Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

Prof. Dr. Christopher Voll
Wintersemester 2017/18

Lineare Algebra 1
Präsenzübungsblatt 11

Seien K ein Körper und V und W endlich-dimensionale K-Vektorräume.

Aufgabe 1. Sei $f : V \to W$ eine K-lineare Abbildung mit dualer Abbildung $f^* : W^* \to V^*$. Weiter sei $b \in W$. Zeigen Sie: Die lineare Gleichung $f(x) = b$ ist genau dann in $x \in V$ lösbar, wenn $w^*(b) = 0$ für alle $w^* \in \ker(f^*)$.

Aufgabe 2. Sei $f : V \to W$ eine K-lineare Abbildung, die bezüglich geeigneter Basen $\mathcal{B}_V$ von V und $\mathcal{B}_W$ von W durch die Matrix

$$A = M^{\mathcal{B}_V}_{\mathcal{B}_W}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

gegeben sei. Bestimmen Sie eine Basis von $\ker(f)$ und eine Basis von $\operatorname{im}(f)$.

Aufgabe 3. Es seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ geordnete K-Basen von V, mit zugehörigen dualen Basen $\mathcal{B}^*$ und $\mathcal{A}^*$ des Dualraums V^*. Zeigen Sie, dass für die Basiswechselmatrizen $T^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}$ und $T^{\mathcal{A}^*}_{\mathcal{B}^*}$ die Gleichung

$$T^{\mathcal{A}^*}_{\mathcal{B}^*} = ((T^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}})^{-1})^{\mathrm{tr}}$$

gilt.