Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

Prof. Dr. Christopher Voll
Wintersemester 2017/18

Lineare Algebra 1
Präsenzübungsblatt 13

Seien K ein Körper und $k, n \in \mathbb{N}_0$.

Aufgabe 1. Beweisen Sie Lemma 6.13 der Vorlesung, d.h. verifizieren Sie folgende Identitäten für $k \leq n \in \mathbb{N}$:

(1)
$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1},$$

(2)
$$\sum_{i=0}^{k} \binom{n+k-i}{n} = \binom{n+k+1}{n+1}.$$

Aufgabe 2. Das *Skalarprodukt* (oder *inneres Produkt* oder *Punktprodukt*[1]) auf K^n ist die Abbildung

$$\cdot : K^n \times K^n \to K, \quad (x, y) \mapsto x \cdot y := \langle x, y \rangle := xy^{\mathrm{tr}} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

Das *Kreuzprodukt* (oder *äußeres Produkt* oder *Vektorprodukt*[2]) auf K^3 ist die Abbildung

$$\times : K^3 \times K^3 \to K^3$$
$$(x, y) = ((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) \mapsto x \times y := (x_2 y_3 - y_2 x_3, x_3 y_1 - y_3 x_1, x_1 y_2 - y_1 x_2).$$

Zeigen Sie, dass sowohl das Skalarprodukt als auch das Kreuzprodukt bilineare Abbildungen sind. Zeigen Sie weiter, dass das Skalarprodukt symmetrisch ist und das Kreuzprodukt antisymmetrisch, d.h. $x \times y = -y \times x$ für alle $x, y \in K^3$.

Aufgabe 3. Es sei S_n die symmetrische Gruppe vom Grad n, d.h. die Gruppe der bijektiven Abbildungen $\sigma : [n] \to [n]$ mit der durch Verknüpfung von Abbildungen gegebenen Gruppenoperation.

Für $\sigma \in S_n$ bezeichne $\langle \sigma \rangle = \{\sigma^i \mid i \in \mathbb{Z}\}$. Hierbei ist, für $i < 0$, σ^i als das zu σ^{-i} inverse Element definiert. Zeigen Sie:

(1) $\langle \sigma \rangle$ ist eine Untergruppe von S_n. (Ihre Ordnung wird mit $o(\sigma)$ bezeichnet.)
(2) $\mathcal{P} := \{\tau \langle \sigma \rangle \mid \tau \in S_n\}$ ist, mit $\tau \langle \sigma \rangle := \{\tau \sigma^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$, eine Partition der Menge S_n.
(3) Die Klassen der Partition $\mathcal{P}$ enthalten alle gleich viele Elemente, und es gilt $|\mathcal{P}| o(\sigma) = |S_n| = n!$. Insbesondere ist $o(\sigma)$ ein Teiler von $n!$.

---

[1] engl. *scalar product, inner product, dot product*, ...
[2] engl. *cross product, outer product, vector product*, ...