Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

Prof. Dr. Christopher Voll
Wintersemester 2017/18

Lineare Algebra 1
Präsenzübungsblatt 12

Sei K ein Körper.

Aufgabe 1. Eine Matrix $A \in \mathrm{Mat}_n(K)$ heißt *symmetrisch*, falls $A = A^{\mathrm{tr}}$, und *antisymmetrisch* (oder *schiefsymmetrisch*) falls $A = -A^{\mathrm{tr}}$. Wir schreiben

$$\mathrm{Sym}^{(n)}(K) = \{A \in \mathrm{Mat}_n(K) \mid A = A^{\mathrm{tr}}\}$$

für die Menge der symmetrischen $n \times n$-Matrizen über K und

$$\mathrm{A}^{(n)}(K) = \{A \in \mathrm{Mat}_n(K) \mid A = -A^{\mathrm{tr}}\}$$

für die Menge der antisymmetrischen $n \times n$-Matrizen über K. Zeigen Sie, dass sowohl $\mathrm{Sym}^{(n)}(K)$ als auch $\mathrm{A}^{(n)}(K)$ Unterräume von $\mathrm{Mat}_n(K)$ sind und bestimmen Sie die jeweiligen K-Dimensionen. Bestimmen Sie insbesondere $\dim_K(\mathrm{A}^{(2)}(K))$.

Aufgabe 2. Sei K nun ungerader Charakteristik, d.h. es gelte $2 \neq 0$ in K. Zeigen Sie, dass sich jede Matrix A eindeutig schreiben lässt als

$$A = A^+ + A^-,$$

wobei A^+ symmetrisch und A^- antisymmetrisch ist. Folgern Sie, dass

$$\mathrm{Mat}_n(K) \cong \mathrm{Sym}^{(n)}(K) \oplus \mathrm{A}^{(n)}(K).$$

Hinweis: Die Annahme an die Charakteristik von K impliziert, dass 2 in K invertierbar ist, d.h. $1/2 \in K$.

Aufgabe 3. Sei K ungerader Charakteristik. Zeigen Sie:

(1) Jede symmetrische bilineare Abbildung in $\mathrm{Sym}^2(K^n, K)$ ist von der Form
$$K^n \times K^n \to K, \quad (x, y) \mapsto xAy^{\mathrm{tr}}$$
für eine eindeutig bestimmte (!) symmetrische Matrix $A \in \mathrm{Sym}^{(n)}(K)$.

(2) Jede alternierende bilineare Abbildung in $\bigwedge^2(K^n, K)$ ist von der Form
$$K^n \times K^n \to K, \quad (x, y) \mapsto xAy^{\mathrm{tr}}$$
für eine eindeutig bestimmte (!) antisymmetrische Matrix $A \in \mathrm{A}^{(n)}(K)$.

Hinweis: In Proposition 6.6 hatten wir festgehalten, dass r-lineare Abbildungen durch ihre Werte auf r-Tupeln von Basisvektoren eindeutig bestimmt sind. Vergleichen Sie die Einträge von A mit den Werten der jeweiligen bilinearen Abbildungen auf Paaren von Standardbasisvektoren des K^n.