma \in S_n$ bezeichne $\langle \sigma \rangle = \{\sigma^i \mid i \in \mathbb{Z}\}$. Hierbei ist, für $i < 0$, σ^i als das zu σ^{-i} inverse Element definiert. Zeigen Sie:

(1) $\langle \sigma \rangle$ ist eine Untergruppe von S_n. (Ihre Ordnung wird mit $o(\sigma)$ bezeichnet.)
(2) $\mathcal{P} := \{\tau \langle \sigma \rangle \mid \tau \in S_n\}$ ist, mit $\tau \langle \sigma \rangle := \{\tau \sigma^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$, eine Partition der Menge S_n.
(3) Die Klassen der Partition $\mathcal{P}$ enthalten alle gleich viele Elemente, und es gilt $|\mathcal{P}| o(\sigma) = |S_n| = n!$. Insbesondere ist $o(\sigma)$ ein Teiler von $n!$.

[1] engl. *scalar product, inner product, dot product*, ...
[2] engl. *cross product, outer product, vector product*, ...

Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

Prof. Dr. Christopher Voll
Wintersemester 2017/18

Lineare Algebra 1
Präsenzübungsblatt 14

Sei K ein Körper.

Aufgabe 1. Für welche $n \in \mathbb{N}$ sind folgende Aussagen wahr, für welche falsch?

(1) "Für $A, B \in \mathrm{Mat}_n(K)$ gilt $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$."
(2) "Für $A \in \mathrm{Mat}_n(K)$ und $k \in K$ gilt $\det(kA) = k \det(A)$."
(3) "Für $A \in \mathrm{Mat}_n(K)$ und $k \in K$ gilt $\det(kA) = k^n \det(A)$."
(4) "Die Abbildung $\det : \mathrm{Mat}_n(K) \to K$ ist K-linear."

Aufgabe 2.

(1) Fertigen Sie eine Liste der Elemente der symmetrischen Gruppe S_3 vom Grad 3 an, in der Sie die Elemente sowohl in Matrix- als auch in Zykelnotation, sowie ihre Signatur notieren.
(2) Sei
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_3(K).$$
Zeigen Sie, dass
$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33}$$
gilt.

Aufgabe 3. Sei $n \in \mathbb{N}$ ungerade und $A \in \mathrm{Mat}_n(K)$ mit $A^{\mathrm{tr}} = -A$. Zeigen Sie, dass
$$2 \det(A) = 0$$
gilt.

Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

Prof. Dr. Christopher Voll
Wintersemester 2017/18

Lineare Algebra 1
Präsenzübungsblatt 15

Sei K ein Körper.

Aufgabe 1. Sei $A \in \mathrm{Mat}_n(K)$ eine Matrix der Form

$$A = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & E \end{pmatrix},$$

wobei $B \in \mathrm{Mat}_m(K)$ für ein $m \leq n$, $E \in \mathrm{Mat}_{n-m}(K)$, $C \in \mathrm{Mat}_{m,n-m}(K)$ und $0 \in \mathrm{Mat}_{n-m,m}(K)$ die Nullmatriz bezeichnet. Man zeige, dass

$$\det(A) = \det(B)\det(E)$$

gilt.

Aufgabe 2. Seien $x = (x_1, \ldots, x_n)$ und $y = (y_1, \ldots, y_n) \in K^n$. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Bedingungen:

(1) x und y sind K-linear abhängig.

(2) $\begin{vmatrix} x_i & x_j \\ y_i & y_j \end{vmatrix} = 0$ für alle $i, j \in \{1, \ldots, n\}$.

(3) Die Matrix $\begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \\ y_1 & \cdots & y_n \end{pmatrix}$ hat Rang höchstens 1.

Aufgabe 3. Sei $n \in \mathbb{N}$ gerade und $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}_n(K)$ mit

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{für } i < j \\ 0 & \text{für } i = j \\ -1 & \text{für } i > j. \end{cases}$$

Man zeige $\det(A) = 1$. Hinweis: Manipulieren Sie zunächst nur die ersten zwei Zeilen und Spalten von A durch Operationen, die die Determinante invariant lassen, bis Sie induktiv argumentieren können (etwa mithilfe von Aufgabe 1).